Proyectos que construyen la formación de profesores de matemática

Concurso de Oposición y Méritos 2018

Mario Dalcín, Gustavo Franco (Comps.)

Departamento de Matemática
Consejo de Formación en Educación

Guillermo Barcelona
Gustavo Bermúdez
Jorge Brisset
Horacio Castagna
Mario Dalcín
Gustavo Franco
Matías Guichón
Ana Maldonado
Ana Manrique
José Mariño
Jeannine Maufinet
Leticia Medina
Verónica Molfino
Luciana Olesker
Mariela Rey
Julio Vassallo
Nathalia Weigle

Proyectos que construyen la formación de profesores de matemática

Concurso de Oposición y Méritos 2018

Mario Dalcín, Gustavo Franco (Comps.)

Departamento de Matemática
Consejo de Formación en Educación

Guillermo Barcelona
Gustavo Bermúdez
Jorge Brisset
Horacio Castagna
Mario Dalcín
Gustavo Franco
Matías Guichón
Ana Maldonado
Ana Manrique
José Mariño
Jeannine Maufinet
Leticia Medina
Verónica Molfino
Luciana Olesker
Mariela Rey
Julio Vassallo
Nathalia Weigle

1ª edición: Abril de 2020

Diseño de cubierta: Departamento de Matemática

Imagen de cubierta: Vista aérea de cultivos

Fuente de la imagen de cubierta: <https://bit.ly/2xjfFFw>

Edición: Mario Dalcín y Gustavo Franco

ISBN 978–9974–8779–6–2

Departamento de Matemática

Montevideo, Uruguay

Por sugerencias o comentarios acerca del contenido de esta obra dirigirse a: depdematematica@gmail.com

Índice

Presentación 5

Geometría en la Formación de Docentes 9

Isometrías 11
Gustavo Bermúdez

Isometrías 31
Mario Dalcín

Poliedros 53
Ana Manrique

Poliedros 69
Jeannine Maufinet

Poliedros 87
Leticia Medina

Poliedros 109
Verónica Molfino

Poliedros 125
Nathalia Weigle

Álgebra en la Formación de Docentes 147

Estructuras algebraicas 149
Gustavo Franco

Divisibilidad 167
Leticia Medina

Transformaciones lineales 189
Julio Vassallo

Análisis en la Formación de Docentes 205

Funciones continuas 207
Guillermo Barcelona

Sucesiones y series 217
Jorge Brisset

Diferenciabilidad 235
Horacio Castagna

Integración 253
Gustavo Franco

Continuidad 273
Matías Guichón

Ecuaciones diferenciales 289
Ana Maldonado

Sucesiones y series 305
José Mariño

Continuidad 319
Verónica Molfino

Continuidad y diferenciabilidad 335
Mariela Rey

Probabilidad y Estadística-Computación en la Formación de Docentes 353

Convergencias 355
Luciana Olesker

Presentación

Este libro reúne proyectos presentados al Concurso de Oposición y Méritos para adquirir carácter efectivo en docencia directa en el Consejo de Formación en Educación (CFE), para el Departamento de Matemática, según Bases aprobadas por Resolución Nº 1 de Acta Ext. Nº 14 (de aquí en más nos referiremos a esta resolución como las *Bases*) de fecha 8 de noviembre de 2018. Este concurso involucró cuatro de las cinco secciones del Departamento de Matemática: Geometría en la Formación de Docentes, Álgebra en la Formación de Docentes, Análisis en la Formación de Docentes, Probabilidad y Estadística-Computación en la Formación de Docentes. Cada una de estas secciones comprenden asignaturas que son parte de la formación magisterial, de la formación de profesores de matemática de enseñanza media o de la formación de maestros técnicos.

A continuación presentamos cuáles fueron las asignaturas que integraron cada una de las cuatro secciones, los temas a elección para la elaboración del proyecto y el tribunal de cada sección, según Acta Nº 47 Resolución Nº 35 de fecha 27 de diciembre de 2018:

Sección Geometría en la Formación de Docentes:
Geometría I (Matemática)
Profundización en geometría (Matemática)
Matemática aplicada a la geografía (Geografía)
Matemática II (Magisterio)
Geometría (Industria textil, diseño e indumentaria)
Matemática aplicada (Carpintería)

Temas a elección para la elaboración del proyecto:
1. Isometrías y/o semejanzas
2. Poliedros
3. Paralelismo y perpendicularidad en el plano y/o en el espacio
4. Geometrías no euclidianas

Tribunal: Prof.ª Inés Urbina (CFE), Dr. Andrés Abella (UdelaR), Prof.ª Laura Dodino (Delegada de los concursantes)

Sección Álgebra en la Formación de Docentes:
Fundamentos de la matemática (Matemática)
Geometría y álgebra lineal (Matemática)
Matemática aplicada (Matemática, plan 1986, se ha seguido dictando en forma ininterrumpida)
Matemática (Magisterio)
Matemática aplicada II (Industria textil, diseño e indumentaria)
Matemática I (Informática)

Temas a elección para la elaboración del proyecto:
1. Transformaciones lineales

2. Espacios vectoriales
3. Estructuras algebraicas
4. Divisibilidad

Tribunal: Prof. Julio Silvera (CFE), Dr. Marcelo Lanzilotta (UdelaR), Prof.ª Mariana Pizzarosa (Delegada de los concursantes)

Sección Análisis en la Formación de Docentes:
Análisis I (Matemática)
Análisis II (Matemática)
Topología (Matemática)
Matemática I, II y III (Física)
Matemática I y II (Astronomía)
Matemática (Química)
Profundización en análisis (Matemática)
Matemática aplicada I (Industria textil, diseño e indumentaria)
Matemática aplicada I (Electrónica, electrotecnia, redes y telecomunicaciones)
Matemática aplicada II (Electrónica, electrotecnia, redes y telecomunicaciones)
Matemática aplicada (Mecánica industrial)
Matemática aplicada I (Mecánica automotriz, electricidad automotriz)
Matemática aplicada II (Mecánica automotriz, electricidad automotriz)
Matemática aplicada II (Informática)

Temas a elección para la elaboración del proyecto:
1. Sucesiones y series
2. Continuidad y/o diferenciabilidad
3. Integración
4. Ecuaciones diferenciales

Tribunal: Prof.ª Inés Urbina (CFE), Dr. Aldo Portela (UdelaR), Prof.ª Etda Rodríguez (Delegada de los concursantes)

Sección Probabilidad y Estadística-Computación en la Formación de Docentes:
Probabilidad y estadística (Matemática)
Bioestadística (Ciencias biológicas)
Estadística aplicada (Agraria)
Probabilidad y estadística (Informática)

Temas a elección para la elaboración del proyecto:
1. Espacios de probabilidad
2. Variables y vectores aleatorios
3. Convergencias y resultados límite
4. Inferencia estadística

Tribunal: Dr. Federico de Olivera (CFE), Dr. Diego Armentano (UdelaR), Dr. Juan Kalemkerian (Delegado de los concursantes)

El Concurso de Oposición y Méritos constó de dos instancias: una prueba de oposición y la valoración de los méritos. La prueba de oposición consistió en la presentación y defensa de un proyecto referido a alguno de los temas que indicamos anteriormente (Art. 17 de las Bases).

El puntaje total del concurso fue de doscientos cincuenta (250) puntos y se distribuyeron de la siguiente manera:

- Sesenta por ciento (60%) para la oposición: ciento cincuenta (150) puntos compuestos por noventa (90) puntos del proyecto y sesenta (60) puntos de su defensa
- Cuarenta por ciento (40%) para los méritos: cien (100) puntos.

Los concursantes que obtuvieron por lo menos el cuarenta por ciento (40%) del puntaje total de la prueba de oposición —sesenta (60) puntos— pasaron a la instancia de méritos. (Art. 18 de las Bases).

Los concursantes que tuvieron derecho a efectividad fueron los que obtuvieron un puntaje equivalente o superior al sesenta por ciento (60%) (150 puntos) del puntaje total del Concurso (Art. 26 de las Bases).

Un panorama global del resultado del Concurso puede verse en la siguiente tabla:

	Cantidad de postulantes habilitados a presentar Proyecto	Cantidad de concursantes con derecho a efectividad
Geometría en la Formación de Profesores	51	15
Álgebra en la Formación de Profesores	54	10
Análisis en la Formación de Profesores	46	21
Probabilidad y Estadística-Computación en la Formación de Profesores	12	3
	163	49

El concursante debió elegir, para el desarrollo de su proyecto, uno de los cuatro temas propuestos para la sección para la que concursó. El documento presentado debió tener una extensión máxima de 15 carillas (Art. 19 de las Bases) e incluir:

- Aspectos disciplinarios: conceptos o ideas involucrados en el tema, fundamentación epistemológica de su relevancia disciplinar (50%)
- Aspectos didácticos: relevancia del tema para la enseñanza en la formación de formadores, incluidas estrategias y evaluación (30%)
- Proyección en líneas de investigación (20%) (Art. 20 de las Bases).

Para la presentación conjunta de los proyectos recibidos, si bien respetamos la organización que cada profesor le dio, adoptamos algunas normas de edición (márgenes de las páginas, tamaños de subtítulos, espaciado anterior y posterior, interlineado, etc.) para uniformizar el resultado. Dentro de cada sección los proyectos fueron ordenados alfabéticamente según el apellido del autor. Participan de esta compilación aquellos concursantes que resultaron con derecho a la efectividad y que aceptaron ser parte de ella enviando su proyecto.

Por último, y dejando de lado los aspectos formales del Concurso y de la edición del libro, quisiéramos señalar algunos de los motivos que nos llevaron a realizar esta publicación. En primer lugar, dado que todos los profesores que quedaron con derecho a efectivizarse ya se desempeñaban como docentes en el CFE (según el Art. 2 de las Bases, uno de los requisitos para presentarse al Concurso era acreditar un año o un curso semestral completo de desempeño docente en el CFE o al menos sesenta (60) horas en seminarios o talleres), consideramos que era necesario conservar y que no se perdiera el conocimiento que estos han construido a través de su experiencia como docentes en este ámbito. En segundo lugar, consideramos que la formación de profesores de matemática es una tarea colectiva que se fortalece en el intercambio de ideas y prácticas, el debate, y los acuerdos del cuerpo docente. Creemos que este libro —para el que fueron invitados todos los docentes que resultaron con derecho a efectivizarse como resultado del Concurso— servirá para colectivizar producciones de profesores, contribuyendo a la discusión en torno a las distintas miradas que existen sobre la enseñanza de la matemática en la formación docente. Por último, consideramos que puede ser un material de referencia que aporte insumos acerca de las concepciones de profesores del CFE sobre la enseñanza de ciertos contenidos matemáticos en la formación docente.

Mario Dalcín y Gustavo Franco
Responsables de la edición, marzo de 2020

Geometría en la Formación de Docentes

Isometrías

Gustavo Bermúdez

> Symmetry, as wide or as narrow as you may define its meaning, is one idea by which man through the ages has tried to comprehend and create order, beauty, and perfection. (Weyl, 1952)
>
> La simetría es un concepto, un fenómeno, una clase de propiedades y un método. Está presente en casi todas las disciplinas y campos del arte y la tecnología. Como concepto, tiene raíces tanto en la ciencia como en el arte. Como fenómeno, la simetría o su falta está presente en todos los campos del arte, la ciencia y la tecnología. Finalmente, las propiedades y los métodos, basados en la aplicación y la investigación de simetría (y ruptura de simetría) se transfieren de un campo a otro. (Journal of Symmetry, 2019)

Las citas precedentes destacan la importancia del estudio de las isometrías (o, simetrías, como se las conoce en el ámbito de la matemática) en la formación de un futuro profesor de esta asignatura. Según el profesor H. Winter, es una de las ideas fundamentales de la formación matemática de una persona (Winter, 2001).

Desde hace muchos años, el estudio de las simetrías y sus conexiones con otras ciencias han sido abordadas tanto por matemáticos como por otros científicos. Dos ejemplos notables son los libros *Symmetry* de Hernan Weyl (Weyl, 1952) y el clásico *Lectures on the principle of symmetry and its applications in all natural sciences*, de F. M. Jaeger (Jaeger, 1920).

Además, el estudio de las simetrías, es abordado también desde una perspectiva más "*holística*", como un ejemplo notable de unidad e interdisciplinariedad del conocimiento humano (en contraste con la "compartimentación" que se hace en la escuela). (Darvas, 2007)

Y fundamentalmente, el concepto de simetrías (isometrías) resulta fundamental para la formación matemática del futuro profesor.
Es así que en muchos reportes se analiza y estudia la relevancia de este tema, como formador de conceptos que luego resultan casi imprescindibles en el acercamiento al algebra lineal, por ejemplo (que es una asignatura posterior en la formación de profesores de matemática en nuestro país) o en un estudio de la cristalografía, por ejemplo, en un curso de profundización en geometría.

Algunos autores son terminantes al respecto, como por ejemplo Winter (1976, p. 16, citado por Donevska-Todorova y Melih, 2017) que afirma: "symmetry and congruence mappings are considered a fundamental idea in the teaching of geometry even in primary school from several aspects: shape, algebraic, esthetical, economic-technical and arithmetical."

Es sabido que el conjunto de isometrías del plano euclidiano con la operación composición de funciones, tiene estructura de grupo (cumple propiedades de clausura o cierre, asociativa, existencia de neutro y de inverso).

Al revisar procesos históricos de formación de algunas ideas matemáticas, se percibe que los grupos en el espacio euclidiano de dimensión *n*, son de los más antiguos y más estudiados, al menos implícitamente en el caso del plano y el espacio (incluso antes de la aparición del mismo concepto de grupo). Pero, ese surgimiento de un concepto casi que puramente algebraico, se produce a partir de un trabajo previo, intenso y extenso, en el plano y el espacio a través de la geometría euclidiana.

Y es ese intenso trabajo en la geometría euclidiana por parte de futuros docentes que también debería preceder al surgimiento del enfoque algebraico o más abstracto.

En este sentido, Donevska-Todorova y Melih (2017) indican:

> This historical geometrical conduction, prior the algebraic and the abstract, seems to be reflected in mathematics school curricula and textbooks designs even today. In primary schools, the abstractness is largely decreased. Yet, in our opinion, this knowledge is also relevant for teacher education and teacher professional development programs. Ignorance of any of the modes may prevent pupils from further earlier cognitive development.

También autores uruguayos como Abella y Pereyra (2011, p. 155) afirman que

> La geometría de los movimientos debería ocupar un lugar importante en el currículo de nuestras licenciaturas en Matemáticas. Además de incentivar el interés por aquellos aspectos geométricos de la Matemática, es un punto de convergencia de varias ramas como la geometría euclidiana, el álgebra lineal y la teoría de grupos. Sería deseable que los estudiantes de Educación Matemática, orientados hacia la docencia a nivel de bachillerato, también tomaran, en algún momento durante la carrera, un curso de este tipo.

En el ámbito de la formación de profesores, algunos investigadores afirman que la adquisición incompleta del concepto de isometrías por parte de alumnos de enseñanza media, puede ser fruto de una insuficiencia en la formación del concepto en su docente de matemáticas. (Donevska-Todorova, 2017) Y, en ese marco, hay algunos que afirman que la ausencia de un buen concepto acerca de isometrías, hace que, luego, muchos estudiantes no recurran a ellas como argumentos a utilizar en sus demostraciones. (De Villiers, 2004)

Estamos, entonces en presencia de un tema que supone un importante mojón en la formación geométrica y matemática del futuro profesor de la asignatura.
Al momento de plantear el desarrollo del tema, no debemos tampoco perder de vista, (que además de que el futuro profesor debe acceder con la mejor claridad posible al concepto de isometrías, los diferentes tipos y sus propiedades) que debe trabajarse en un marco general de una geometría que se aprende para luego ser enseñada: digamos que, parafraseando a algunos autores, se trata de “enseñar geometría para ser enseñada”.

Surgen entonces algunas decisiones a tomar en el desarrollo de una propuesta sobre este tema, y una de las primeras es:

¿Con qué enfoque teórico sobre el tema abordar nuestro curso?

Existen varias formas de abordar el tema, tres de las cuales describiremos brevemente:

1. PUIG ADAM: *La forma más tradicional en Uruguay y que está presente en muchos libros de texto.*

Durante muchos años, la mayor parte de los docentes de matemática de este país, hemos aprendido geometría basándonos en el excelente libro *Curso de Geometría Métrica* (Tomo I), de Pedro Puig Adam y puede decirse que el espíritu de esta obra impregnó también los programas de estudio en enseñanza media (en geometría). Este autor, siguiendo las ideas de Hilbert, plantea un conjunto de cinco grupos de axiomas (que llama fundamentales) (Puig Adam, 1986, p. 3) con los cuales elabora el sustento teórico en su obra:
I) de enlace o incidencia,
II) de ordenación,
III) de congruencia o movimiento,
IV) de paralelismo y
V) de continuidad.

Al abordar el capítulo II, *Movimiento y congruencia*, el primer aspecto importante con el que trabaja, es que llama a las isometrías *movimientos geométricos en el plano*, aclarando que se trata de pensar "*exclusivamente en la transformación o correspondencia que resulta entre los puntos del plano en sus dos posiciones inicial y final"* (Puig Adam, 1986, p. 24) y no considera a los movimientos desde un punto de vista "físico" donde intervendrían el tiempo y una sucesión de posiciones intermedias.
Así, establece los siguientes enunciados como axiomas:

> Ax. III.1 - Los movimientos del plano son transformaciones puntuales biunívocas del mismo
> Ax. III.2 – Todo movimiento conserva las relaciones de incidencia y orden de puntos
> Ax. III.3 – Ningún movimiento puede transformar un segmento o un ángulo en una parte del mismo
> Ax. III.4 – La transformación resultante de aplicar dos movimientos sucesivos es otro movimiento. (Puig Adam aclara además, que, como el producto de dos movimientos inversos es la identidad, considerará a la Identidad como un caso particular de movimiento.)
> Ax. III.5 – La transformación inversa de todo movimiento es otro movimiento.
> Ax. III.6 –Existe un movimiento y sólo uno que transforma una semirrecta en otra, y un determinado semiplano limitado por la recta primera en un determinado semiplano determinado por la segunda. (Se ha transcripto en forma textual el enunciado dado por Puig Adam, a pesar de cierta inconsistencia en su redacción.) (Puig Adam, 1986, pp. 24-25)

Luego, define la condición bajo la cual un movimiento es directo o indirecto (que en verdad llama inverso), menciona la condición de estructura de grupo del conjunto de los movimientos con la operación composición (a la que llama reiteradamente *producto*) y define a continuación figuras congruentes: "Diremos que dos figuras F y F' son congruentes o iguales cuando una de ellas F' puede obtenerse transformando la otra F mediante un movimiento". (Puig Adam, 1986, p. 26)

Luego de mencionarse que la relación de congruencia es una relación de equivalencia y que esta relación se mantiene en un movimiento, procede a enunciar y demostrar un teorema fundamental en este enfoque teórico: el teorema del transporte de un ángulo y de una figura en general.
Luego, demuestra los dos primeros criterios de congruencia de triángulos (LAL y ALA).

Al establecer estos supuestos teóricos generales sobre los movimientos, se pasa a definir cada uno de ellos -en todos los casos- como una correspondencia entre

- dos semirrectas y
- entre los semiplanos determinados por su recta sostén.

Así lo hace con la simetría central y axial (lección 5, pp. 30-35) y la traslación (lección 7, pp. 41-45).
La definición de rotación o giro, ya no se hace en forma tan precisa como una correspondencia entre dos semirrectas y sus semiplanos, sino que lo hace a partir de haber analizado previamente que todo movimiento inverso que deja un punto fijo es una simetría axial cuyo eje pasa por el punto y trata de investigar la existencia de un movimiento directo que deja fijo a un punto, con lo cual define el giro.
Y no se establece una definición de la *antitraslación* (o *traslación con desplazamiento* como también se la conoce) como un movimiento inverso más.
En el mismo texto, analiza algunas composiciones de movimientos, como las de dos simetrías axiales, por ejemplo. Finalmente, prueba que todo movimiento del plano se reduce a alguno de los estudiados previamente, o una composición de ellos (Puig Adam, 1986, p. 48), a partir de las posiciones relativas de dos semirrectas en el plano.

Es de destacar que, a lo largo de todo el tratamiento del tema, el autor trabaja con el concepto de grupo: considera la existencia (o no) de esta estructura, como en el caso del conjunto de las traslaciones y la operación composición, o la no existencia como en el caso de los giros con la misma operación.

2. HOWARD EVES: Una formalización rigurosa de las transformaciones en el plano.

Howard Eves encara en dos volúmenes una obra casi monumental –*Estudio de las Geometrías*–que se ha transformado en un clásico (Eves, 1997).Es así que en el Capítulo 7 del volumen 1, aborda el estudio de las Transformaciones Elementales en el plano, y considera a las isometrías un caso particular de ellas.

Es así que comienza definiendo el *mapeo* del conjunto A al conjunto B como una función entre dos conjuntos A y B.
A partir de la definición de mapeo, entonces, define una transformación:
"Un mapeo de un conjunto A sobre otro B en el que los elementos distintos de A tienen imágenes distintas en B se llama una transformación de A sobre B." (Eves, 1997, p. 117)
Define elemento *invariante* en una transformación y a la transformación identidad como aquella transformación de un conjunto A sobre sí mismo, que tiene sus elementos invariantes.
A continuación, define *transformación inversa* (como el mapeo inverso entre los conjuntos) y entonces aborda la composición de transformaciones, a las que llama en verdad *producto de*

transformaciones y establece una definición precisa para el *grupo de transformaciones* de un conjunto A sobre sí mismo. (Eves, 1997, p. 119)

Entonces, aborda todo el conjunto de todas las transformaciones del plano en el plano y define todas ellas, como, por ejemplo:

> Sea *S* el conjunto de todos los puntos del plano ordinario […]
> 3.2.1DEFINICIONES Y NOTACIÓN. Sea $\overline{AB}$ un segmento rectilíneo dirigido del plano. Por *traslación* T(*AB*) queremos decir la transformación de *S* sobre sí mismo que transporta cada punto *P* del plano al punto *P'* del plano tal que $\overline{PP'}$ sea igual y paralelo a $\overline{AB}$. El segmento dirigido $\overline{AB}$ se llama el *vector* de la traslación.[…]
> 3.2.3DEFINICIONES Y NOTACIÓN. Sea *l* una recta fija del plano. Por la *reflexión R(l) en la rectal* se designa la transformación de *S* sobre sí mismo que lleva cada punto *P* del plano al punto *P'* del mismo, tal que *l* sea la mediatriz de *PP'*. La recta *l* se llama *eje* de la reflexión
> 3.2.6DEFINICIONES Y NOTACIÓN. Sea *l* una recta fija del plano y $\overline{AB}$ un determinado segmento dirigido de *l*. Por el *deslizamiento-reflexión* G(*l*, *AB*) queremos decir el producto R(*l*)T(*AB*). La recta *l* se llama *eje* del deslizamiento-reflexión, y el segmento dirigido $\overline{AB}$ de *l* se llama *vector* del deslizamiento-reflexión. (Eves, 1997, pp. 121-122)

Establece teoremas que consideran diferentes productos entre las transformaciones definidas previamente y se determina cuáles son las que son involutivas y cuáles tienen puntos invariantes.
Más adelante define una isometría como una semejanza de razón 1:

> DEFINICIONES: Una transformación puntual del plano no limitado sobre sí mismo que trasporta cada par de puntos *A*, *B* a un par *A*', *B*', de modo que *A'B'* = *k*(*AB*), donde *k* es un número real positivo fijo, se llama *semejanza* (o *transformación equiforme*), y el caso particular en que *k* = 1 se llama *isometría* (o *transformación congruente*)
> Una semejanza se dice que es directa o inversa según que ∆*ABC* tenga o no el mismo sentido que ∆*A'B'C'*. (Eves, 1997, p. 131)

Se demuestra que existe una única isometría que transforma un triángulo *ABC* en otro congruente *A'B'C'* y que toda isometría es el producto de a lo sumo tres reflexiones de rectas y continúa analizando las isometrías que transforman un segmento AB en otro A'B', demostrando también que sólo hay dos isometrías inversas y caracteriza a las isometrías que contienen un solo punto invariante y también que, dadas dos rectas, la composición de las reflexiones según esas rectas es una traslación (si son paralelas) o una rotación (si son secantes).
Todo el planteo de Eves, se hace en un plano de abstracción importante, como una construcción lógica casi sin recurrir a figuras en su tratamiento

3. DALCÍN-MOLFINO: Una propuesta aplicada desde hace unos 10 años en Formación Docente.

Elaborada por los profesores Mario Dalcín y Verónica Molfino (Dalcín y Molfino, 2009) consta de una serie de fichas para el trabajo en todo el curso, a partir de una concepción diferente sobre el enseñar y aprender geometría. Se trata de la construcción de un sistema deductivo basado en algunos axiomas de tipo “local” en el sentido de que se determinan esos axiomas (como proposiciones que se admiten como verdaderas, sin necesidad de ser demostradas) y con una finalidad diferente a la planteada por Hilbert (y que sigue Puig Adam): no se trata de construir un “edificio” teórico para la geometría sino de tener elementos para una “construcción” de la misma en el aula.

Además, el curso está pensado para el perfil de la mayoría de los estudiantes que comienzan su formación como profesores de matemática, y se aborda desde una introducción histórica del estudio de la geometría euclidiana, revisando las actitudes hacia la geometría de diferentes civilizaciones, hasta culminar con la griega, que plantea un salto cualitativo en cuanto a la argumentación como factor fundamental del desarrollo de la disciplina.

Luego de revisar conceptos sobre ángulos y ángulos entre paralelas, plantea un conjunto de cuatro axiomas, que son simplemente los cuatro criterios de congruencia de triángulos, con los cuales comienza a construirse a nivel “local” un sustento teórico para la demostración de una serie de propiedades de los triángulos isósceles, de los puntos notables en el triángulo y un estudio completo de los cuadriláteros. Por supuesto que la elección de este “sistema axiomático local” (en el sentido de su validez en el ámbito del trabajo en el aula y el curso) cumple con los requisitos imprescindibles de consistencia e independencia.

Para abordar el tema concreto de isometrías, se procede a considerarla como una función biyectiva del plano en el plano que conserva las distancias. Previamente, se hace un estudio sobre algunas funciones del plano en el plano, analizando características (si conservan alineaciones, si tienen puntos fijos, si conservan el paralelismo o la forma, etc.) y su composición.
En ese marco, entonces, establece primeramente el

> Axioma métrico:
> Existe una función d: $\pi \times \pi \to R$ a la que llamaremos distancia que a cada par de puntos le hace corresponder un número real y tiene las siguientes propiedades:
> i) $d(A,B) \geq 0 \ \forall A, B \in \pi$
> ii) $d(A,B) = d(B,A) \ \forall A, B \in \pi$
> iii) si C pertenece al segmento AB $\to d(A,B) = d(A,C) + d(C,B)$
> iv) si C no pertenece al segmento AB $\to d(A,B) < d(A,C) + d(C,B)$
> v) $\forall$ recta orientada $r \subset \pi$, $\forall O \in r$, $\forall k \in R^+ \to$ existe un único punto $P \in r$ / O precede a P y $d(O,P) = k$. Nota: π es el plano.
> (Dalcín y Molfino, 2009, Unidad 2, ficha 1, p. 4).

Así, se define la isometría del plano como una función biyectiva que conserva las distancias (obviamente se trata de una función del plano en el plano).

Se define la función identidad y se prueba que es una isometría. Asimismo, se define isometría directa y no directa (según conserve o no el sentido en el plano) y se procede a demostrar que el conjunto de las isometrías con la operación composición tiene estructura de grupo.

Y entonces se llega a un punto importante: ¿cómo se determina una isometría? Para eso se demuestra el teorema de determinación de isometrías:

> Dados tres puntos no alineados A, B y C y sus respectivas imágenes A', B' y C', existe y es única la isometría que transforma A en A', B en B' y C en C'.
> (Dalcín y Molfino, 2009)

Se define la simetría axial, rememorando la definición (en este contexto teórico) de Eves (1997): dada una recta *e*, dos puntos *P* y *P'* son simétricos respecto de *e* si y sólo si *e* es la mediatriz del segmento *PP'*. Se demuestra que se trata de una isometría y que es directa e involutiva.

A continuación, se definen las restantes isometrías como el resultado de la composición de dos o tres simetrías axiales: de dos simetrías axiales (según los ejes sean secantes o paralelos), definiéndose entonces la rotación y la traslación y considerándose como un caso particular de rotación a la simetría central (para el caso en que los ejes sean perpendiculares).Se analizan detenidamente sus propiedades particulares.

Finalmente, se estudia la composición de tres simetrías axiales, haciéndolo a partir de las posiciones relativas de tres rectas en el plano. Al "detectar" que, en una de las posiciones, esa composición no es ningún resultado conocido hasta el momento, se procede a definir la Antitraslación (la antitraslación, corresponde a la deslizamiento-reflexión definida por Eves) como el resultado de componer tres simetrías axiales bajo ciertas circunstancias.

Para terminar con el estudio de las isometrías, se demuestra de varias formas, que no hay más isometrías que las definidas: identidad, simetría axial, rotación, simetría central, traslación y antitraslación. A este resultado se le llama *teorema fundamental de las isometrías* del que se elaboran varias demostraciones:

- la primera a partir de la consideración de la composición de cuatro simetrías axiales y la constatación de que el resultado siempre es uno de los ya conocidos,
- la segunda es demostrando que, dados dos triángulos iguales en cualquier posición, componiendo las isometrías conocidas hasta el momento es posible transformar el primer triángulo en el segundo
- la tercera considerando las posiciones relativas de dos semirrectas en el plano (10 casos) y probando que siempre se corresponden en algunas de las isometrías conocidas
- la cuarta caracterizando las isometrías según la cantidad de puntos fijos (o invariantes)

De esta forma, se demuestra que no hay más isometrías que las estudiadas y que toda isometría es el resultado de componer, a lo sumo, tres simetrías axiales.

Propuesta para desarrollar el tema en un curso de Geometría Euclidiana para futuros profesores

La propuesta que desarrollaré, está basada en la necesidad y posibilidad de que el futuro profesor de matemática estudie geometría en un Entorno de Geometría Dinámica (EGD) y el trabajo en grupos en la mayor parte del tiempo.

El EGD constituye un espacio de trabajo del alumno con un software de Geometría Dinámica (GD): (como Geogebra) y un soporte digital adecuado: computadora personal, tablet, celular, etc. Esta posibilidad es absolutamente real en nuestro Uruguay actual.

La propuesta está basada en la idea desarrollada por Dalcín y Molfino (2009) y consideraré las isometrías, como un conjunto especial de transformaciones del plano, dejando para después la consideración de las semejanzas (y no como plantea Eves (1997) por ejemplo, que trabaja con todo el conjunto de las transformaciones en forma simultánea). Se trabajará (y estará subyacente en varios momentos) la existencia del grupo de las 17 simetrías del plano y algunos de sus subgrupos discretos (Carrión, 2012 y Abella y Pereyra, 2011) que permitirá en un curso de profundización abordar el estudio de frisos, mosaicos y aún de la cristalografía plana.

Además, para esta elaboración, consideramos el modelo Van Hiele (Jaime y Gutiérrez, 1990) como marco teórico de trabajo, desde el punto de vista didáctico.
El modelo Van Hiele abarca dos aspectos: descriptivo (es posible identificar distintas formas de razonamiento geométrico en el alumno y es posible “medir” su progreso) e instructivo (sugiere o indica los criterios que debe manejar un docente para favorecer el avance de sus estudiantes en su nivel de razonamiento geométrico)

La idea esencial de este modelo es que, a lo largo del proceso de aprendizaje de la Geometría, “el razonamiento del alumno pasa por una serie de niveles de razonamiento, que son secuenciales, ordenados y tales que no se puede saltar ninguno.” (Jaime y Gutiérrez, 1993).
Estos niveles de razonamiento son: reconocimiento, análisis, clasificación, deducción formal y rigor.
A grandes rasgos:

- El nivel 1, (reconocimiento) implica una percepción individual de las figuras: son consideradas como un objeto, independiente de otras figuras de la misma clase y su descripción se basa principalmente en su aspecto físico y posición en el espacio.
- El nivel 2 (análisis) implica ya un reconocimiento de las figuras como portadoras de propiedades. Se pueden deducir propiedades a partir de la experimentación y, en algunos casos es posible una generalización a un conjunto de figuras de la misma clase; la demostración de una propiedad se realiza mediante su verificación en pocos casos.
- El nivel 3 (clasificación) es en el que se relacionan propiedades de una figura entre sí o con las de otras figuras: se percibe la existencia de relaciones y se descubren, de manera experimental, nuevas relaciones, y además, se comprende lo que es una definición matemática y sus requisitos. La demostración ya no se basa en la comprobación de casos, sin embargo, aún no se puede completar formalmente una demostración.
- El nivel 4 (deducción formal) es el que permite manejar enunciados de problemas o teoremas, con un lenguaje más preciso, permite la realización de las demostraciones (de varios pasos) mediante razonamientos deductivos formales y se pueden desarrollar demostraciones formales.
- El nivel 5 (rigor), implica la posibilidad de trabajar en sistemas axiomáticos distintos del de la geometría euclídea, la capacidad para pensar en forma abstracta basándose en un sistema de axiomas determinado; capacidad para comparar sistemas axiomáticos diferentes y decidir

sobre su equivalencia. Se comprende la importancia de la precisión al tratar los fundamentos y las relaciones entre estructuras matemáticas. (Jaime y Gutiérrez,1993).

Nasser (1989) adaptó la descripción de cada uno de los niveles al caso de las transformaciones geométricas:

- Nivel 1: los alumnos reconocen e identifican las transformaciones (reflexión, rotación, traslación y homotecia);
- Nivel 2: Los estudiantes identifican y analizan las propiedades de las transformaciones, como: eje de simetría (reflexión), centro y ángulo de giro (rotación), factor de escala de la homotecia;
- Nivel 3: Los alumnos reconocen combinaciones e inversos de transformaciones;
- Nivel 4: los estudiantes entienden el significado de la deducción, lo contrario de un teorema y las condiciones necesarias y suficientes;
- Nivel 5: Los estudiantes hacen demostraciones formales de propiedades y establecen transformaciones en diferentes sistemas.

También, una descripción más profunda de estos niveles aplicados a las isometrías se encuentra (Jaime y Gutiérrez, 1993) y también en (Jaime y Gutiérrez, 1991) y es utilizada en este trabajo.

Si bien es esperable que los estudiantes al culminar el bachillerato, y luego de trabajar con isometrías a lo largo de su etapa liceal, puedan rápidamente acceder a los niveles superiores de esta escala, la experiencia en los últimos años indica que la mayoría de quienes comienzan su formación como profesores de matemática, apenas pueden ubicarse en los dos primeros niveles.

Así, pues, con esta referencia se construye la propuesta, de la cual se muestran algunos ejemplos de actividades en las páginas siguientes:

Actividad 1.

Elegidas dos rectas secantes *a* y *b* en *O*, se define la función f : π → π como sigue:
f (*O*) = *O*
si $P \neq O$, f (*P*) = *P'* donde *P'* pertenece a la paralela a la recta *b* por *P*, de forma que $\overline{PP'} = 2\overline{PP_o}$, siendo *Po* el punto donde *PP'* corta a la recta *a*.

1. Realiza con tu grupo de trabajo, las construcciones necesarias para hallar la imagen de cualquier punto *P* del plano.

2. Verifica que se trata de una función del plano en el plano: para ello, puedes comenzar “moviendo” el punto *P* por la pantalla y verificando si existe *P’*.

3. ¿Si el punto $P \in b$, a qué figura pertenece *P’*? Justifica. ¿Cuál es la imagen de la recta *b*?

4. ¿Hay puntos fijos en esta función? Es decir, hay puntos *P* que coincidan con *P’*. ¿Cuáles? ¿Cuál es la imagen de la recta *a*?

5. Considera dos puntos *P* y *Q* diferentes (en principio diferentes a *O*) y halla sus imágenes por *f*. Considera la recta *PQ* y contesta: ¿la imagen de una recta es una recta? ¿Hay algún caso en que una recta y su imagen son paralelas?

6. Considera un tercer punto *R* diferente a *P* y *Q* y halla la imagen del triángulo *PQR*. ¿Ambos triángulos tienen el mismo sentido?

7. Considera la circunferencia de centro *P* que pasa por *Q*. ¿Su imagen será la circunferencia de centro *P'* que pasa por *Q'*? A dos rectas paralelas, ¿le corresponden rectas paralelas?

8. Demuestra que la función *f* es una función biyectiva (puedes recurrir a materiales de clase para revisar definiciones a aplicar)
9. ¿*f* conserva las distancias?

Actividad 2.

Dado O ∈ π definimos g: π → π como sigue:
g(O) = O
si P ≠ O → g (P) = P' siendo el triángulo (OPP') equilátero y antihorario.

1. Realiza con tu grupo de trabajo, las construcciones necesarias para hallar la imagen de cualquier punto *P* del plano.

2. Verifica que se trata de una función del plano en el plano: para ello, puedes comenzar "moviendo" el punto *P* por la pantalla y verificando si existe *P'*.

3. ¿Es *g* una función biyectiva?

4. ¿Hay puntos fijos en esta función? Es decir, hay puntos que coincidan consu imagen. ¿Cuáles?

5. Considera dos puntos *P* y *Q* diferentes (en principio diferentes a *O*) y halla sus imágenes por *g*. Considera la recta *PQ* y contesta: ¿la imagen de una recta es una recta? ¿Hay algún caso en que una recta y su imagen sean paralelas?

6. Considera un tercer punto *R* diferente a *P* y *Q* y halla la imagen del triángulo *PQR*. El Δ*PQR* y su imagen ¿tienen el mismo sentido?

7. Considera la circunferencia de centro *P* que pasa por *Q*. ¿Su imagen será la circunferencia de centro *P'* que pasa por *Q'*? A dos rectas paralelas, ¿le corresponden rectas paralelas?

8. Demuestra que la función *g* es una función biyectiva (puedes recurrir a materiales de clase para revisar definiciones a aplicar)

9. ¿*g* conserva las distancias? ¿Por qué?

Actividad 3.

Dado O ∈ π y definimos h: π → π como sigue:
h (*O*) = *O*
si*P* ≠ *O* → f(*P*) = *P'* con *P'*∈*OP* / $\overline{OP'} = 3\overline{OP}$

1. Realiza con tu grupo de trabajo, las construcciones necesarias para hallar la imagen de cualquier punto *P* del plano.

2. Verifica que se trata de una función del plano en el plano: para ello, puedes comenzar "moviendo" el punto *P* por la pantalla y verificando si existe *P'*. ¿Es *h* una función biyectiva?

3. ¿Hay puntos fijos o invariantes en esta función? ¿Cuáles?

4. Considera dos puntos *P* y *Q* diferentes (en principio diferentes a *O*) y halla sus imágenes por *h*. Considera la recta *PQ* y contesta: ¿la imagen de una recta es una recta? ¿Hay algún caso en que una recta y su imagen sean paralelas?

5. Considera un tercer punto *R* diferente a *P* y *Q* y halla la imagen del triángulo *PQR*. El ∆*PQR* y su imagen tienen el mismo sentido?

6. Considera la circunferencia de centro *P* que pasa por *Q*. ¿Su imagen será la circunferencia de centro *P'* que pasa por *Q'*? A dos rectas perpendiculares, ¿le corresponden rectas perpendiculares?

7. Demuestra que la función *h* es una función biyectiva (puedes recurrir a materiales de clase para revisar definiciones a aplicar)

8. ¿*h* conserva las distancias? ¿Por qué?
Estas tres actividades permitirán un acercamiento a la idea que: hay funciones del plano en el plano que son isometrías y funciones que no lo son.

Actividad 4.
Visualiza el video SIMETRÍAS, de Eduardo Sáenz de Cabezón, disponible en *https://youtu.be/beq1odpZXdg*

Actividad 5.
Definición de simetría axial:
S*e*: π → π tal que
Si *P*∈*e*, *Se*(*P*) = *P*
Si *P*∈*e*, *Se*(*P*) = *P'* ⇔ *e* es la mediatriz del segmento *PP'*

1. Realiza con tu grupo de trabajo, las construcciones necesarias para hallar la imagen de cualquier punto *P* del plano.

2. ¿Es S*e* una isometría? Justifica

3. ¿S*e* mantiene el sentido en el plano?

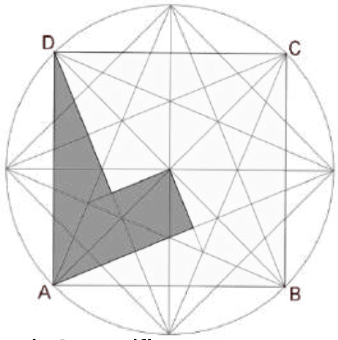
4. Considera una recta *m* no paralela a *e*. Halla *m'* = S*e*(*m*). ¿Qué puedes decir de *e* acerca de *m* y *m´*?

5. Sea ahora una recta *n*, paralela a *e*. ¿Cómo es la imagen de *n* en S*e*? Justifica.

6. Sea una recta *r* perpendicular a *e*. Sin recurrir a una figura dinámica: ¿cuál es la imagen de *r*? ¿Son fijos en S*e* los puntos de *r*? ¿Es *r* invariante?

7. Si S*e*(*P*) = *P'*, halla S*e*(*P'*). ¿Cuál es la transformación inversa de S*e*?

Actividad 6.
Basado en ideas de (Mora, 2019)



ABCD es un cuadrado, del cual se ha obtenido el polígono sombreado que aparece en la figura de la derecha, que le llamaremos semiflecha

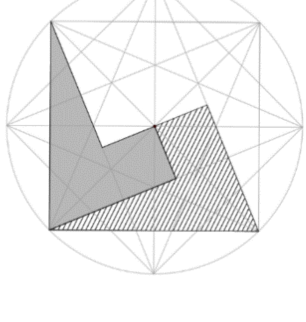
Realiza la construcción de una semiflecha con tu software de GD.

¿Qué fracción del área del cuadrado representa el polígono sombreado? Justifica.

¿Es posible mediante simetrías axiales de la semiflecha teselar el plano? Justifica.
Realiza, si es posible, esa teselación con tu software de GD.

Elije otra figura en el cuadrado ABCD que represente la misma fracción del cuadrado que la semiflecha y analiza la posibilidad de realizar una teselación del plano recurriendo exclusivamente a simetrías axiales.

Actividad 7.
Basado en ideas de (Mora, 2019) (Esta actividad constituirá el "hilo conductor" del resto de trabajo para presentar las siguientes isometrías como composición de simetrías axiales.)



Realiza la composición de dos simetrías axiales que tengan como ejes algunas de las rectas que se utilizaron en la construcción de la actividad anterior, para transformar la mediaflecha gris, en la sombreada en la figura.

¿Es conmutativa esta composición?

¿Hay algún punto fijo en esta transformación? ¿Se conserva el sentido?

¿Qué ángulo forman entre sí dos puntos correspondientes? ¿Y dos segmentos correspondientes?

¿Qué nombre podría darse a la composición de estas dos simetrías axiales?

¿Es posible teselar el plano a partir de la media flecha y exclusivamente con este tipo de composición de simetrías axiales?

Formalizando y generalizando:
Dadas dos rectas secantes *a* y *b*, llamamos R*ab* a la composición de Sa con S*b* (en ese orden) y lo anotaremos: R*ab* = S*b*º S*a*.
O mejor aún, si $a \cap b = O$, entonces podemos escribir R*O,*α = S*b* º S*a*, siendo $\measuredangle\alpha = 2\widehat{ab}$

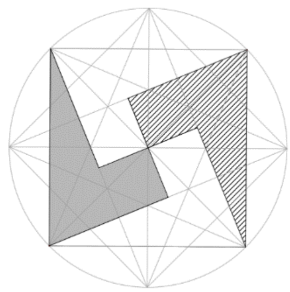
Actividad 8.
1. ¿Es la rotación una isometría? Justifica
2. ¿R*O,*α mantiene el sentido en el plano?

3. ¿Cuál es la inversa de R*O,*α?

4. Considera R*O,*α y una recta semirrecta *Am* que no pasa por O. Halla *A'm'* = R*O,*α(*Am*).

5. Considera la función *g* de la actividad 2. ¿Observas alguna particularidad?

Actividad 9.
Basado en ideas de (Mora, 2019)
Realiza la composición de dos simetrías axiales que tengan como ejes algunas de las rectas que se utilizaron en la construcción de la actividad anterior, para transformar la mediaflecha gris, en la sombreada en la figura.



¿Es conmutativa esta composición?

¿Hay algún punto fijo en esta transformación?

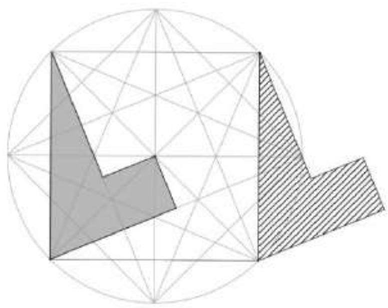
¿Qué ángulo forman entre sí dos puntos correspondientes?

¿Y dos rectas correspondientes?

¿Qué nombre podría darse a la composición de estas dos simetrías axiales?

¿Es posible teselar el plano recurriendo exclusivamente a este tipo de isometrías?

Formalizando y generalizando:
Dadas dos rectas perpendiculares *a* y *b*, llamamos R2 a la composición de Sa con S*b* y lo anotaremos: R2= S*b*º S*a*.
O mejor aún, si $a \cap b = O$, entonces podemos escribir C*O*= S*b* º S*a* y en este caso le llamamos *simetría central* de centro *O*.



Actividad 10.

Basado en ideas de (Mora, 2019)
Realiza la composición de dos simetrías axiales que tengan como ejes algunas de las rectas que se utilizaron en la construcción de la actividad anterior, para transformar la mediaflecha gris, en la sombreada.

¿Es conmutativa esta composición?

¿Hay algún punto fijo en esta transformación?

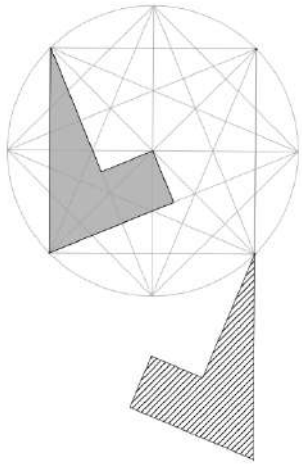
¿Cómo son entre sí dos rectas correspondientes?

¿Qué nombre podría darse a la composición de estas dos simetrías axiales?

¿Es posible teselar el plano recurriendo exclusivamente a este tipo de isometrías partiendo de la mediaflecha gris?

Definimos a continuación traslación y a través de más actividades analizamos sus propiedades, cuidando especialmente en revisar la definición de vector de la traslación

Actividad 11.
Basado en ideas de (Mora, 2019)
¿Es posible hacer la composición de *dos simetrías axiales* que tengan como ejes algunas de las rectas que se utilizaron en la construcción de la actividad anterior, para transformar la mediaflecha gris, en la sombreada?



¿Y con tres simetrías axiales?

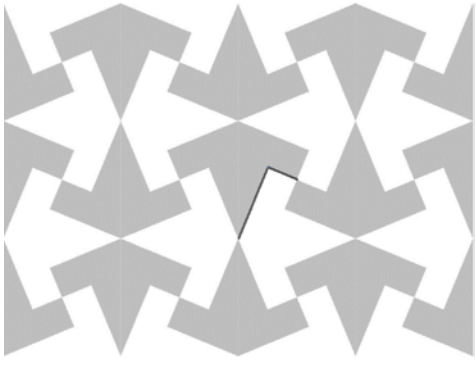
¿Qué particularidades tienen en este caso los tres ejes?

¿Hay algún punto fijo en esta transformación?

¿Mantiene el sentido en el plano?

¿Cuál es la isometría inversa?

Actividad 12.
Basado en ideas de (Mora, 2019)
Consideremos el mosaico de la figura en el que se ha resaltado parte del contorno de una de las figuras que lo componen. Llamemos poligonal a ese sector del contorno



Consideremos, además, las siguientes isometrías:
- Rotación de 180°(Simetría Central o Rotación de orden 2)

- Rotación de 90° (Rotación de orden 4)
- Simetría axial
- Traslación
- Antitraslación

Identifica ejes de simetría, centros de rotación de orden 2 y orden 4, vectores de traslaciones y ejes y vectores de antitraslaciones que permitan construir todos los contornos de las figuras sombreadas transformando la poligonal (sin repetir ninguna de las construcciones). (Este conjunto de isometrías, se conoce como grupo cristalográfico p4g).

Al trabajar con este conjunto de doce actividades, se espera que los futuros profesores puedan apropiarse de los principales conceptos relacionados con el conjunto de las isometrías del plano, mientras transitan en forma ascendente hasta acceder al tercer nivel de Van Hiele, mencionado por (Nasser, 1989) y (Jaime y Gutierrez,1993).

Es esperable que, los futuros profesores (por más que estén en su primer año de formación) alcancen, al menos, el cuarto nivel de van Hiele: deducción formal y, aún el quinto: rigor. Para esto, y en el marco de una propuesta de trabajo de "construcción" del conocimiento geométrico, es que se trabajará con problemas como los siguientes, formalizándolos adecuadamente:

Dados dos puntos A y B, se consideran los puntos M y M' variables de manera que los triángulos AMB y AM'B son rectángulos en M y M'. La recta e es eje de simetría entre M y M'. Demuestra que la recta e pasa por un punto fijo.

ABC es un triángulo isósceles en A e I es el punto medio del segmento BC. M es un punto del segmento AI, $BM \cap AC = \{K\}$ y $CM \cap AB = \{H\}$.
i) Demuestra que H y K son simétricos respecto de la recta AI.
ii) Demuestra que los segmentos CK son iguales

Construye un triángulo ABC, dados b, c y $\angle$(C-B) suponiendo C > B.

(ABC) antihorario isósceles con A = 120º.
i) Hallar el centro O y el ángulo de la rotación en que a la AB le corresponde la CA.
ii) Sean $M \in AB$ y $N \in AC$ de modo que AM = CN. Naturaleza del (MNO).
iii) Halla la imagen (A'B'C') del (ABC) en la rotación de i) y
iv) Demuestra que B, O, C' pertenecen a una misma recta y que BAC' = 90º.

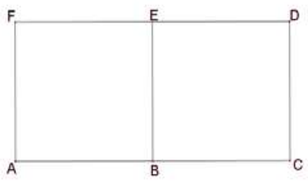
(ABC) antihorario rectángulo en A. $f:\pi \to \pi$ la isometría directa que transforma la semirrecta AB en la CA.
i) Halla P, punto fijo en f.
ii) Una circunferencia variable que pasa por A y P corta a AB en D y a AC en E. Demuestra que, si O es el centro de la circunferencia, se cumple que $PO \perp DE$.
iii) $S_{DE} : \pi \to \pi$ / S_{DE} (P) = P'. Halla el lugar geométrico de P' al variar O.
iv) $f : \pi \to \pi$ / f (P') = P''. Halla el lugar geométrico de P''.

Construye un triángulo AEF equilátero inscripto en un cuadrado ABCD, con $E \in BC$ y $F \in DC$.

Sea ABC un triángulo cualquiera y un P un punto interior. B' = S_{AC}(P), C' = S_{AB}(P) y Ω es la circunferencia determinada por A, B' y C'. Sea S un punto cualquiera de Ω, S' = S_{AB}(S) y S'' = S_{AC}(S). Demuestra que P, S y S´ están en la misma recta.

Sea (ABC) con AB fijo y ACB agudo constante. H el ortocentro de (ABC), D el punto diametralmente opuesto de C en la circunferencia circunscripta de centro O y M el punto medio de AB.
i) Prueba que si (ABC) no es rectángulo se cumple que:
(a) AH // DB, (b) (ADBH) es paralelogramo, (c) D, M, H pertenecen a la misma recta.
Distingue según (ABC) acutángulo u obtusángulo.
ii) Prueba que CH = 2OM. Distingue según (ABC) acutángulo, rectángulo u obtusángulo.
iii) Determina el lugar geométrico de H al variar C.

(ABEF) y (BCDE) cuadrados como en la figura.
Halla una expresión canónica de cada una de las isometrías que se indican:
i) $f: \pi \rightarrow \pi \;/\; S_{BE} \circ f \circ S_{AB} = S_{AE}$
ii) $g: \pi \rightarrow \pi \;/\; S_{BE} \circ g = S_{AB} \circ S_{AE}$
iii) $h: \pi \rightarrow \pi \;/\; h \circ C_{E} = S_{BD}$
iv) $j: \pi \rightarrow \pi \;/\; S_{FE} \circ j \circ R_{B,+90°} = I$
v) $k: \pi \rightarrow \pi \;/\; k \circ T_{2FA} = S_{EC}$



(ABCD) cuadrado de lado *a*. $At_{AC,\,AC} : \pi \rightarrow \pi \;/\; At_{AC,\,AC}(P) = P'$.
Determina el lugar geométrico de P para que dist(P, P') = $\frac{a\sqrt{10}}{2}$.
La evaluación, se hará en dos "etapas": una tradicional, con la resolución en forma escrita de una lista de problemas en un tiempo dado (estilo prueba) y la segunda, en una exposición oral, de unos 10 a 15 minutos donde el estudiante deberá dar su visión acerca de las isometrías y alguna descripción particular de alguna de ellas, en especial buscando conexiones con la vida diaria, y con otros campos del saber científico y el arte. Esta segunda parte podrá ser realizada por medios audiovisuales: video, presentación, serie de gifs animados, etc. o en el formato tradicional.
Para esta última etapa, se brindarán al estudiante materiales (libros, artículos, guía de sitios web, etc.) con los cuales elaborar su trabajo.

Líneas de investigación
¿Puede el profesor ser investigador?

La opinión personal se confirma ante estudios que reportan y teorizan con esta posibilidad del docente y la consideran indispensable. La actividad de investigación del docente se puede ajustar fuertemente a una visión de la investigación-acción relacionada con una práctica reflexiva crítica (Jaworski, 1998) y (Adler, 1997). En ese marco, pensamos que hay al menos dos líneas de investigación posibles (y necesarias):

La primera: es más general, por más que puede realizarse a partir de esta propuesta.

Como docente de cursos de geometría en el primer año de la formación de profesores de matemática en el Uruguay, tengo una percepción sobre que los estudiantes –en general- no acceden más que a los dos primeros niveles de Van Hiele en su proceso de aprendizaje geométrico previo.
Es esperable que, luego de culminar un curso, al menos en algunas temáticas accedan al nivel 4 y al 5.

Admitiendo la validez del modelo Van Hiele, ampliamente aceptado en la comunidad internacional desde hace 50 años, habiéndose profundizado y aún reformulado en algunos aspectos conceptuales y filosóficos (Papademetri-Kachrimani, 2012), se hace necesaria una investigación para reconocer la realidad de nuestro país al respecto.

Ahora bien, en varias investigaciones realizadas en estudiantes de profesorado (Knight, 2006) o en profesores en servicio (Robichaux-Davi y Guarino, 2016) se reporta en ellos la insuficiencia de razonamiento geométrico en niveles superiores al tercero y destacándose la necesidad de identificar el nivel con el que se encuentran para poder superarlo. Asi, Gutiérrez y Jaime (1999) reporta investigaciones realizadas en años anteriores a maestros de educación primaria en varias regiones donde la mayoría de los docentes no acceden al tercer nivel y concluyen: “It seems that weak mathematical knowledge and reasoning skills of preservice primary teachers are independent of countries, educational systems, and techniques of assessment.” (Gutiérrez y Jaime, 1999)
Otros investigadores, reportan que no es posible que un estudiante de secundaria acceda al nivel 4 al final de su escolaridad, si sus profesores no llegan a ese nivel en su etapa de formación (Watan y Sugiman, 2018).
Lo interesante es que, ni en Uruguay ni en la región hay reportes sobre este aspecto, por más que ya en (Yazdani, 2007) se afirma y sugiere que

> La naturaleza jerárquica del modelo de Van Hiele tiene implicaciones significativas para la enseñanza de la geometría. Sugerimos que los educadores responsables de la enseñanza de la geometría y los profesionales a cargo de los programas de capacitación docente incorporen los principios en los que se basa el modelo de Van Hiele en el diseño educativo y curricular.(Traducción propia).

Parece necesaria alguna investigación en nuestro país al respecto y considerando, además, la existencia de los EGD, del estilo de la que reporta (Choik-Koh, 2000)

La Segunda: más específica respecto al tema de esta propuesta o proyecto, estaría enfocada en cuál es la concepción (o concepciones) que nuestros futuros docentes tienen sobre las isometrías.
Una pregunta de investigación, más precisa, sería ¿Qué concepto manejan los futuros docentes acerca de las isometrías, previo a su ingreso al curso de geometría?, y lógicamente, surge la misma pregunta a posteriori de cursar geometría en su primer curso.

Hay algunas investigaciones al respecto que pueden tomarse como inicio. Por ejemplo Thaqiet et al. (2016), o también Harper (2003) que indagan sobre los cambios que se producen en el conocimiento de los futuros docentes con respecto a las transformaciones geométricas durante o después de la instrucción en un EGD.

En algunos países se está avanzando en este aspecto, como se reporta en Gomes (2011) acerca de la situación en Portugal. O Portnoyet et al. (2006) que reporta, en este caso en USA, que los estudiantes no logran abstraer las propiedades de las isometrías y entonces no es posible luego dar un paso adecuado en el avance hacia cursos superiores.

Es, por tanto, necesaria y posible una línea de investigación sobre las concepciones de los futuros docentes sobre el tema.

Referencias

Abella, A. y Pereyra, A. (2011). Grupos Ornamentales. Subgrupos discretos de las isometrías del plano. En J. Rodríguez Hertz, A. Treibich y J. Vieitez (eds.), *Tercer Coloquio Uruguayo de Matemáticas*, pp. 1-28. Montevideo: Udelar. Obtenido dehttp://pmu.uy/pmu13/pmu13.pdf.

Adler, J. (1997). Professionalism in Process: mathematics teacher as researcher from a South African perspective Educational Action Research, 5, (1) 1997, 87-103

Carrión, M. (2012). Subgrupos discretos de las isometrías del plano. En M. Dalcín y V. Molfino (eds.), *Actas de la conferencia Latinoamericana de Geogebra*, pp. 485-492. Montevideo. Obtenido de http://www.geogebra.org.uy/2012/actas/actas.pdf

Choi-Kho, S. (2000). The Activities Based on van Hiele Model Using Computer as a Tool, Journal of the Korea Society of Mathematical Education Series D: Research in Mathematical Education 4, (2), November 2000, 63–77

Dalcín, M. y Molfino, V. (2009). Actividades para pensar la geometría euclidiana. Fichas de clase. Montevideo.

Darvas, G. (2007). Symmetry: cultural-historical and ontological aspects of scienc-arts and relations: The natural and man-made world in an interdisciplinary approach (1st ed.). Suiza: Birkhauser.

De Villiers, M. (2004). Using dynamic geometry to expand mathematics teachers' understanding of proof. *International Journal Of Mathematical Education In Science And Technology*, 25(5), pp. 703-724.

Donevska-Todorova, A. y Melih Turgut, M. (2017). Looking at compositions of reflections in a DGE from thinking modes and semiotic perspectives. In: ICTMT 13. [online] Lyon, Francia: Gilles Aldon y Jana Trgalová, pp. 96-102.

Eves, H. (1997). *Estudio de las geometrías (I)* (1st ed.). México: Limusa.

Gomes, A. (2011). Portuguese pre-service elementary teachers' knowledge of geometric transformations: an exploratory study. En C. Smith (Ed.), *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, 31(3), pp. 59-64.

Gutiérrez, A. y Jaime, A. (1999). Preservice primary teachers' understanding of the Concept of altitude of a triangle. *Journal of Mathematics Teacher Education* 2, pp. 253–275.

Harper, J. (2003). Enhancing elementary pre-service teachers' knowledge of geometric transformations through the use of dynamic geometry computer software. In C. Crawford et al. (Eds.), *Proceedings of Society for Information Technology & Teacher Education International Conference 2003,* pp. 2909-2916. Chesapeake.

Jaworski, B. (1998). Mathematics teacher research: process, practice and the development of teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education,* 1, pp. 3–31.

Knight, K. (2006). An Investigation into the Change in the Van Hiele Levels of Understanding Geometry of Pre-service Elementary and Secondary Mathematics Teachers. Electronic

Theses and Dissertations, 1361. Disponible en https://digitalcommons.library.umaine.edu/etd/1361

Jaeger, F. (1920). *Lectures on the principle of symmetry and its applications in all natural sciences* (2nd ed.). Amsterdam: Publishing Company Elsevier.

Jaime, A. y Gutiérrez, A. (1991). El modelo de razonamiento de Van Heile como marco para el aprendizaje comprensivo de la Geometría. Un ejemplo: Los Giros. *Educación matemática*, 3(2), pp. 49-65

Jaime, A. y Gutiérrez, A. (1993). Aportaciones a la interpretación y aplicación del Modelo Van-Hiele: la enseñanza de las isometrías del plano. La Evaluación del nivel de razonamiento (Doctorado). Universitat de Valencia, España.

Journal of Symmetry (2019). Obtenido de http://journal-scs.symmetry.hu/aims-and-scope/

Nasser, L. (1989). Children's understanding of congruence according to the Van Hiele model of thinking. *Proceedings of the Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education with the North American Chapter 12th PME-NA Conference* (14th, Mexico, July 15-20, 1990), Vol. 2, pp. 297-302.

Mora, J. (2019). La Alhambra con regla, compás y GeoGebra. Obtenido de https://www.geogebra.org/m/accseyfs

Papademetri-Kachrimani, C. (2012) Revisiting Van-Heile. *For the Learning of Mathematics,* 32, pp. 2-7 (November), FLM Publishing Association, Fredericton, New Brunswick, Canada.

Portnoy, N., Grundmeier, T. y Graham, K. (2006). Students' understanding of mathematical objects in the context of transformational geometry: Implications for constructing and understanding proofs. *Journal of Mathematical Behavior*, 25, pp. 196–207.

Puig Adam, P. (1986). *Curso de Geometría Métrica* (16th ed.). Madrid: Euler Editorial.

Robichaux-Davis, R. y Guarino, A. (2016). Assessing Elementary Pre-service Teachers' Knowledge for Teaching Geometry, *International Journal of Mathematics and Statistics Invention (IJMSI)*, 3(1), pp. 12-20.

Thaqi, X., Giménez, J. y Aljimi, E. (2016). The meaning of isometries as function of a set of points and the process of understanding of geometric transformation. *Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, Feb 2015, Prague, pp. 591-597.

Watan, S. y Sugiman, K. (2018). Exploring the relationship between teachers' instructional and students' geometrical thinking levels based on van Hiele theory. *Journal of Physics*, 1097. doi:10.1088/1742-6596/1097/1/012122

Weyl, H. (1952). *Symmetry* (1st ed.). New Jersey: Princeton University Press.

Winter, H. (2019). Fundamentale Ideen-Prof. H. Winter. Obtenido de http://www.schulabakus.de/Wechselspiele/winter-ideen.html

Yazdani, M. (2007) Correlation between Students' level of Understanding Geometry According to the van Hieles' Model and Students' Achievement in Plane Geometry, *Journal of Mathematical Sciences & Mathematical Education*, 2 (1).

Isometrías

Mario Dalcín

a) Aspectos didácticos

a.1) Aspectos didácticos referidos a la enseñanza de la matemática en la formación de formadores

¿Qué se pretende de la enseñanza de la matemática en enseñanza media? De las respuestas que se den a esta pregunta dependerá el cómo hacerlo, y también el cómo formar al profesor para dicha tarea. El colectivo docente Grupo Cero (Valencia) plantea

> desplazar de la materia al alumno el centro de gravedad de la enseñanza de la matemática… más que el conocimiento específico de determinados conceptos y técnicas matemáticas, lo que puede servirle al estudiante son capacidades básicas que se consolidan mediante la actividad matemática como generalizar, particularizar, abstraer, hacer hipótesis y someterlas a prueba, distinguir entre conjetura y demostración, usar la analogía como método sistemático de razonamiento, expresarse con precisión, comunicar con claridad las propias ideas… hacer de la experiencia educativa un proceso creador tanto para el estudiante como para el profesor. (Grupo Cero, 1987, pp. 15-16)

En el mismo sentido se expresan el NCTM (National Council of Teachers of Mathematics) de Estados Unidos y Canadá, y la Inspección de Matemática del CES (2017) de nuestro país.
"Los profesores tienen la tendencia a enseñar tal como ellos fueron enseñados" (Santaló, 1993, p. 13), que suele ser en el *modelo normativo*, centrado en el contenido –ya acabado- que es comunicado por el profesor al estudiante (Charnay, 2002). Recomendaciones en un sentido radicalmente distinto hacen la NCTM "los futuros profesores de matemática deben ser enseñados en forma parecida a como ellos habrán de enseñar –explorando, elaborando conjeturas, comunicándose, razonando, y todo lo demás" (1991, p. 259), y Santaló expresa:

> parecería muy conveniente no dejar el aprendizaje de la metodología para los cursos de didáctica especial, sino en todas las materias de su carera se debería aplicar la metodología que después los futuros profesores deberán aplicar en el ejercicio de su profesión. (1993, p. 13)

Para formar un profesor de matemática de enseñanza media que pueda llevar adelante su tarea acorde a lo que se espera de ella, considero que la relación más fructífera entre el saber a enseñar, el que aprende y el que enseña, se da en el *modelo aproximativo*, centrado en la construcción del saber por el estudiante (Charnay, 2002). Esto implica por parte del profesor (de formación docente) una selección del saber a enseñar y el diseño de situaciones problema a plantear a los estudiantes (de profesorado) para que estos propongan soluciones poniendo en juego los conocimientos que tienen, las confronten con las de sus compañeros, argumenten y finalmente lleguen a acuerdos, siendo el profesor garante de que este proceso pueda darse. Esta construcción del saber se da mediante un proceso individual de desequilibración y reequilibración (Piaget) y un proceso relacional de intercambio con el grupo que posibilita el desarrollo intelectual que es internalizado luego como competencia privada (Vygotski).
Poner en práctica el modelo aproximativo implica también tener en cuenta las formas de pensar la matemática de los propios estudiantes. Sowder y Harel (1998) introducen el

concepto de *esquema de argumentación* (proof scheme) de una persona como "lo que constituye el autoconvencimiento y la persuasión para esa persona" (p. 670). Distinguen esquemas de argumentación externos (tanto lo que convence al estudiante como lo que el estudiante puede ofrecer para persuadir a otros, tiene una procedencia exterior), empíricos (las justificaciones son hechas solo en base a ejemplos) y analíticos (la justificación está basada en deducciones lógicas). Gran parte de los estudiantes que ingresan hoy a Magisterio, al Profesorado de Matemática o a iniciar su formación como Maestros Técnicos, tienen esquemas de argumentación externos (basados en la autoridad del profesor, del libro o un compañero, o en la forma en que aparece escrito un argumento) y la enseñanza propuesta debería contribuir a transformarlos en estudiantes con esquemas de argumentación empíricos y analíticos.

Lo expresado antes, si bien hace referencia a la formación de Profesores de Matemática de Enseñanza Media, también lo considero válido para la enseñanza de cualquier contenido matemático en Magisterio o Maestro Técnico.

a.2) Relevancia del tema isometrías para la enseñanza en la formación de formadores, incluidas estrategias y evaluación

En la presentación de las isometrías que sigue estas son definidas como funciones -un concepto que atraviesa toda la matemática-, pudiendo ser su domino y codominio la recta, el plano o el espacio. En cualquiera de los casos cada función es definida explicitando cómo hallar la imagen de un punto genérico (definiciones 1). Esto posibilita concebir a las isometrías como un tipo particular de funciones que vincula cada punto con su imagen, de forma análoga a como las funciones de los reales en los reales vinculan un número y su imagen mediante una expresión algebraica. Considero que esta manera de definir las isometrías es preferible a la que propone Puig Adam (1976, pp. 24-25) al tratar los movimientos del plano axiomatizándolos como transformaciones puntuales biunívocas (1), que conservan las relaciones de incidencia y orden (2), que ningún movimiento puede transformar un segmento o ángulo en una parte del mismo (3), que forman grupo (4, 5), que "existe un movimiento y solo uno que transforma una semirrecta en otra y un determinado semiplano limitado por la recta primera en un determinado semiplano limitado por la segunda." (6) El axioma 6 lleva a definir cada isometría particular en base a dos pares ordenados de semirrecta y semiplano de borde la recta que contiene la semirrecta, y esto dificulta concebir las isometrías como funciones que vinculan cada punto con un punto imagen.

En lo aquí presentado se asumen como axiomas los criterios de congruencia de triángulos (CCT). Esta elección se fundamenta en varios motivos:

i) los estudiantes están familiarizados con los CCT y esto posibilita que recurran a ellos a la hora de elaborar, por sus propios medios, demostraciones para las preguntas anteriores. Esta organización de la geometría euclidiana es la que aparece en Alves y Galvao (1996), Bix (1994), Coxeter (1984), Dodge (1972), Eves (1985), Jaime y Gutiérrez (1996), Lages Lima (1996), Ledergerber-Ruoff (1982), Stahl (2010), Yaglom (1962). En Puig Adam (1976, pp. 24-25) -texto que fue muy influyente en nuestro país- al tratar los movimientos del plano se axiomatiza que existe un único movimiento que transforme una semirrecta y uno de sus semiplanos en otra semirrecta y uno de sus semiplanos (axioma 6), y que los movimientos forman grupo (axiomas 4 y 5), para después demostrar los CCT. Un tratamiento similar en lo referido al axioma de determinación de isometrías aparece en Casella et al. (1989),

Rodríguez (1991), Fernández Val (2000), textos de autores uruguayos que fueron referentes en la formación de profesores en nuestro medio, aunque estos incorporan el axioma métrico (la distancia es una función d: $\pi \times \pi \to R$ que a cada par de puntos le hace corresponder un número real y tiene las siguientes propiedades: i) $d(A,B) \geq 0 \quad \forall A,B \in \pi$, ii) $d(A,B) = d(B,A) \quad \forall A,B \in \pi$, iii) si C pertenece al segmento AB $\to$ $d(A,B) = d(A,C) + d(C,B)$, iv) si C no pertenece al segmento AB $\to$ $d(A,B) < d(A,C) + d(C,B)$, v) $\forall$ recta orientada $r \subset \pi$, $\forall$ $O \in r$, $\forall k \in R^+ \to$ existe un único punto $P \in r$ / O precede a P y $d(O,P) = k$).
ii) posibilita formularse preguntas –y elaborar demostraciones en base a conocimientos que ya tienen los estudiantes- acerca de cuántos puntos y sus imágenes es necesario conocer para determinar una isometría, si las funciones definidas son isometrías, si dos definiciones son equivalentes, acerca de propiedades de cada una de las isometrías, cuántas isometrías existen y si forman grupo;
iii) Asumir los CCT desde un principio también posibilita concebir los cursos de geometría como una unidad teórico-práctica, cosa difícil de conseguir en otros enfoques, como lo dicen Casella et al. (1989, p. 4):

> … el estudiante notará que también ocurre aquí –y en forma más marcada- el desfasaje en el tiempo en los tratamientos teóricos y la resolución de problemas. Esto surge como inevitable en el esquema didáctico propuesto; *tratar de acompasar los cursos teóricos con los prácticos vulneraría fuertemente la comprensión refinada de las ideas que se quieren transmitir* [destacado en el original].

La cita revela una concepción de la enseñanza y del aprendizaje acorde al *modelo normativo* (Charnay, 2002), su preocupación principal está en las ideas matemáticas a enseñar.
¿Hay alguna diferencia en cuanto a los fundamentos y desarrollo de la Geometría en uno u otro enfoque? Ninguna. Se puede construir la geometría plana de ambas maneras. (Klein, 1931, pp. 212-237) Dado que ambos enfoques son coherentes, la elección por el enfoque expuesto es didáctica: posibilita diseñar actividades que al ser propuestas en clase habilitan el conjeturar, argumentar, demostrar por parte de los estudiantes promoviendo de esta manera el desarrollo de esquemas de argumentación empíricos y analíticos, y aprender de una forma similar a como se espera que enseñe cuando sea Maestro, Maestro Técnico o Profesor de Matemática. La relevancia del tema para la enseñanza en la formación de docentes está dada por los procesos matemáticos (definir, conjeturar, argumentar, particularizar, generalizar, establecer analogías) que posibilite involucrar a los estudiantes en formas de trabajo como se explicitaron al inicio de este proyecto.

Compartimos con de Villiers (1998, p. 25) que “el desarrollo de software para la Geometría Dinámica (GD) en años recientes es ciertamente el desarrollo más emocionante en geometría desde Euclides” pero esta ha sido poco incorporada a la enseñanza. Dado que hoy en día existen software de acceso libre como Tess, Geogebra o Geogebra 3D y que Geogebra puede ser usado en el celular, sería deseable que la enseñanza y aprendizaje de las isometrías incluyera su uso. Para ello es necesario diseñar actividades específicas y generar espacios en los cursos para incorporar su uso. ¿Qué estatus tienen las producciones hechas en GD? El desarrollo tecnológico ha incentivado el desarrollo de la

Matemática Educativa. Es así que Houdement y Kuzniak (1999) proponen tres paradigmas para la geometría. Cada uno refleja una problemática diferente a abordar por la comunidad de matemáticos involucrada:

Geometría I (GI). La geometría natural. La fuente de validación es la realidad, el mundo sensible. Hay una cierta confusión entre el modelo y la realidad. La deducción se hace centralmente mediante la percepción y el uso de instrumentos.

Geometría II (GII). La geometría axiomática natural. La fuente de validación se basa sobre lo hipotético deductivo en un sistema axiomático lo más preciso posible. Pero dicho sistema axiomático se mantiene lo más fiel posible a la realidad.

Geometría III (GIII). La geometría axiomática formalista. Se cortan los lazos de la geometría con la realidad. El razonamiento lógico se impone y los axiomas no se basan en lo sensible, en lo real.

Estas tres geometrías nos dan un marco desde el cual dar cuenta de toda la geometría, desde la que trabaja un estudiante al iniciar su formación en la escuela primaria hasta aquella con la que trabaja un matemático. Tradicionalmente se ha concebido la enseñanza de la geometría como un pasaje unidireccional de GI a GII y de GII a GIII. Muchas de las preguntas que se formularán más adelante en este proyecto pueden ser abordadas tanto en el ámbito de la GI como en el ámbito de la GII y estos tratamientos pueden ser alternados y complementarios. Una actividad geométrica puede ser abordada mediante un ir y venir entre GI y GII; así ante la imposibilidad de elaborar una demostración en GII (sucesión de enunciados cada uno de los cuales es, o bien una definición, axioma o teorema, o bien es derivado deductivamente de enunciados previos) es posible que sí se pueda elaborar una demostración en GI (invariante mediante arrastre), o que una conjetura pueda ser descartada en GI, cosa que en GII podría implicar un desafío distinto.

Otro aspecto importante de las isometrías en la formación de un Maestro, Maestro Técnico o Profesor de Matemática, es la de permitir establecer un vínculo entre estos conceptos matemáticos y la realidad, sea esta materia inerte, materia viva o producción cultural, ya sea artística o científica. En el mundo animal son más que excepcionales las especies que no tienen algún tipo de simetría (como el rodaballo o el cangrejo violinista) (Stewart y Golubitsky, 1995; Wagensberg, 2007; Rosenvasser Fehrer, 2009). En la producción cultural el diseño de ornamentos que repiten un motivo está presente en casi la totalidad de culturas desde el neolítico al presente (de Lumey, 2010; Weil, 1990; Wolf y Kuhn, 1959; Artucio Urioste, 2004) Hoy en día, muchísimos logos revelan la presencia de las isometrías en su diseño, por mencionar uno solo: la á del logo de Antel. Vincular las isometrías a un sinfín de objetos inertes, vivos o culturales posibilita una nueva mirada –más compleja y por tanto más rica- sobre objetos cotidianos y hace posible apreciarlos, revalorarlos y disfrutarlos de una manera nueva. Una pequeña muestra de la presencia de la simetría en el cine puede apreciarse en https://www.yorokobu.es/simetria-cine/. Otro aspecto relevante para un docente, ya sea Maestro, Maestro Técnico o Profesor de Matemática, es el de tomar contacto con la cronología y uso de la simetría en la ciencia, y en especial en la matemática (du Sautoy, 2009; Navarro, 2011; Nicole, 1961), y de esa manera tomar conciencia que las ideas matemáticas y científicas han cambiado a lo largo de la historia. (http://www.theophys.kth.se/mathphys/SYM/sym_history.html). Apreciar la presencia de la simetría tanto en el arte como en la ciencia puede contribuir a concebirlas como formas complementarias de conocimiento.

Asumir un modelo de enseñanza implica asumir una forma de evaluación acorde. La evaluación en el modelo normativo suele estar referida solo a los productos de la actividad matemática (axiomas, definiciones, teoremas, demostraciones), suele hacerse al final del desarrollo del tema o del curso y por lo tanto cumple centralmente una función de castigo dado que la situación del estudiante que no supere la evaluación es irreversible en el curso. La evaluación en el modelo aproximativo requiere ser hecha en todo momento del curso, está referida por igual a los productos y a los procesos de actividad matemática (involucrarse individual o colectivamente en elaborar definiciones, formular conjeturas, expresar argumentos, entender argumentos producidos por otros, elaborar pruebas y demostraciones, proponer particularizaciones y generalizaciones, razonar en forma inductiva, analógica y deductiva) y su función principal es reorientar el trabajo de los estudiantes durante el desarrollo del curso. La evaluación en el modelo normativo busca ser objetiva mientras que en el modelo aproximativo incorpora además el componente subjetivo del mutuo conocimiento de estudiante y profesor en el proceso de enseñar y aprender, tanto matemática, como a ser Maestro, Maestro Técnico o Profesor de Matemática.

El desarrollo que se hace a continuación fue pensado para trabajarse con estudiantes que cursan los primeros semestres de su formación inicial. En el caso de Magisterio o de Maestro Técnico, una adaptación -como por ejemplo las que proponen Carrillo y Contreras (2001) o Ruiz López y Ruiz Hidalgo (2011)- es imprescindible, y muchas de las preguntas planteadas considero adecuado abordarlas exclusivamente en el ámbito de la GI. En el caso del Profesorado de Matemática se promoverá el trabajo tanto en GI como en GII. En semestres posteriores esta misma temática podría ser trabajada con un sistema de coordenadas -como por ejemplo aparece en Brannan et al. (1995)- posibilitando una visión complementaria de la aquí expuesta.

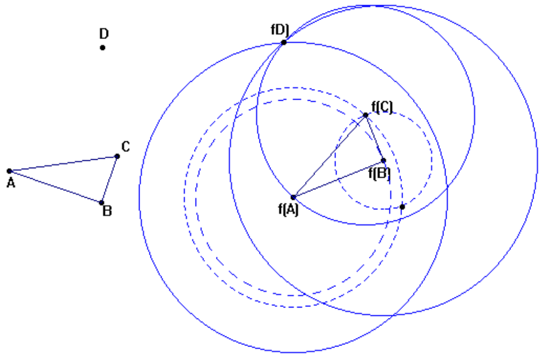
b) Aspectos disciplinarios

b.1) Conceptos o ideas involucrados en el tema isometrías

Dicho desarrollo se hará en base a definiciones y a preguntas. Dada la extensión estipulada para este proyecto, solo algunas preguntas tendrán su respuesta debidamente fundada mediante una demostración, otras –que se indican con un (*)- que sí deben ser respondidas al desarrollar un curso, figuran aquí para indicar la ocasión más conveniente en la que deberían ser planteadas y respondidas.

Isometrías del plano

Una función del plano en el plano es isometría si conserva la distancia.



¿Cuántos puntos y sus respectivas imágenes son necesarios conocer para determinar una isometría del plano?

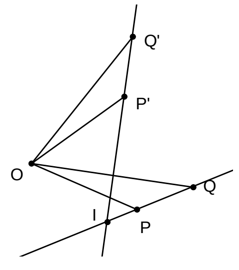
Al hallar las imágenes de A, B, C, D –en ese orden- en la isometría f, f(A) puede ser cualquier punto del plano, f(B) debe pertenecer a la circunferencia de centro f(A) y radio d(A,B), f(C) debe pertenecer a la

intersección de las circunferencias de centro f(A) y radio d(A,C) y de centro f(B) y radio d(B,C).
f(C) tiene solo dos posibilidades. Dependiendo de cuál de los dos posibles f(C) se seleccione, *la isometría f será directa si el sentido de ABC y f(A)f(B)f(C) coincide, indirecta en caso que no*. f (D) debe pertenecer a $C_{f(A), d(D,A)} \cap C_{f(B), d(D,B)}$.
Para el f(C) considerado en la figura la isometría es directa, lo que permite elegir uno de los dos f(D) posibles. En estas condiciones, ¿d(C,D) = d(f(C),f(D)? Para ver que sí:
Los triángulos ABD y f(A)f(B)f(D) son congruentes (CCT1) $\rightarrow$ d(B,D) = d(f(B),f(D))
Los triángulos ABC y f(A)f(B)f(C) son congruentes (CCT3) $\rightarrow$ d(B,C) = d(f(B),f(C))
De la congruencia de las parejas de triángulos anteriores se deduce que los ángulos DBC = ABC – ABD y f(D)f(B)f(C) = f(A)f(B)f(C) - f(A)f(B)f(D) son congruentes $\rightarrow$ los triángulos DBC y f(D)f(B)f(C) son congruentes (CCT1) $\rightarrow$ d(D,C) = d(f(D),f(C)).
Lo hecho para el punto D se puede repetir para un punto cualquiera del plano.
Se puede concluir que *si en una isometría del plano se conocen tres puntos no alineados y sus respectivas imágenes, se puede conocer la imagen de cualquier punto del plano.* (Teorema de determinación de isometrías del plano)

Para cada una de las funciones que se definen a seguir se formularán las siguientes preguntas (posibles de plantear a los estudiantes) a continuación de las definiciones 1: ¿es una isometría?, ¿es una isometría directa o indirecta?, ¿existe la isometría inversa?, ¿qué ángulo forman una recta y su imagen en dicha isometría (considerar distintos casos)? Para cada una de las funciones, las preguntas a contestar a continuación de las definiciones 2 son: ¿bajo qué condiciones las definiciones 1 y 2 definen la misma función? En otras palabras, dada la función mediante la definición 2, ¿se puede expresar mediante la definición 1?; dada la función mediante la definición 1, ¿se puede expresar mediante la definición 2?, ¿de cuántas maneras? Como se dijo previamente, solo algunas serán respondidas.

Se llama simetría axial de eje e a la función $S_e : \pi \rightarrow \pi$ / i) si P $\notin$ e, e es mediatriz del segmento PSe(P), ii) si P $\in$ e, entonces P = Se(P).
Para demostrar que esta función conserva la distancia hay que considerar cuatro casos según P y Q i) pertenezcan al eje, ii) uno pertenezca al eje y el otro no, iii) ambos pertenezcan al mismo semiplano de borde el eje, iv) pertenezcan a semiplanos opuestos. Se demuestra usando los CCT.

A partir de las funciones f: $\pi \rightarrow \pi$ y g: $\pi \rightarrow \pi$ se define la función compuesta de g con f como (g o f): $\pi \rightarrow \pi$ / (g o f)(P) = g(f(P))
¿La composición de dos isometrías es una isometría? Si la función f es isometría conserva las distancias y si la función g es isometría también conserva las distancias, por lo que la función (g o f) también conserva las distancias y por lo tanto es isometría.



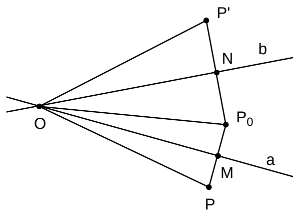
Se llama identidad a la función I: $\pi \rightarrow \pi$ / I(P) = P.
La función compuesta de una simetría axial con ella misma es igual a la función identidad.

Dados un punto O y un ángulo AOB de medida α, se llama rotación de centro O, ángulo α y sentido de A a B (supongamos antihorario) a $R_{O,\,\alpha,\,ah}$: $\pi \to \pi$ / i) $R_{O,\,\alpha,\,ah}$ (O) = O, ii) Si P $\neq$ O y $R_{O,\,\alpha,\,ah}$ (P) = P', se cumple: d(O,P) = d(O,P'), el ángulo POP' mide α y el sentido P a P' es el mismo que de A a B. (antihorario). (Definición 1)

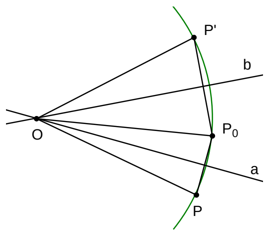
Los triángulos OPQ y OP'Q' son congruentes (CCT1) $\to$ d(P,Q) = d(P',Q') $\to$ $R_{O,\,\alpha,\,ah}$ es isometría

Si las rectas PQ y P'Q' son secantes se cumple que los ángulos IQO e IQ'O son congruentes, por lo que IQQ'O es inscritible, de donde los ángulos QIQ' y QOQ' son congruentes. Así uno de los ángulos que forma una recta y su imagen es congruente al ángulo de rotación.

Se llama rotación de ejes a y b a $R_{a,b}$: $\pi \to \pi$ / $R_{a,b} = S_b$ o S_a con a y b secantes. (Definición 2)



Def. 2 $\to$ Def. 1. Si a y b se cortan en O y $S_a(P) = P_0$ y $S_b(P_0) = P'$ se cumple que d(O,P) = d(O,P') por ser a y b mediatrices de PP_0 y P_0P' respectivamente. Además el ángulo POP' mide el doble de uno de los ángulos formados por a y b debido a la igualdad de los triángulos POM y MOP_0 así como de P_0ON y NOP'.



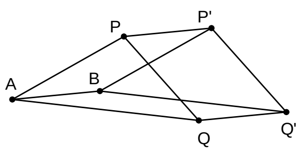
Def. 1 $\to$ Def. 2. Considerando un punto P_0 en la circunferencia de centro O y radio OP se pueden construir los ejes a y b como mediatrices de los segmentos PP_0 y P_0P' respectivamente. a y b pasan por O, uno de los ángulos que forman a y b mide la mitad de POP' y el sentido de a a b, recorriendo el ángulo considerado, coincide con el sentido de P a P'. Al variar P_0 se ve que hay infinitas parejas de ejes a y b.

¿Son iguales las funciones e: $\pi \to \pi$ / e = S_b o S_a y f : $\pi \to \pi$ / f = S_a o S_b?
Además de constatar la no conmutatividad de la composición de isometrías se puede apreciar que el orden en que se compongan las simetrías está vinculado al sentido de la rotación.

Se llama simetría central de centro O a la rotación de centro O y 180° en sentido horario o antihorario (Definición 1) y a la composición de dos simetrías axiales de ejes perpendiculares en O (Definición 2).

(*) ¿Qué posición relativa tienen una recta y su imagen en una simetría central?

Dados dos puntos A y B se llama traslación de vector AB a T_{AB}: $\pi \to \pi$ / si T_{AB} (P) = P', se cumple que ABP'P es paralelogramo (pudiendo ser este degenerado). (Definición 1)



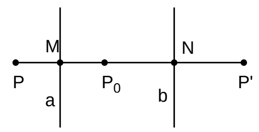
Si T_{AB} (P) = P' el cuadrilátero ABP'P es paralelogramo por lo que AB y PP' son congruentes y paralelos. Si T_{AB} (Q) = Q' el cuadrilátero ABQ'Q es paralelogramo por lo que AB y QQ' son congruentes y paralelos. Los segmentos PP' y QQ' son congruentes y paralelos por lo que PQQ'P' es paralelogramos, de donde d(P,Q) = d(P',Q') $\rightarrow$ T_{AB} es isometría.

.

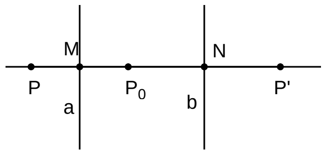
Por ser PQQ'P' paralelogramo las rectas PQ y P'Q' son paralelas.

Se llama traslación de ejes a y b a $T_{a,b}$: $\pi \rightarrow \pi$ / $T_{a,b}$= S_b o S_a con a y b sin puntos en común. (Definición 2)

Def. 2 $\rightarrow$ Def. 1. Si a y b son disjuntos y S_a(P) = P_0 y S_b(P_0) = P' se cumple que PP' es perpendicular a a y b, d(P,P') = d(P,P_0) + d(P_0,P') = 2d(M,P_0) + d(P_0,PN) = d(M,N) = d(a,b), y el sentido de P a P' coincide con el sentido de a a b.



Def. 1 $\rightarrow$ Def. 2. Considerando un punto P_0 en la recta PP' se pueden construir los ejes a y b como mediatrices de los segmentos PP_0 y P_0P' respectivamente. a y b son perpendiculares a PP', la distancia entre a y b es la mitad de la distancia de P a P' y el sentido de a a b coincide con el sentido de P a P'. Al variar P_0 se ve que hay infinitas parejas de ejes a y b.



Dados dos puntos A, B y una recta e paralela a AB, se llama antitraslación de eje e y vector AB a $At_{AB,\ e}$: $\pi \rightarrow \pi$ / $At_{AB,\ e}$ = T_{AB} o S_e. (Definición 1)

Se puede ver que esta composición es conmutativa.

Se llama antitraslación de ejes a, b, c a $At_{a,\ b,\ c}$: $\pi \rightarrow \pi$ / $At_{a\ ,b,\ c}$ = S_c o S_b o S_a con a, b, c ni paralelos ni concurrentes los tres. (Definición 2)

Def. 2 $\rightarrow$ Def. 1

$At_{a\ ,b,\ c}$ = S_c o S_b o S_a con a $\cap$ b = {O}

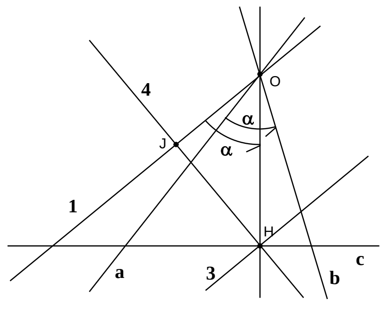
$At_{a\ ,b,\ c}$ = S_e o $R_{O,\ 2\alpha,\ ah}$

$At_{a\ ,b,\ c}$ = S_c o S_2 o S_1 con 2 $\perp$ c, 2 $\cap$ c = {H}

$At_{a\ ,b,\ c}$ = C_H o S_1

$At_{a\ ,b,\ c}$ = S_4 o S_3 o S_1 con 3//1, 4 $\cap$ 1 = {J}

$At_{a\ ,b,\ c}$ = S_{JH} o T_{2JH}



En el caso de dos ejes paralelos y uno secante se puede proceder en forma análoga.

Def. 1 $\rightarrow$ Def. 2

$At_{AB,\ e}$ = T_{AB} o S_e se puede expresar como $At_{AB,\ e}$ = S_c o S_b o S_e con b//c y perpendiculares a e.

¿Cuál es la expresión más simple de la función f: $\pi \rightarrow \pi$ / f = S_c o S_b o S_a con a, b, c paralelos o concurrentes? En el caso de ejes concurrentes, la composición de las dos primeras simetrías axiales es una rotación que se puede expresar mediante otras dos simetrías axiales, una de las cuales se toma como la tercera simetría axial, obteniéndose así una simetría axial. Se puede proceder en forma análoga en el caso de ejes paralelos considerando una traslación como paso intermedio.

Hasta aquí se han definido (definiciones 1) las siguientes funciones del plano: simetría axial, identidad, rotación (y como caso particular la simetría central), traslación y antitraslación, y demostrado que son isometrías.
También se definió inicialmente la simetría axial y luego se consideró la composición de dos simetrías axiales distinguiendo según la posición relativa de sus ejes, obteniendo así la identidad, rotación y traslación (definiciones 2). Luego se consideró la composición de tres simetrías axiales, también distinguiendo según la posición relativa de sus ejes: en dos casos (rectas concurrentes o paralelas) obteniendo una simetría axial, y en los otros dos casos (dos rectas paralelas y una secante, o tres rectas secantes dos a dos) se generó una isometría distinta a las ya definidas que se definió como antitraslación (definición 2).

¿Es posible definir nuevas isometrías?
Sin ser una demostración, se puede fortalecer la intuición de que la respuesta es negativa de esta forma: siguiendo la vía de componer simetrías axiales se puede indagar si es posible definir nuevas isometrías -distintas a las cinco ya mencionadas- si se componen cuatro simetrías axiales. A cada uno de los casos anteriores para tres simetrías habría que agregar una cuarta: i) En los casos de ejes tres rectas concurrentes o paralelas se las podría sustituir por una sola, por lo que al componerla con una cuarta tendríamos la composición de dos simetrías axiales, es decir rotación o traslación. ii) En los otros dos casos restantes se podría considerar las dos primeras por un lado (rotación o traslación) y las dos últimas por otro (rotación o traslación). Las posibilidades que se presentan a componer son: rotación y rotación, rotación y traslación, traslación y rotación, traslación y traslación. Al hallar la expresión canónica de la composición en cada caso se obtiene rotación o traslación. ¿Se definen nuevas isometrías al componer cinco simetrías axiales? Esta situación se puede reducir al caso de componer tres simetrías axiales (que ya fue analizado), ya que habría que agregarle a cada uno de los casos de la situación anterior –que se reducen a la composición de dos simetrías axiales–, una simetría axial más. De forma análoga, el caso de componer seis simetrías axiales es análogo al de la composición de cuatro. Y así sucesivamente. De esta manera se puede fortalecer la intuición de que mediante la composición de simetrías axiales no se obtienen nuevas isometrías.
Se presentan a continuación dos demostraciones posibles.

Primera: Composición mínima de isometrías. (Ledergerber-Ruoff, 1982, pp. 129-132)
Inicialmente se demostró que una isometría del plano está determinada si se conocen tres puntos no alineados y sus respectivas imágenes. Al considerar dos triángulos congruentes ABC y A'B'C' estos pueden tener el mismo sentido o sentidos contrarios. ¿Es posible transformar el primero en el segundo mediante alguna de las cinco isometrías definidas (definiciones 1) o mediante su composición?
En caso de isometría directa se puede componer la traslación de vector AA' con la rotación de centro A' y ángulo el formado por las rectas AB y A'B', cuya expresión canónica será rotación o traslación. En caso de isometría indirecta puede ser la composición de la simetría

de eje mediatriz del segmento AA’ con una rotación, cuya expresión canónica será simetría axial o antitraslación.

Segunda: Composición mínima de simetrías axiales. (Jaime y Gutiérrez, 1996, pp. 38-40; Ledergerber-Ruoff, 1982, pp. 76-78; Stahl, 2010, pp. 216-218)
¿Es posible hallar ejes de simetrías axiales que compuestas transformaran el triángulo ABC en el A’B’C’? ¿Cuál es el menor número de simetrías axiales que compuestas transforman el triángulo ABC en el A’B’C’? Una posible respuesta, en caso de isometría directa, es considerar como primer eje la mediatriz m de AA’ y como segundo eje la mediatriz n de B_0B’, siendo $B_0 = S_m(B)$. Resta demostrar que en la función (S_n o S_m) la imagen de C es C’, cosa que se consigue usando congruencia de triángulos. Según m y n sean secantes o disjuntos tendremos rotación o traslación. En caso de isometría indirecta se puede considerar como eje p = A’C’, al simetrizar A’B’C’ se tiene A’B_1C’ cuyo sentido coincide con el de ABC, por lo que se puede transformar ABC en A’B_1C’ mediante la composición de dos simetrías axiales según lo visto para las isometrías directas. Si a estas dos simetrías las componemos con la de eje p tendremos una antitraslación o simetría axial dependiendo de la posición de los ejes. Se puede concluir con esto que las isometrías del plano son las ya definidas.
Se puede concluir que *las isometrías del plano son cinco (simetría axial, identidad, rotación, traslación, antitraslación) y se pueden expresar como la composición de cómo máximo tres simetrías axiales.*
Respuestas distintas a las anteriores y entre sí pueden verse en Choquet (1964, pp. 73-75), Lages Lima (1996, pp. 24-29) y Puig Adam (1976, p. 48).

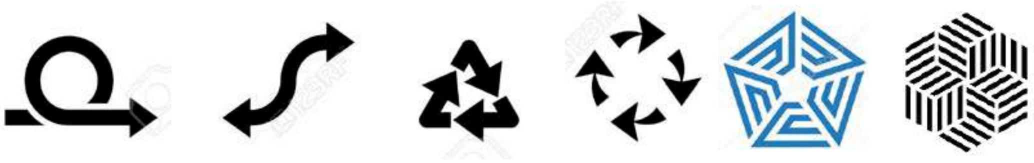
Si G es un conjunto no vacío, se dice que el par (G,) es un grupo si y sólo si * es una ley de composición interna en G, asociativa, con neutro y tal que todo elemento de G admite inverso respecto de *. Si además se cumple la propiedad conmutativa (G,*) se dice grupo conmutativo.*

(*) Cada uno de los siguientes conjuntos, con la composición de funciones ¿es grupo? ¿es grupo conmutativo?: i) simetrías axiales, ii) rotaciones del mismo centro, iii) rotaciones, iv) simetrías centrales, v) traslaciones, vi) antitraslaciones, vii) antitraslaciones de ejes paralelos, vii) rotaciones y traslaciones, viii) isometrías.

Simetría de rosetones, frisos y papeles de pared. Grupo de simetría de una figura. Se puede ampliar la idea de congruencia, axiomatizada para los triángulos en los cuatro criterios de congruencia, a cualquier par de figuras del plano. *Dos figuras F y F’ no vacías son congruentes si existe una isometría f:* $\pi \rightarrow \pi$ */ f(F) = F’.*

Una isometría f: $\pi \rightarrow \pi$ *es una simetría de la figura F si f(F) = F*.

(*) ¿Qué simetrías tiene cada una de las figuras que sigue? Si se considera la composición de simetrías de cada figura, ¿forman grupo?



Al conjunto de simetrías de una figura se le llama grupo de simetría de dicha figura.
Los grupos de simetría de las primeras figuras anteriores son respectivamente $\{Id\}$, $\{R_{O,\ 2\pi/2}$, $R_{O,\ 2.2\pi/2} = Id\}$, $\{R_{O,\ 2\pi/3}, R_{O,\ 2.2\pi/3}, R_{O,\ 3.2\pi/3} = Id\}$, $\{R_{O,\ 2\pi/4}, R_{O,\ 2.2\pi/4}, R_{O,\ 3.2\pi/4}, R_{O,\ 4.2\pi/4} = Id\}$ y se les llama *grupos cíclicos*. Como notación usaremos C_1, C_2, C_3, C_4 respectivamente.
Dado un punto O y un natural n distinto de 0, se puede definir grupo cíclico de orden n como $C_n = \{R_{O,\ k.2\pi/n}$ *con* $k = 1,2, \ldots, n\}$

Se llaman figuras asimétricas a aquellas cuyo grupo de simetría contiene solo la identidad.

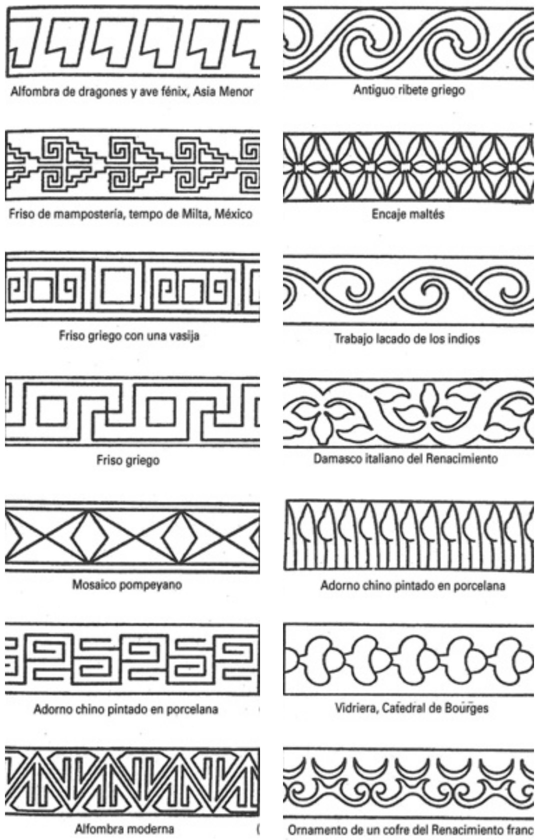
(*) ¿Qué simetrías tiene cada una de las figuras que sigue? Si se considera la composición de simetrías de cada figura, ¿forman grupo?

Los grupos de simetría de las primeras figuras anteriores son respectivamente $\{Id, S_m\}$, $\{R_{O,\ 2\pi/2}, R_{O,\ 2.2\pi/2} = Id, S_m, S_t\} = \{R_{O,\ \pi}, Id, S_m, S_m \circ R_{O,\ 2\pi/2}\}$ con $t \perp m$ por O, $\{R_{O,\ 2\pi/3}, R_{O,\ 2.2\pi/3}, R_{O,\ 3.2\pi/3} = Id, S_m, S_p, S_q\} = \{R_{O,\ 2\pi/3}, R_{O,\ 2.2\pi/3}, Id, S_m, S_m \circ R_{O,\ 2\pi/3}, S_m \circ R_{O,\ 2.2\pi/3}\}$ con p y q pasando por O y formando con m ángulos $2\pi/3$ y $4\pi/3$ respectivamente. Se les llama *grupos diedrales* y como notación usaremos D_1, D_2, D_3 respectivamente.
Dado un punto O, un natural n distinto de 0 y una recta m pasando por O, se puede definir grupo diedral de orden 2n como $D_n = \{R_{O,\ k.2\pi/n}, S_m \circ R_{O,\ k.2\pi/n}$ *con* $k = 1,2, \ldots, n\}$

Dos grupos H y K se dicen isomorfos si existe una función biyectiva $f: H \rightarrow K$ *que verifica* $f(k * k') = f(k) * f(k')$ *para todo k, k' de H.*
Los grupos C_2 y D_1 anteriores son isomorfos como grupos abstractos, pero como grupos de simetría son distintos.
Algunos textos (Jaime y Gutiérrez, 1996; Ruiz y Ruiz, 2011) se refieren a las figuras que tienen grupos de simetría cíclicos o diedrales como *rosetones*, Alves y Galvao (1996, p. 158) llaman *grupos rosetas* a los grupos cíclicos y diedrales, mientras que Abella y Pereyra (2011, pp. 9-11) los llaman *grupos de Leonardo*.

(*) ¿Es posible construir una figura que tenga grupo de simetría finito y no pertenezca a las familias anteriores? Constatar que no es posible es una primera forma de generar convicción de que todo grupo finito de simetría de una figura plana es cíclico o diedral. Demostraciones posibles pueden verse en Costa (2009, pp. 56-58) y Abella y Pereyra (2011, pp. 9-11).

Imaginemos que las figuras al costado (Barrow, 2007, p. 193) se extienden indefinidamente en ambos sentidos a lo largo de las mismas formando una nueva figura que es infinita. Las figuras imaginadas anteriormente se llaman *frisos* y se pueden definir como *figuras (infinitas) cuyo grupo de simetría incluye las traslaciones T_{mv} con m entero y v un vector no nulo.*

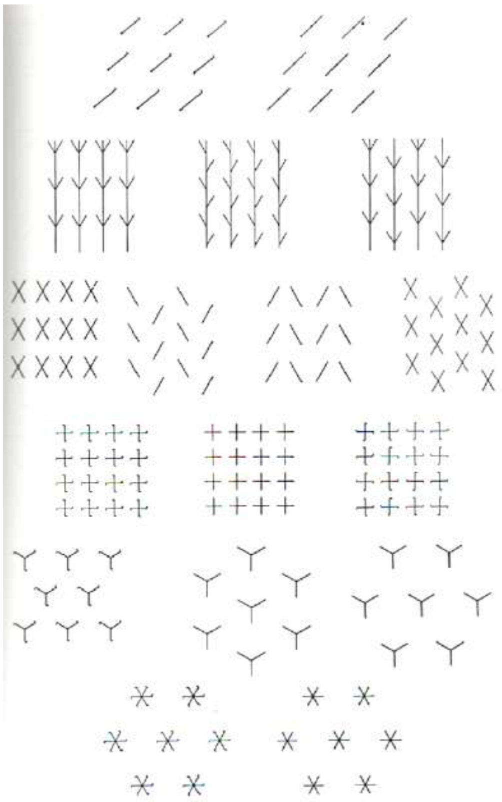


(*) ¿Cada grupo de simetría de los frisos de una columna tiene un grupo de simetría igual en los frisos de la otra columna?

(*) ¿Es posible construir un friso que tenga grupo de simetría distinto a los de los frisos anteriores? Constatar que no es posible es una primera forma de generar convicción de que los grupos de simetría de los frisos son los siete ya identificados.
A continuación se puede orientar una demostración mediante nuevas preguntas: ¿Qué simetrías axiales admite un friso?, ¿qué rotaciones?, ¿qué traslaciones?, ¿qué antitraslaciones? Si un friso tiene simetrías axiales 'verticales', ¿tiene traslaciones? Si un friso tiene traslaciones, ¿tiene simetrías axiales de ejes verticales? ¿Es posible un friso cuyo grupo de simetría tenga solo traslaciones? Si un friso tiene simetrías centrales, ¿tiene simetrías axiales de ejes verticales y horizontal? Si un friso tiene simetrías axiales de ejes verticales y horizontal, ¿tiene simetrías centrales? A partir de las isometrías que transforman un friso en sí mismo se pueden plantear las preguntas: ¿es posible construir un friso con solo i) un tipo, ii) dos tipos, iii) tres tipos, iv) cuatro tipos, v) cinco tipos de isometría? Contestar estas preguntas conduce a quince casos, siete de los cuales ya se vio que es posible construir, por lo que resta explicar por qué los otros casos no son posibles. Demostraciones posibles pueden verse en Costa (2009, pp. 63-70) y Abella y Pereyra (2011, pp. 24-28).

Si pensamos en las posibles repeticiones que puede tener un motivo, no ya a lo largo de una dirección como en los frisos, sino en un plano como en los empapelados (wallpaper en inglés), las posibilidades son mayores. *Los empapelados se puede definir como figuras (infinitas) cuyo grupo de simetría incluye las traslaciones $T_{mv + nw}$ con m, n enteros y v, w vectores no nulos y no paralelos.* Los grupos de simetría de los empapelados –grupos cristalográficos planos- son diecisiete. Fueron clasificados y descritos por Fedorov y Schönflies en forma independiente a fines del siglo XIX. Según Coxeter (1984, p. 78), Fedorov señala que 16 de los 17 grupos habían sido descritos por Jordan en 1869 y el que faltaba fue reconocido por Sohncke en 1874 (pero este no incluyó tres de los ya conocidos). En 1924 fueron identificados nuevamente en forma independiente por Polya y Niggli. Ejemplos de cada uno de ellos, usando recursos mínimos, se ven en la figura que sigue, creada por Speiser (1937) (Gombrich, 1999, p. 69).

(*) Imaginemos que cada una de las diecisiete figuras adyacente se extiende al plano. ¿Qué simetrías admite cada una?



El estudio de los grupos cristalográficos planos es derivado del estudio de los cristales. “En 1890, antes de demostrar el resultado análogo para los tipos de grupos de simetría plana, Fedorov ya había demostrado que existen solo 230 tipos distintos de grupos de simetría espacial”. (Odifreddi, 2006, p. 145) Si bien el interés matemático en los empapelados tiene menos de un siglo y medio, los diseños repetitivos planos fueron usados desde muchísimo antes -“parece que estas pautas eran bien conocidas, y empleadas con fines decorativos, por los antiguos egipcios” (Barrow, 2007, p. 192)- y en las más diversas culturas (32 diseños distintos y con orígenes diversos pueden verse en Barrow (2007, pp. 194-195)).

El caso paradigmático de diseños de empapelados –y al que refiere casi la totalidad de la bibliografía consultada- es la Alhambra en Granada-España donde aparecen diseños correspondientes a los diecisiete grupos (AA. VV, 1995). Los diseños de la Alhambra fueron inspiración de parte de la obra de M. C. Escher (1898-1972), quien diseñó empapelados, como los que aparecen a continuación, para cada uno de los diecisiete grupos de simetría del plano. Estas obras conllevan dificultades extra en su diseño: las figuras mínimas que se repiten -si no tenemos en cuenta el color- son reconocibles como caballo alado, caballito de mar, guerrero a caballo, pez y pez respectivamente y además son teselas del plano. Cada una de estas exigencias por separado es salvable, elaborar un diseño que cumpla ambas condiciones a la vez involucra la maestría del artista.

(*) ¿Qué grupo de simetría tiene cada uno de los empapelados anteriores diseñados por Escher?

Hoy en día la construcción de rosetones, frisos o empapelados puede realizarse en forma inmediata mediante software disponible en internet como ‘Tess’, que indica qué isometrías se usan en cada uno de los diecisiete grupos de empapelados. Requiere un desafío mayor elaborar un empapelados que tenga determinado grupo de simetría seleccionado previamente, ya sea que se haga con lápiz y papel o usando algún software de GD como Geogebra, Cabri-Geométre o Sketchpad. Aún mayor es la dificultad de construir una tesela que sirva para recubrir el plano y que dicho recubrimiento tenga un grupo de simetría dado. Para esto último es necesario tener en cuenta la igualdad de áreas entre la figura que servirá como tesela y la tesela mínima de la celosía que solo podrá tener forma de paralelogramo, rectángulo, rombo, cuadrado, triángulo equilátero o hexágono regular.

Isometrías de la recta
Se pueden particularizar las isometrías del plano y definir isometría en una recta de la misma forma que se definió en el plano, tomando a la recta como dominio y codominio de la función.

¿Cuántos puntos y sus respectivas imágenes son necesarios conocer para determinar una isometría de la recta?
La imagen de un punto A de la recta puede ser cualquier otro punto f(A) de la recta. La imagen f(B) de un punto B, debe cumplir d(f(A),f(B)) = d(A,B) por lo que f(B) tiene dos posibilidades. *Si el sentido de A hacia B es el mismo que de f(A) a f(B) se define dicha isometría como directa, en caso contrario como indirecta*. La imagen de un tercer punto C ya queda determinada.
Se puede concluir que *si en una isometría de la recta se conocen dos puntos y sus respectivas imágenes, se puede conocer la imagen de cualquier punto de la recta*.

¿Es posible definir en la recta una isometría análoga a la simetría axial del plano?
Se llama simetría respecto a un punto O a la función $S_O : r \to r$ / i) si $P \neq O$, O es punto medio del segmento $PS_O(P)$, ii) $O = S_O(O)$.

Dados dos puntos A y B en la recta r, se llama traslación de vector AB a T_{AB}: $r \to r$ / si $T_{AB}(P) = P'$, se cumple que el sentido de P a P' coincide con el de A a B y d(P, P') = d(A,B). (Definición 1)

(*) ¿Se puede definir la traslación como composición de simetrías respecto a puntos? En caso que sí, ¿bajo qué condiciones? (Definición 2)

Se puede concluir que las isometrías de la recta son tres (simetría respecto a un punto, identidad, traslación) y se pueden expresar como la composición de cómo máximo dos simetrías respecto a puntos. (Teorema de determinación de isometrías de la recta) (Lages Lima, 1996, pp. 1-7).

Isometrías del espacio
Se pueden generalizar las isometrías del plano y definir isometría en el espacio de la misma forma que se definió en el plano, tomando el espacio como dominio y codominio de la función.

¿Cuántos puntos y sus respectivas imágenes son necesarios conocer para determinar una isometría del espacio?

La imagen de un punto A puede ser cualquier punto f(A) del espacio. La imagen de un punto B debe estar en la esfera de centro f(A) y radio d(A,B). Elegido f(B), la imagen de un punto C, no alineado con A y B, debe estar en la circunferencia intersección de las esferas de centro f(A) y radio d(A,C) y de centro f(B) y radio d(B,C). Elegido f(C), la imagen de un punto D que no pertenezca al plano A, B, C debe estar en la intersección de las esferas de centro f(A) y radio d(A,D), de centro f(B) y radio d(D,B), de centro f(C) y radio d(D,C). La intersección de estas tres esferas son dos puntos ubicados en semiespacios opuestos respecto al plano A, B, C. Surge así la posibilidad de definir *isometrías directas e indirectas según el sentido de los tetraedros ABCD y f(A)f(B)f(C)f(D) coincida o no*. *El sentido de un tetraedro ABCD se puede definir como derecho o izquierdo según si un tornillo (derecho) se acerque o se aleje de D cuando es girado en el sentido A-B-C-A en una dirección perpendicular al plano A, B, C*. La imagen de un punto E se puede determinar en forma análoga a como se halló f(D), eligiendo de las dos posibilidades según la isometría sea directa o indirecta. En estas condiciones, ¿d(D,E) = d(f(D),f(E)? Para responder esta pregunta surge la necesidad de establecer criterios de congruencia de ángulos triedros y de tetraedros. Se puede concluir que *si en una isometría del espacio se conocen cuatro puntos no coplanares y sus respectivas imágenes, se puede conocer la imagen de cualquier punto del espacio*. (Teorema de determinación de isometrías del espacio)

¿Es posible definir en el espacio una isometría análoga a la simetría axial del plano?
Se llama simetría respecto a un plano π *(o simetría bilateral o simetría especular) a la función* S_π*:* $E \to E$ */ i) si* $P \notin \pi$, π *es plano mediatriz del segmento* $PS_\pi(P)$*, ii) si* $P \in \pi$, *entonces* $P = S_\pi(P)$.

(*) La función definida ¿es una isometría?, ¿es una isometría directa o indirecta?, ¿existe la isometría inversa?
Al considerar dos puntos P, Q y sus imágenes P', Q' se puede considerar el plano determinado por las rectas paralelas PP' y QQ' y usar lo ya demostrado para la simetría axial del plano.

Se llama identidad a la función $I: E \to E$ */* $I(P) = P$.
La función compuesta de una simetría especular con ella misma es igual a la función identidad.

¿Qué isometrías del espacio se pueden definir a partir de la composición de dos simetrías especulares?
Se llama rotación de planos β *y* χ *a* $R_{\beta,\chi}: E \to E$ */* $R_{\beta,\chi} = S_\chi \circ S_\beta$ *con* β *y* χ *secantes.* (Definición 2)
Se llama traslación de planos β *y* χ *a* $T_{\beta,\chi}: E \to E$ */* $T_{\beta,\chi} = S_\chi \circ S_\beta$ *con* β *y* χ *sin puntos en común.* (Definición 2)

¿Son iguales las funciones e: $E \to E$ / e = $S_\chi \circ S_\beta$ y f : $E \to E$ / f = $S_\beta \circ S_\chi$?
Además de constatar la no conmutatividad de la composición de isometrías se puede apreciar que el orden en que se compongan las simetrías está vinculado al sentido de la

rotación en torno a un eje o de la traslación, en forma análoga a como acontecía en las isometrías del plano.

¿Es posible definir cada una de las funciones anteriores indicando cómo hallar la imagen de un punto?
Dados una recta r y un ángulo AOB de medida α cuyo vértice O pertenece a r, cuyos lados OA y OB están en un plano perpendicular a r y el ángulo está orientado (supongamos en sentido antihorario) se llama rotación en torno a la recta r, de ángulo α y en sentido antihorario a $R_{r,\ \alpha,\ ah}: E \rightarrow E$ */ i)* $R_{r,\ \alpha,\ ah}(O) = O$*, ii) Si* $P \neq O$ *y* $R_{r,\ \alpha,\ ah}(P) = P'$*, se cumple: d(O,P) = d(O,P'), el ángulo POP' mide α, el sentido P a P' es el mismo que de A a B y P´ pertenece al plano que pasa por P y es perpendicular a r.* (Definición 1)

La rotación en torno a una recta así definida (Definición 1), ¿es una isometría?
Si $R_{r,\ \alpha,\ ah}(P) = P'$ y $R_{r,\ \alpha,\ ah}(Q) = Q'$, hay que demostrar que d(P,Q) = d(P',Q'). Si Q_0 y Q'_0 son las proyecciones ortogonales de Q y Q' respectivamente sobre el plano P,O,P', se pueden considerar los triángulos rectángulos PQ_0Q y $P'Q'_0Q'$ que tienen sus catetos PQ_0 y $P'Q'_0$ congruentes porque la rotación en torno a la recta r restricta al plano P,O,P' es una rotación de centro O en dicho plano y los otros catetos Q_0Q y Q'_0Q' son congruentes por ser perpendiculares a los planos paralelos P,O,P' y Q,O,Q'.

Se llama media vuelta sobre una recta r a la rotación sobre la recta r y 180° en sentido horario o antihorario (Definición 1) y a la composición de dos simetrías especulares de planos perpendiculares en r (Definición 2).

(*) ¿Qué posición relativa tienen un plano y su imagen en una media vuelta sobre una recta r?

Dados dos puntos A y B se llama traslación de vector AB a $T_{AB}: E \rightarrow E$ */ si* $T_{AB}(P) = P'$*, se cumple que ABP'P es paralelogramo (pudiendo ser este degenerado).* (Definición 1)

¿La traslación así definida (Definición 1) es una isometría? La idea central de demostración hecha para el caso de traslación en el plano sigue siendo válida en el espacio.

(*) ¿Qué posición relativa tienen un plano y su imagen en una traslación?

(*) ¿Bajo qué condiciones las dos definiciones anteriores de rotación en torno a un eje o traslación definen la misma función? En otras palabras, dada una rotación en torno a un eje o una traslación mediante la definición 2, ¿se puede expresar mediante la definición 1?; dada una rotación en torno a un eje o una traslación mediante la definición 1, ¿se puede expresar mediante la definición 2?, ¿de cuántas maneras?
En el caso de la rotación en torno a un eje y considerando un plano perpendicular al eje, se puede transferir la equivalencia entre definición 1 y definición 2 de rotación establecida en el plano, y luego considerar los planos definidos por el eje y las rectas del plano perpendicular a dicho eje. La analogía entre las rotaciones del plano y las rotaciones en torno a un eje del espacio se puede establecer considerando como eje una recta perpendicular al plano de la rotación y los planos que definen la rotación en torno a un eje como los determinados por

dicho eje y cada uno de los ejes que definen la rotación plana. En el caso de la traslación en el espacio y en el plano la analogía se puede establecer considerando planos perpendiculares al vector.

¿Qué isometrías del espacio se pueden definir a partir de la composición de tres simetrías especulares? Las posiciones relativas para tres planos son: i) Tres planos paralelos; ii) Dos planos paralelos y uno secante (caso particular: el plano secante es perpendicular a los planos paralelos); iii) Tres planos cortándose dos a dos en tres rectas paralelas; iv) Tres planos cortándose en una misma recta; v) Tres planos con un único punto en común (caso particular: los planos son perpendiculares dos a dos).
Los casos i) y iv) se pueden reducir a una simetría especular trabajando en un plano perpendicular a los planos paralelos o a la intersección de los tres planos y estableciendo una analogía con la composición de tres simetrías axiales de ejes paralelos o concurrentes del plano.
Los casos ii) y iii), trabajando en un plano perpendicular a las intersecciones de los planos y estableciendo una analogía con la composición de tres simetrías axiales de ejes ni paralelos ni concurrentes del plano, se pueden expresar como la composición de una traslación con una simetría especular de plano paralelo al vector.
El caso v), si se considera el caso particular de los planos perpendiculares dos a dos, se puede expresar como la composición de una rotación (de media vuelta) en torno a un eje con una simetría especular de plano perpendicular al eje de rotación. Se puede establecer la analogía de este caso particular con la simetría central del plano. (*) ¿Es posible expresar de esta manera la composición de tres planos cualquiera con un único punto en común?

Se pueden definir, de una manera distinta a la composición de simetrías especulares, las siguientes isometrías:

Dados una recta r y un plano π perpendicular a r, se llama simetría con respecto al plano π con rotación respecto a r a $SR_{r,\pi}: E \rightarrow E \,/\, SR_{r,\pi} = R_{r,\alpha,ah} \circ S_{\pi}$. (Definición 1)

Dados dos puntos A, B y un plano π paralelo a AB, se llama simetría con respecto al plano π con deslizamiento AB a $ST_{AB,\pi}: E \rightarrow E \,/\, ST_{AB,\pi} = T_{AB} \circ S_{\pi}$. (Definición 1)

¿Se pueden definir nuevas isometrías del espacio a partir de la composición de cuatro simetrías especulares?
Si se considera la composición de las dos primeras simetrías especulares por un lado y la composición de las dos restantes por otro, cada composición puede ser una traslación o una rotación en torno a un eje, según si los planos sean paralelos o secantes. Se dan cuatro composiciones posibles: i) traslación con traslación; ii) traslación con rotación en torno a un eje; iii) rotación en torno a un eje con traslación; iv) rotación en torno a un eje con rotación en torno a un eje.
La situación i) resulta una traslación de vector suma de los vectores de las traslaciones originales. Las situaciones ii) y iii) se pueden expresar como la composición de una traslación con una rotación de eje paralelo al vector de traslación. (Puig Adam, 1976, pp. 268). La situación iv) se puede expresar como traslación o como los casos ii) y iii). (Dodge, 1972, pp. 211-213)

Se pueden definir, de una manera distinta a la composición de simetrías especulares, la siguiente isometría:

Dados una recta r y un vector AB paralelo a r, se llama isometría helicoidal a la función compuesta de una traslación de vector AB con una rotación en torno a la recta r:

$H: E \rightarrow E \,/\, H = T_{AB} \circ R_{r,\, \alpha,\, ah}$

A partir de las demostraciones hechas para las isometrías del plano es posible elaborar demostraciones análogas en el espacio. Se podría concluir así que *las isometrías del espacio son las siete ya definidas y se pueden expresar como la composición de cómo máximo cuatro simetrías especulares.*

b.2) Fundamentación epistemológica de la relevancia disciplinar de las isometrías

¿Qué es la geometría? Una primera respuesta podría ser 'la ciencia que estudia las propiedades de las figuras geométricas', entendiendo por figura geométrica a cualquier conjunto de puntos. Para que esta definición tenga sentido habría que precisar qué se entiende por 'propiedades de las figuras'. Si bien los orígenes de la geometría se pueden remontar a la prehistoria, una respuesta precisa a la pregunta anterior la dio Félix Klein recién en 1872 en el Programa de Erlangen (Klein, 1931, pp. 91-172). En lo desarrollado anteriormente, una propiedad geométrica de una figura es una propiedad que se conserva cuando se transforma dicha figura en otra figura mediante una isometría. Es una propiedad invariante respecto a las isometrías, es decir una propiedad que tienen en común todas las figuras isométricas entre sí.

> En el concepto de Geometría, que es el estudio de las propiedades geométricas, intervienen pues dos nociones fundamentales: la noción de espacio, esto es, el conjunto de todos los puntos, rectas, planos y demás figuras, y la noción de transformación de ese espacio, que hace pasar de una figura F a una figura transformada F′. La geometría estudia las propiedades de las figuras del espacio considerado que son invariantes con respecto a las transformaciones consideradas. (Massera, 1956, pp. 7-8)

Las transformaciones que importan para precisar el concepto de geometría son las que forman grupo. La definición anterior se podría reformular de la siguiente manera: "La geometría es la disciplina que estudia las propiedades de las figuras de cierto espacio que son invariantes ante cierto grupo de transformaciones." (Yaglom, 1973, p. 6) El grupo de transformaciones puede ser, entre otros, el de las isometrías (conservan las distancias entre puntos, el paralelismo, la alineación, la concurrencia de rectas), de las semejanzas (conservan los cocientes de distancias entre puntos, el paralelismo, la alineación, la concurrencia de rectas), de las afinidades (conservan el paralelismo, la alineación, la concurrencia de rectas), de las proyectividades (conservan la alineación de puntos y la concurrencia de rectas). Así, toda propiedad de la geometría de las semejanzas es una propiedad de la geometría de las isometrías, pero no es cierto el recíproco, "hay más propiedades en la geometría de las isometrías que en la geometría de las semejanzas" (Yaglom, 1973, p. 6) ya que la distancia es una propiedad de la geometría de las isometrías pero solo el cociente de distancias es una propiedad en la geometría de las semejanzas. La idea de Klein de asociar un grupo de transformaciones a un espacio permite concebir

diversas geometrías y establecer cierta comparación entre ellas, por ejemplo que "la geometría proyectiva es más básica que la geometría de las isometrías." (Brannan et al., 1995, p. 4)
Las isometrías son importantes no solo para precisar el concepto de geometría, sino que tienen importancia a la hora de resolver problemas, en especial problemas de construcción. Por ejemplo: '¿Existen triángulos equiláteros que tengan los tres vértices sobre los lados de un cuadrado? En caso de que existan, ¿cuántos?' Es posible resolverlo en el ámbito de la Geometría I trabajando en GD, pero no imagino la manera de hacerlo en el ámbito de la Geometría II sin recurrir a una rotación.
A su vez el estudio de las isometrías provee métodos generales que pueden ser aplicados en la solución de problemas geométricos que de otra manera requieren la consideración de diversos casos. (Yaglom, 1968, pp. 11-12) Por ejemplo, el siguiente: 'El triángulo ABC es antihorario con AB fijo y C variable de modo que el ángulo ACB = 60º. N pertenece a la semirrecta CA tal que CN = CB. Hallar el lugar geométrico de N.' Una rotación permite vincular los puntos C y N y así dar una respuesta a la situación. En caso de no considerar la rotación, dar respuesta a la situación implica considerar la unión de dos arcos capaces de diferentes ángulos y en distintos semiplanos respecto a AB.

c) Proyección en líneas de investigación de la enseñanza de las isometrías

Según el modelo van Hiele (Jaime y Gutiérrez, 1996; de Villiers, 1998) el pensamiento geométrico de los estudiantes pasa por cinco niveles y tiene algunas propiedades que lo caracterizan: i) no se puede alterar el orden de adquisición de los niveles de razonamiento, es decir que no se puede alcanzar un nivel de razonamiento sin antes haber superado, de forma ordenada, todos los niveles previos; ii) el tránsito entre los niveles de van Hiele se produce de forma lenta y continua, pudiendo durar varios años en el caso de los niveles 3 y 4; iii) un estudiante puede razonar en niveles distintos al trabajar en distintos temas de geometría, el nivel que alcance dependerá de sus conocimientos y experiencia previa en el tema; iv) cada nivel lleva asociado un tipo de lenguaje para comunicarse y un significado específico del vocabulario matemático. Dos personas que razonan a niveles diferentes no podrán entenderse entre sí.
El tener presente los niveles de razonamiento así como las características generales de la teoría puede ayudar a evitar ciertas prácticas. Cuando un profesor pide 'demostrar' esto tiene significados distintos según el estudiante esté razonando en el nivel 2, 3 o 4. Por lo general el docente pretende que la demostración sea un razonamiento deductivo formal (nivel 4), que el estudiante se adapte a su nivel, cuando, si desea ser entendido, deberá ser él quien se sitúe en el nivel del estudiante y pueda aceptar y entender la respuesta dada en forma de ejemplo (nivel 2) o de razonamiento intuitivo (nivel 3).

> Según la teoría de van Hiele, la principal razón de la falla del currículum tradicional de geometría es que ésta es presentada en un nivel más alto del que los estudiantes están operando, en otras palabras ¡los estudiantes no pueden entender al profesor ni el profesor puede entender por qué ellos no lo pueden entender! (de Villiers, 1998, p.10)

En Jaime y Gutiérrez (1995, 1996) se explicita qué son capaces de hacer los estudiantes, en lo referido a las isometrías, en los distintos niveles de pensamiento geométrico:

Nivel 1. Reconocimiento. Reconocer la característica de isometría (conservación del tamaño y la forma de las figuras) de los movimientos físicos; reconocer los movimientos cuando se ven objetos en acción (por ejemplo: recorrido en línea recta, circular o paso al otro lado del eje); realizar movimientos de figuras con distintos vectores o ejes de simetría; usar propiedades visuales para identificar movimientos (‘colocación igual’ para la traslación, eje de simetría como ‘separador por la mitad’ de dos figuras simétricas).
Nivel 2. Análisis. Considerar los movimientos mediante sus elementos matemáticos; usar de forma explícita los elementos propios de cada movimiento (por ej. módulo, dirección y sentido del vector en la traslación); usar las definiciones en las explicaciones de actividades realizadas; descubrir nuevas propiedades de los movimientos a partir de su verificación en casos concretos; usar notación y vocabulario matemático asociado a cada isometría.
Nivel 3. Deducción informal. Establecer relaciones entre las propiedades de las isometrías y descubrir nuevas propiedades y comprender argumentaciones generales para demostrarlas; comprender y usar la posibilidad de descomposición –de infinitas formas- de rotaciones y traslaciones; enunciar definiciones de las isometrías como conjunto de condiciones necesarias y suficientes; comprender demostraciones hechas por otros; adaptar demostraciones ya conocidas; pasar de un caso concreto a una situación general realizando una demostración basada en argumentos informales.
Nivel 4. Deducción. Razonar formalmente, prescindiendo de todo soporte concreto para demostrar propiedades; comprender y utilizar la estructura algebraica de las isometrías del plano, hacer y comprender demostraciones formales completas, identificar las hipótesis, la tesis y la red de implicaciones lógicas que llevan al resultado.
Nivel 5. Rigor. Posibilidad de trabajar en sistemas axiomáticos distintos del usual de la geometría euclidiana; realizar deducciones abstractas basándose en un sistema de axiomas determinado.
El modelo van Hiele puede servir como marco teórico de una investigación que se proponga determinar los niveles de pensamiento geométrico -en lo referido a las isometrías- de los estudiantes de magisterio, maestro técnico o profesorado a los que se enseñará isometrías. De esta manera los docentes podrán diseñar y proponer actividades de aprendizaje acordes al nivel de pensamiento de cada estudiante, de manera que puedan incorporar las capacidades de dicho nivel, condición imprescindible para empezar a poder pensar en el nivel siguiente. También es necesario investigar cómo afecta el aprendizaje de las isometrías el trabajo en un ambiente de GD. En este sentido, los paradigmas para la geometría (Houdement y Kuzniak, 1999) como los esquemas de argumentación (Sowder y Harel, 1998) se podrían articular con los niveles de van Hiele a la hora de investigar los procesos de pensamiento de los estudiantes cuando resuelven actividades referidas a las isometrías en un ambiente de GD o fuera de él. La GD habilita a proponer nuevas actividades pero también plantea nuevos desafíos, sobre todo referidos a cómo influirá en la forma de pensar de los estudiantes. Si bien la GD facilita el pensamiento en GI, surgen interrogantes sobre ¿de qué manera promover el pensamiento en GII? ¿cómo articular el trabajo en ambos paradigmas?

Bibliografía

Abella, A. y Pereyra, Á. (2011). Grupos ornamentales. Subgrupos discretos de las isometrías del plano. En J. Rodríguez, A. Treibich y J. Vieitez (Eds.), *Publicaciones Matemáticas del Uruguay*, pp. 1-28. Montevideo: IMERL-CMAT, Udelar.

Alves, S. y Galvao, M. E. (1996). *Um estudo geométrico das transformacoes elementares*. Sao Paulo: IME-USP.

Artucio Urioste, A. (2004). *El azulejo en la arquitectura uruguaya. Siglos XIII, XIX y XX*. Montevideo: Linardi y Risso.

AA. VV. (1995). *La Alhambra*. Granada: S. A. E. M. Thales.

Barrow, J. D. (2007). *El Universo como obra de arte*. Barcelona: Crítica.

Bix, R. (1994). *Topics in geometry*. London: Academic Press.

Brannan, D., Esplen, M. y Gray, J. (1995). *Geometry*. Cambridge: Cambridge University Press.

Carrillo, J. y Contreras, L. (2001). Transformaciones geométricas. En E. Castro (Editor), *Didáctica de la matemática en la Educación Primaria*, Capítulo 18, pp. 427-447. Madrid: Síntesis.

Casella, S., Gillespie, R., Louro, R. y Vilaró, R. (1989). *Geometría. Guías I, II y III*. Montevideo: Mano a mano.

Charnay, R. (2002). Aprender (por medio de) la resolución de problemas. En C. Parra e I. Saiz (Comps.), *Didáctica de matemáticas. Aportes y reflexiones*, pp. 51-63. Buenos Aires: Paidós.

Choquet, G. (1964). *L'ensegnement de la géométrie*. Francia: Hermann.

Costa, A. F. (2009). *Una introducción a la simetría*. Madrid: UNED.

Coxeter, H. S. M. (1984). *Fundamentos de geometría*. México: Limusa.

de Lumey, H. (2010). *La gran aventura de los primeros hombres europeos*. Barcelona: Tusquets.

de Villiers, M. (1998). El futuro de la geometría en la escuela secundaria. *La lettre de la Preuve*, marzo-abril. Disponible en http://www.cabri.net/Preuve/Resumes/deVilliers/deVilliers98

Dodge, C. W. (1972). *Euclidean geometry and transformations*. New York: Dover.

du Sautoy, M. (2009). *Simetría: un viaje por los patrones de la naturaleza*. Barcelona: Acantilado.

Eves, H. (1985). *Estudio de las geometrías. Tomo I*. México: Uteha.

Fernández Val, W. (2000). *Geometría métrica. Plano y espacio*. Montevideo: Tradinco.

Gombrich, E. H. (1999). *El sentido del orden. Estudio sobre la psicología de las artes decorativas*. Madrid: Debate.

Grupo Cero (1987). *De 12 a 16. Un proyecto de currículum de matemáticas*. Valencia: Mestral libros.

Houdement, C. y Kuzniak, A. (1999). Geometrie et paradigmas geometriques. *Petit x*, 51, pp. 5-21.

Inspección de Matemática CES (2017). Nuevas miradas a los programas oficiales de Matemática Orientaciones y pautas para los docentes. Disponible en https://www.ces.edu.uy/index.php/pautas-de-inspeccion

Jaime, A. y Gutiérrez, Á. (1995). Guidelines for teaching plane isometries in Secondary School. *The Mathematics Teacher*, 88 (7), pp. 591-597.

Jaime, A. y Gutiérrez, Á. (1996). *El grupo de las isometrías del plano*. Madrid: Síntesis.

Klein, F. (1931). *Matemática elemental desde un punto de vista superior. Vol. II. Geometría*. Madrid: Biblioteca Matemática.

Lages Lima, E. (1996). *Isometrias*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática.

Ledergerber-Ruoff, E. B. (1982). *Isometrias e ornamentos no plano euclidiano*. Sao Paulo: Atual Editora.

Massera, J. L. (1956). *Acerca de las nociones fundamentales de la Geometría Proyectiva*. Montevideo: Instituto de Matemática y Estadística.

Navarro, J. (2011). *Al otro lado del espejo: la simetría en matemáticas*. Madrid: RBA.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (1991). *Estándares curriculares y de evaluación para la educación matemática*. Sevilla: SAEM Thales.

Nicole, J. (1961). *La simetría*. Buenos Aires: Los libros del mirasol.

Odifreddi, P. (2006). *La matemática del siglo XX: de los conjuntos a la complejidad*. Buenos Aires: Katz.

Puig Adam, P. (1976). *Curso de geometría métrica. Tomo I-Fundamentos*. Madrid: Biblioteca matemática.

Rodríguez, E. (1991). *Geometría euclidiana plana. Partes I y II*. Montevideo: DFyPD.

Rosenvasser Fehrer, E. (2009). *Simetría: izquierda y derecha, antes y después, chico y grande en el mundo*. Buenos Aires: Siglo XXI.

Ruiz López, F. y Ruiz Hidalgo, J. (2011). Movimientos geométricos en el plano. En I. Segovia y L. Rico (Coords.), *Matemáticas para maestros de Educación Primaria*, Capítulo 12, pp. 301-327. Madrid: Pirámide.

Santaló, L. (1993). *La geometría en la formación de profesores*. Buenos Aires: Red Olímpica.

Santaló, L. y colaboradores. (1994). *Enfoques. Hacia una didáctica humanista de la matemática*. Buenos Aires: Troquel.

Sowder, L. y Harel, G. (1998). Types of Students' Justifications. *The Mathematics Teacher*, 91(8), pp. 670-675.

Stahl, S. (2010). *Geometry from Euclid to knots*. New York: Dover.

Stewart, I. y Golubitsky, M. (1995). *¿Es Dios un geómetra?* Barcelona: Crítica.

Tess, de Pedagoguery Software. Disponible en http://www.peda.com/download/

Wagensberg, J. (2007). *La rebelión de las formas*. Barcelona: Tusquets.

Weil, H. (1990). *Simetría*. Madrid: McGraw Hill.

Wolf, K. L. y Kuhn, D. (1959). *Forma y simetría*. Buenos Aires: Eudeba.

Yaglom, I. M. (1962, 1968, 1973). *Geometric transformations I, II, III*. New York: Mathematical Association of America.

https://www.yorokobu.es/simetria-cine/.

http://www.theophys.kth.se/mathphys/SYM/sym_history.html

Poliedros

Ana Manrique

a) Introducción

Los poliedros han despertado el interés del ser humano desde la antigüedad. Se han encontrado restos arqueológicos muy antiguos donde se pueden observar figuras poliedrales, posiblemente utilizadas con un fin lúdico como en la actualidad; pero fue la cultura de la Antigua Grecia que consideró a los poliedros como algo digno de ser estudiado. El amplio dominio de ellos y de sus propiedades quedó demostrado en la obra "Elementos" de Euclides (año 300 a.C.).

Sin duda, el tema de los poliedros constituye uno de los contenidos presentes en el discurso matemático actual, de gran vigencia por los aportes que esta teoría ha hecho al arte y a la ciencia. Pese a ello, en los cursos de enseñanza secundaria lo que se aborda parece haber quedado en sus comienzos, sin considerarse la evolución del tema en los siguientes siglos. Incluso en formación de maestros y profesores, Dalcín y Molfino (2017) plantean que, generalmente, se presentan, se detallan algunas de sus propiedades y se reconocen familias particulares.

Si consideramos el modelo de razonamiento geométrico propuesto por Van Hiele (Gutiérrez y Jaime, 1991), el cual propone cinco niveles de entendimiento de la geometría dentro de los cuales el estudiante se mueve en forma secuencial. En el discurso matemático escolar uruguayo, sobre los poliedros, Dalcín y Molfino afirman que se abordan actividades que permiten a los estudiantes transitar los niveles 1 (reconocimiento) y 2 (análisis). Y en algunos casos se abordan actividades de clasificación, lo que podría conducir a una transición al nivel 3 (deducción informal); aunque más que clasificaciones de las familias de poliedros se trata del análisis de familias más conocidas: los regulares, los prismas y las pirámides.

En este proyecto se pretende abordar el tema poliedros presentando una serie de actividades secuenciadas que permita transitar a niveles de razonamiento superior; desde el nivel básico, donde simplemente se observa el espacio sin reconocer las propiedades de las figuras, hasta niveles elevados de razonamiento geométrico, como la deducción formal. Se resalta la demostración matemática como una competencia que un futuro docente debe ir adquiriendo desde el comienzo de su formación.

Consciente de que abordar todos los poliedros es imposible, se seleccionó una familia, los poliedros de Platón. Esta temática permite plantear distintas tareas de exploración y arribo de conjeturas, y puede brindar herramientas para el estudio sistemático de otras familias.

Para afrontar su estudio se plantearon una serie de preguntas que llevaron a la formulación de algunos problemas. Mediante la implementación del método de resolución de problemas planteado por Polya (1965), se pretende involucrar a los futuros docentes en el hacer matemático, en distintos aspectos como: visualizar, explorar, conjeturar y validar.

Específicamente las actividades se centran en: reconocer y visualizar poliedros, identificar cuáles son los poliedros de Platón, analizar las relaciones entre esta familia de poliedros y los poliedros regulares, descubrir algunas de sus propiedades buscando generalidades, explorar maneras de construirlos, conjeturar sobre la cantidad de tipos de esa familia y demostrar algunas propiedades más relevantes. Se utiliza como herramientas el material concreto y el software GeoGebra (El GeoGebra es un programa de geometría dinámica, libre, que permite, entre otras cuestiones, representar figuras geométricas usando diferentes herramientas asociadas a las propiedades que las caracterizan) por el potencial que presenta para las mejoras de los aprendizajes.

Por último, se describe un breve análisis del estado del arte de las líneas actuales de investigación en geometría en ambientes de geometría dinámica, y se esboza una pregunta de investigación sobre la enseñanza de los poliedros para ser estudiada en una población de estudiantes de formación docente.

b) Fundamentación

Se coincide con la afirmación de Itzcovich (2005), de que la enseñanza de la geometría ha venido perdiendo espacio en los distintos niveles de la enseñanza. Tal vez por la dificultad de encontrar problemas que presenten verdaderos desafíos, lo abstracto de los objetos geométricos, su vocabulario y notación específicos, la prioridad que se da al trabajo en otras ramas de la matemática, entre otros. En consecuencia si hay que priorizar contenidos, en general, no son los geométricos.

La cuestión es que, si se sigue en esta línea, así como afirma Itzcovich (2005), se priva a los estudiantes la posibilidad de conocer otra forma de pensar y la oportunidad de experimentar otras formas de razonamiento, que son específicas de este dominio.

Por otro lado, se puede apreciar cómo las figuras y las relaciones geométricas abstractas, en nuestro caso las estructuras poliedrales, están presentes en nuestro entorno. Por lo que desarrollar el pensamiento espacial toma relevancia desde el punto de vista educativo, "es importante controlar las relaciones con el espacio, representar y describir en forma racional el mundo que nos rodea y estudiar los entes geométricos como modelizadores de esa realidad". (Sardella, Berio y Mastucci, 2002, p. 46).

En la introducción se mencionó cómo los poliedros han contribuido con el arte y la ciencia, se retomará brevemente el aporte de los antiguos griegos para el enfoque en este aspecto.

Ellos profundizaron en el estudio de los poliedros regulares, seducidos por sus regularidades y belleza. Al establecer una asociación entre el tetraedro, cubo, octaedro e icosaedro y los elementos fundamentales de los que están compuestos, según sostenían los griegos, los átomos de fuego, tierra, aire y agua, quedaron fascinados. Pero fue el dodecaedro quien los inquietó, ya que se le atribuyó una relación especial con el cosmos. En el libro XIII de los "Elementos" de Euclides (300 a.C.) se detalla la construcción de los cinco poliedros regulares. Y en el Timeo, Platón (400 a.C.) explica, a partir de los mismos, la construcción del universo (Extremiana, Hernández y Rivas, 2001).

Si bien hoy en día estos pensamientos pueden causar asombro, una reflexión más profunda hace pensar en cómo han influido a lo largo de la historia hasta la actualidad. Según Extremiana et al. (2001) estas ideas han dejado tres principios importantes en el desarrollo de la ciencia: unión entre ciencia y belleza, aplicación de reglas matemáticas conocidas a entidades o procesos desconocidos (como la asociación de los poliedros a entidades cósmicas) y la construcción de la complejidad a partir de elementos simples.

La ciencia y la belleza, simbolizada con polígonos y poliedros, se puede apreciar en reconocidas obras de pintura, escultura y arquitectura donde aparece por ejemplo la proporción áurea que genera belleza en los objetos que la contienen.

En cuanto a la asociación de sólidos a entidades cósmicas siguió presente en investigaciones posteriores, como se puede constatar en los trabajos de Kepler, astrónomo del siglo XVII, donde los poliedros regulares lo inspiraron en el estudio del movimiento de los seis planetas conocidos hasta entonces.

Así como Kepler utilizó la ciencia para una mejor comprensión del universo, hoy en día los científicos, siguiendo la pauta marcada por la asociación de poliedros a entidades cósmicas, buscan explicar el universo utilizando modelos, conceptos y teorías previamente desarrolladas en Matemática.

Por último, tanto la materia, los seres vivos o los que son producto de nuestra imaginación, están hechos de piezas elementales básicas que especialmente combinadas producen entes de mayor complejidad. Este proceso puede seguirse en la fabricación industrial, construcción de edificios, así como también en la composición celular de los seres vivos. En ocasiones se aplica al análisis de la estructura del lenguaje y se encuentra en la base del desarrollo actual de la inteligencia artificial.

En estas breves palabras se ha querido mostrar cómo los poliedros están muy próximos a nosotros, en la naturaleza; formando parte de nuestra cultura matemática, siendo una herramienta en la resolución de problemas en pos del avance la ciencia, y también por su belleza y misterio, fuente de inspiración a diseñadores y artistas. Estos objetos matemáticos fascinantes merecen la pena reivindicar su estudio y utilización, siendo un contenido relevante para la enseñanza en la formación docente.

Como todo proyecto educativo debe basarse en una teoría de enseñanza- aprendizaje para su fundamentación; en este trabajo se optará por el Modelo del razonamiento geométrico de Van Hiele. El modelo es una teoría de desarrollo intelectual que surge de la experiencia de sus creadores como docentes de geometría, lo cual lo hace idóneo para este tema.
Se apoya la afirmación de Guillén, Gutiérrez, Jaime y Cáceres (1992) "este es un excelente modelo de representación de los procesos del desarrollo del razonamiento de los estudiantes de matemática" (p. 4), la cual avalan con investigaciones realizadas, por algunos miembros del equipo, centradas en la enseñanza de la geometría tomando como marco de referencia este modelo.
Está presente en las Guías de Matemática de apoyo al docente (Programa MESyFOD-ANEP-CODICEN, 1998), donde sus autores, referentes en la enseñanza de la Matemática, plantean fundamental el aporte de Dina y Pierre Van Hiele (1987) al estudio del desarrollo del pensamiento geométrico, tanto por describir, en forma general, el razonamiento geométrico de los estudiantes así como también por las aplicaciones en el campo didáctico.
En cuanto a la metodología de trabajo se utilizará el método de resolución de problemas planteado por Polya (1989), como estrategia para involucrar al estudiante en el hacer matemático. Ese hacer matemático favorecerá la construcción de conocimientos para resolver problemas en un ambiente donde estos sean la fuente misma del conocimiento, y promoverá el plantear nuevas interrogantes en relación al conocimiento matemático.
Avalando este método podemos citar a Sadovsky (2005), que plantea: "la Matemática avanza a fuerza de resolver problemas" (p. 40), e Itzcovich (2007) que sostiene que hacer matemática implica una actividad intelectual del alumno, que se involucre en el desafío de resolver un problema, que incluya un trabajo exploratorio, la elaboración de conjeturas basadas en propiedades, conceptos y relaciones estudiadas, la formulación de argumentos, sostenerlos y ser capaces de debatir, pero también de escuchar y entender las justificaciones de los otros, reconocer los propios errores y reestructurar sus ideas en pos del avance conceptual.
La demostración es una herramienta central en la construcción de la matemática, plantear actividades donde se proponga la formulación de conjeturas contribuye a que los estudiantes se comprometan en buscar explicación por qué dicha conjetura es válida.
Dalcín (2016) en su investigación sobre el desarrollo del pensamiento deductivo, en geometría plana, resalta la importancia de incluir en el currículo el trabajo en un ambiente de geometría dinámica. Sostiene que utilizar como herramienta un software de geometría dinámica diferenció notoriamente del trabajo con lápiz y papel en la medida que facilitó la evolución de los estudiantes desde la consideración de situaciones especiales a generales. Destacando que, el trabajo en un ambiente de geometría dinámica facilita la construcción de representaciones de los problemas, permitiendo la exploración empírica, donde el estudiante puede ir estableciendo relaciones entre sus observaciones y su inmediata verificación empírica, descartando conjeturas o reformulándolas. Así logra una fuerte seguridad acerca de la veracidad de una conjetura, condición esencial para la búsqueda de una justificación.
Cabe resaltar que la manipulación tanto visual, táctil o manual, constituye la base sobre la que se asientan posteriores abstracciones, la misma caracteriza a la etapa de observación que todo aprendizaje geométrico debe presentar. Por este motivo se revaloriza el uso de material concreto, en virtud de las diferencias individuales que existen en el aula, lo cual hace necesario desplegar un abanico de recursos.
Por último se priorizará el trabajo en pequeños grupos para fomentar el trabajo cooperativo y potenciar la integración social como motor de avance cognitivo.

c) Metodología

Se detalla a continuación en qué consiste el modelo y método elegido para este proyecto.
El Modelo de Van Hiele propone cinco niveles de entendimiento de la geometría dentro de los cuales el estudiante se mueve en forma secuencial desde el nivel básico, hasta niveles elevados de rigor. Los niveles de entendimiento que propone el modelo son los siguientes:

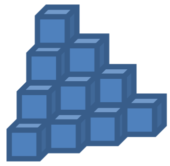
Nivel 1: Reconocimiento. El espacio se reconoce solo como algo que existe alrededor del observador, y los conceptos geométricos se ven como entidades totales más que como teniendo componentes o atributos. Por ejemplo, las figuras geométricas se reconocen como un todo por su apariencia física y no por sus propiedades. En este nivel se es capaz de aprender vocabulario geométrico, identificar formas específicas o reproducir una figura dada.
Nivel 2: Análisis. A través de la observación y la experimentación se comienza a discernir las características de las figuras, y estas propiedades emergentes son usadas luego para conceptualizar clases de formas. Sin embargo, las relaciones entre propiedades no pueden ser explicadas todavía, las interrelaciones entre figuras no son percibidas y –por tanto–las definiciones no son entendidas.
Nivel 3: Clasificación. En este nivel es posible establecer las interrelaciones que existen entre las propiedades dentro de una misma figura, y entre las características de figuras diferentes de una misma clase. Las definiciones adquieren un pleno significado, y se pueden entender y elaborar procesos deductivos informales. Aún no se comprende el significado de la deducción como un todo, ni el rol que tienen los axiomas.
Nivel 4: Deducción. Se comprende la importancia del proceso deductivo dentro de un marco axiomático establecido, y se adquiere la habilidad de elaborar demostraciones, y no solo de memorizarlas.
Nivel 5: Rigor. El nivel de abstracción alcanzado permite el trabajo con sistemas axiomáticos diversos y la comparación entre los mismos. (Notas_Modelo de Van Hiele (como se citó en Programa MESyFOD-ANEP-CODICEN, 1998))
Este último nivel, cuya característica básica es la capacidad para manejar, analizar y comparar diferentes Geometrías, escapa de las posibilidades de este proyecto, por lo que nos concentraremos en transitar los niveles 1, 2, 3 y 4. Con énfasis en el nivel 4 (deducción), por el hecho de que está pensado para un curso de matemática de nivel terciario. Se espera que los estudiantes sean capaces de realizar razonamientos lógicos formales y comprender la estructura axiomática de las Matemáticas.
El método de resolución de problemas planteado por Polya enfatiza en el proceso de descubrimiento. Consiste en aplicar cuatro pasos frente a un problema: entender el mismo, crear un plan, ejecutarlo y evaluar e interpretar el resultado obtenido.
Cabe señalar la diferencia que existe entre un problema y un ejercicio. Un problema es un planteo que posee suficiente complejidad que implique utilizar los conocimientos que el estudiante posee de una manera nueva, debe representar un reto que le provoque una acción cognitiva superior. Por el contario, si se trata de realizar tareas repetitivas en el que el estudiante de antemano sabe qué hacer para obtener la solución, esto es un ejercicio.
Polya apunta al docente como la persona capaz de encontrar el mecanismo para que el estudiante pueda resolver el problema, a través de la formulación de preguntas. La selección de preguntas que se plantean, para cada paso, no deben ser elegidas al azar. Se deben usar para señalar el camino de distintas formas, para ayudar y desarrollar, en el estudiante, la habilidad de resolver problemas.
Se trabajará en pequeños grupos, utilizando como herramientas el material concreto y el programa GeoGebra.

d) Evaluación
La evaluación es un elemento importante en cualquier práctica educativa, en la primera etapa de actividades se pensaron actividades a modo de evaluación diagnóstica para detectar en qué nivel de razonamiento geométrico se encuentran los estudiantes antes de profundizar en el tema.
El método propuesto, de resolución de problemas, fomenta la comunicación entre los estudiantes y con el docente, permitiendo detectar el curso de los pensamientos y evaluar competencias en las cuatro etapas, comprensión del problema, búsqueda de estrategias, implementación y revisión del proceso seguido (validación, generalización, aplicación a otros contextos). Durante el desarrollo del tema se apuntará a una evaluación formativa, para identificar debilidades, reforzar logros o continuar adelante.

Como plantea Sadovsky (2005) “Nos ubicamos en una perspectiva según la cual la matemática es un producto cultural y social” (p. 22) por ese motivo se buscará crear un ambiente de reflexión que promueva la autoevaluación y búsqueda de autonomía, por parte de los estudiantes, en su proceso de aprendizaje.
Como evaluación sumativa se propondrá a los estudiantes investigar y presentar el estudio de otra familia de poliedros.
Con esta propuesta, se podría decir, que hay un primer acercamiento al nivel 5, según Van Hiele, en el sentido de que el nivel de abstracción alcanzado permite el trabajo con sistemas axiomáticos diversos (en este caso otra familia, con otra definición y otras regularidades) y la comparación entre los mismos.

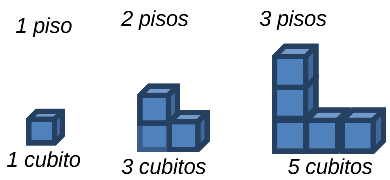
e) Desarrollo del tema Poliedros
e.1) Primera etapa. Actividades
Estas actividades han sido seleccionadas para consolidar en los estudiantes las capacidades de observar, describir, organizar, representar y clasificar figuras del espacio con la intención promover el pasaje a niveles de mayor y sucesiva complejidad de conceptualización geométrica.
Exigen un nivel de razonamiento geométrico de nivel 1, 2 y 3 según el modelo Van Hiele.

Actividad 1. A- La figura es una torre que tiene una altura de 4 cubitos.



a. ¿Cuántos cubitos se utilizaron para realizar esta construcción?
b. Dibuja una vista superior de este modelo.
c. ¿Cuál es la menor cantidad de cubitos que es necesario agregar a la construcción para obtener un cubo?

B- Se desea hacer una torre más simple siguiendo el siguiente modelo:

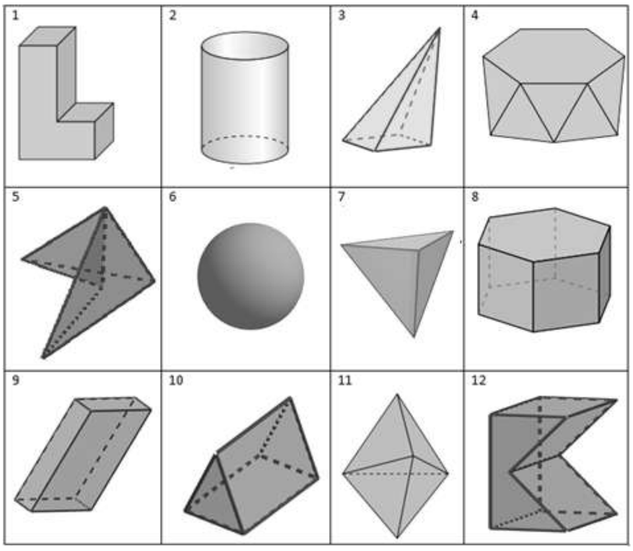


a. ¿Cuántos cubitos son necesarios para construir una torre como está pero de 10 pisos?
b. Busca regularidades y escribe una relación entre el número de pisos y de cubitos.
c. Si la torre se construye con 111 cubitos, ¿cuántos pisos tendrá?

Aportes del problema: Nivel 1 y 2- Reconocimiento y análisis.
- Es una actividad que requiere visualizar y representar una figura tridimensional a partir de su representación en el plano.
- Una posibilidad de involucrar otras competencias tales como: organización para realizar un conteo, búsqueda de regularidades y manejo algebraico.

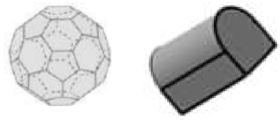
Comentarios:
Las figuras elegidas pueden ser reproducidas con material concreto para explorar y verificar los resultados obtenidos.
Mediante la búsqueda de regularidades se establece una conexión entre la geometría y el álgebra que más adelante se ampliará. Si el nivel del curso lo requiere se pueden plantear otras relaciones que implican un mayor nivel cognitivo para encontrar un patrón, como por ejemplo buscar regularidades entre el número de pisos y la cantidad de cubitos en la primera torre.

Actividad 2.
a. ¿Cuáles de las siguientes figuras representan un poliedro (en el libro *Cuerpos con historia. Poliedros para experimentar. Volumen 2.* (Dalcín, M., & Molfino, V., 2018, p. 19) se pueden encontrar más poliedros para clasificar)? ¿Cuáles de ellos son convexos?
b. Identifica los poliedros de Platón.



c. Se tienen estas dos figuras para clasificar:

13 14



Un estudiante dice que la primera no es un poliedro porque es “redondo” como una pelota de fútbol, y la segunda sí porque tiene caras, vértices y aristas. ¿Tú qué opinas?

d. Sabiendo que las caras de los figuras del espacio 4, 7, 11 y 13 son polígonos regulares. Investiga si son poliedros regulares.

Aportes del problema: Nivel 2 y 3 – Análisis y clasificación.

- Es una actividad que requiere buscar y analizar las definiciones de distintas figuras e interiorizarlas para poder clasificar.

Comentarios:

“*La actividad de clasificar es una de las características esenciales de cualquier rama del pensamiento humano y, en particular, una actividad fundamental en matemática.*” (Guillén, 1997, p. 23).

Si bien la idea no es hacer un estudio exhaustivo de clasificación de los poliedros antes de profundizar en el tema es necesario retomar este contenido. Para su elección se tomó en cuenta posibles errores que pueden aparecer a la hora de clasificar poliedros y que pueden brindar una oportunidad para discutir y aclarar dudas.

e.2) Primera etapa. Marco Teórico

Con el propósito de profundizar en el estudio de la geometría métrica en el espacio se tomarán como válidas los propiedades de incidencia, orden y medida en el plano, exponiendo las propiedades fundamentales de incidencia en el espacio y ampliando el sistema axiomático.

Relaciones de incidencia fundamentales en el espacio

Axioma 1. Existe un conjunto E llamado “*espacio*”, al que pertenecen infinitos elementos llamados “*puntos*”.

Axioma 2. Los puntos del espacio se consideran agrupados en ciertos conjuntos parciales de infinitos puntos llamados “planos” y los de cada plano en otros conjuntos parciales de infinitos puntos llamados “rectas”.

Axioma 3. Tres puntos no alineados determinan un plano.

Orden en el espacio

Axioma 4. Todo plano α establece una clasificación de los puntos del espacio, no contenidos en él, en dos únicas regiones, tales que:

- Todo punto exterior al plano pertenece a una u otra región.
- Dos puntos de la misma región determinan un segmento que no tiene ningún punto en α.
- Dos puntos de la distinta región determinan un segmento que tiene un punto y sólo uno en α.

Definición 1. Se llama *semiespacio* al conjunto formado por los puntos de un plano α y todos los puntos de una de las dos regiones que el plano determina en el espacio.

-$\alpha \cup \mathrm{R}_1 = \mathrm{E}_1$ -$\alpha \cup \mathrm{R}_2 = \mathrm{E}_2$ -E_1 y E_2 son semiespacios opuestos,α es el borde E_1 y E_2

- $\mathrm{E}_1 \cap \mathrm{E}_2 = \alpha$ - $\mathrm{E}_1 \cup \mathrm{E}_2 = \mathrm{E}$

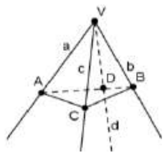
Definición 2. Se dice que una *figura es convexa* si en ella está incluido el segmento determinado por dos puntos cualesquiera de la misma.

Definición 3. Se dice que dos figuras F y F' son congruentes cuando una de ellas puede obtenerse transformando la otra mediante un movimiento.

Definición 4. Dados dos semiplanos α y β con un borde común r, pero situados en planos distintos, llamamos *ángulo diedro convexo* al conjunto de puntos comunes a los semiespacios limitados por los planos α y β, que contienen, respectivamente, los semiplanos β y α.
La recta r se llama arista del diedro y los semiplanos α y β se llaman caras del mismo.

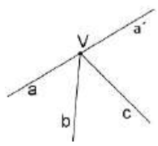
Definición 5. Dadas tres semirrectas a, b, c no coplanarias de origen común O, llamamos ángulo triedro convexo al conjunto de puntos comunes a los semiespacios limitados por los planos $(a,b), (b,c), (c,a)$ y que contiene la semirrecta restante.
Estas semirrectas son las aristas de triedro, los ángulos convexos que cada dos de ellas determinan se llaman caras del triedro y el origen común de todas ellas se llama vértice del triedro.

Propiedad 1. Toda cara de un triedro es menor que la suma de las otras dos. (En un ángulo triedro las caras del ángulo son ángulos, por eso, haciendo abuso del lenguaje se dice "Toda cara" y no "Todo ángulo de una cara".)
Hipótesis: $V\widehat{abc}$ triedro, $\widehat{ab}$ es la mayor de las caras $\Rightarrow$ Tesis: $\widehat{ab} < \widehat{bc} + \widehat{ca}$



Demostración: En la cara $\widehat{ab}$ se traza la semirrecta Vd interior a $\widehat{ab}$ tal que $\widehat{ac} = \widehat{ad}$ (1).Trazo A, B y D tal que $A \in a$, $B \in b$ y $AB \cap Vd = \{D\}$. Trazo $C \in c$ tal que $\overline{VD} = \overline{VC}$ (2).
Por 1, 2 y sabiendo que es VA segmento común $\Rightarrow$ $\overset{\triangle}{ACV} = \overset{\triangle}{ADV}$ $\Rightarrow \overline{AD} = \overline{AC}$
En $\overset{\triangle}{ABC}$ se cumple que: $\overline{AB} < \overline{AC} + \overline{BC} \Rightarrow \overline{AB} - \overline{AC} < \overline{BC} \Rightarrow \overline{DB} < \overline{BC} \Rightarrow \widehat{db} < \widehat{bc} \Rightarrow$
$(\text{sumo } \widehat{ca})$ $\widehat{db} + \widehat{ca} < \widehat{bc} + \widehat{ca} \Rightarrow \widehat{ab} < \widehat{bc} + \widehat{ca}$

Propiedad 2. En todo triedro la suma de sus tres caras es menor que cuatro ángulos rectos.
Hipótesis: $V\widehat{abc}$ triedro, $\widehat{ab}, \widehat{bc}$ y $\widehat{ac}$ son caras $\Rightarrow$ Tesis: $\widehat{ab} + \widehat{bc} + \widehat{ac} < 4R$



Demostración: Sea a' la semirrecta opuesta de a. Como a, b y c no son coplanares $\Rightarrow$ a', b y c no son coplanares $\Rightarrow V\widehat{a'bc}$ triedro
Por propiedad anterior $\widehat{bc} < \widehat{ba'} + \widehat{ca'} (\text{sumo } \widehat{ab} + \widehat{ac}) \Rightarrow \widehat{ab} + \widehat{ac} + \widehat{bc} < \widehat{ab} + \widehat{ac} + \widehat{ba'} + \widehat{ca'} \Rightarrow (\widehat{ab} + \widehat{ba'} = 2R \text{ y } \widehat{ac} + \widehat{ca'} = 2\mathrm{R})\ \widehat{ab} + \widehat{bc} + \widehat{ac} < 2R + 2R \Rightarrow \widehat{ab} + \widehat{bc} + \widehat{ac} < 4R$

Definición 6. Dadas en un orden varias semirrectas de origen común; tales que el plano determinado por cada dos consecutivas deja a las demás en un mismo semiespacio, el conjunto de los puntos comunes a todos estos semiespacios se llama *ángulo poliedro convexo*.

En todo ángulo poliedro convexo se cumplen las propiedades demostradas para las caras de un triedro:

Propiedad 3. En todo ángulo poliedro convexo una cara es menor que la suma de las restantes. (Una posible demostración en el libro: Curso de Geometría Métrica. Fundamentos. (Puig Adam, 1986, p. 273))

Propiedad 4. En todo ángulo poliedro convexo la suma de sus caras es menor que cuatro ángulos rectos. (Una posible demostración en el libro: Curso de Geometría Métrica. Fundamentos. (Puig Adam, 1986, p. 273))

Definición 7. Llamaremos *superficie poliédrica* al conjunto de un número finito de polígonos, llamados caras de la superficie, que cumplan las condiciones siguientes:

1. Cada lado de una cara pertenece también a otra y sólo a otra. Ambas caras se llaman contiguas.
2. Dos caras contiguas están en distinto plano.
   La superficie poliédrica se llama convexa si además se cumple:
3. El plano de cada cara deja en un mismo semiespacio las demás.

Llamaremos entonces *poliedro convexo* al conjunto de los puntos comunes a todos estos semiespacios. Los vértices y lados de las caras se llaman vértice y aristas del poliedro.

Definición 8. Se llama poliedro regular a todo poliedro convexo cuyas caras son polígonos regulares iguales y en cada uno de sus vértices concurre el mismo número de aristas.

Definición 9. Se llama poliedro de Platón a todo poliedro convexo cuyas caras son polígonos, regulares o no, con el mismo número de lados y en cada vértice concurre el mismo número de aristas.

Observación 1. Si consideramos como universo a los poliedros convexos y definimos los siguientes conjuntos:
A= {poliedros convexos cuyas caras tienen el mismo número de lados}
B= {poliedros convexos con caras regulares}
C= {poliedros convexos cuyos vértices concurren el mismo número de aristas}
Utilizando un diagrama de Venn (ver figura 1), tenemos:
Poliedros regulares: A∩B∩C
Poliedros de Platón: A∩C
Podemos observar que los poliedros regulares son una familia de los poliedros de Platón.

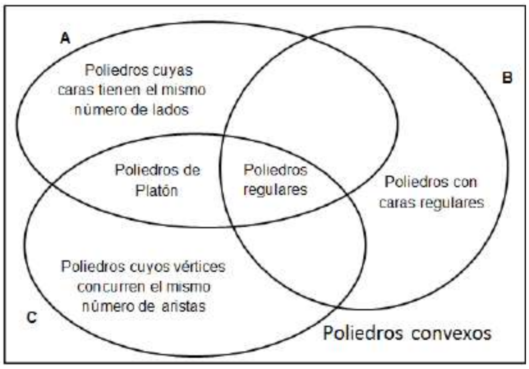


Figura 1 Poliedros convexos, de Platón y regulares.

e.3) Segunda etapa. Actividades

Se eligen los poliedros de Paltón y regulares para esta segunda etapa. Las actividades han sido seleccionadas para explorar, buscar soluciones en forma sistemática, con material concreto y con el programa GeoGebra, conjeturar y validar.
Las mismas permiten alcanzar niveles superiores de razonamiento geométrico, nivel 4.
Esta etapa consta de dos partes. En la primera parte se plantean actividades de exploración y prueba sobre la existencia de poliedros de Platón, analizando sus caras. Y en la segunda parte se plantean actividades de verificación, búsqueda y validación de conjeturas relacionadas con sus elementos, en los poliedros regulares y de Platón.

Parte 1. Se elige un poliedro de Platón, el tetraedro. Este procedimiento puede ser pensado para otro poliedro de esta familia.
Se realiza el análisis didáctico de la primera actividad.

A) Explorando posibilidades de construcción con distintos triángulos, clasificados por lados, con material concreto.

Actividad 1. ¿Qué es un tetraedro? Aquí hay cuatro triángulos diferentes hechos de Polydron (El Polydron es un material didáctico formado por un conjunto de polígonos de distintos tamaños realizados en plástico que poseen bisagras para unirse y formar poliedros.)

- Los lados del triángulo equilátero pequeño son de la misma longitud que el lado menor del triángulo isósceles y los lados menores del triángulo isósceles rectángulo.
- Los lados del triángulo equilátero mayor tienen la misma longitud que los lados mayores del triángulo isósceles y del lado mayor del triángulo isósceles rectángulo.

¿Cuántos tetraedros diferentes puedes hacer? Busca la forma de asegurar de que se han encontrado todas las soluciones. (Actividad adaptada de *NRICH,* Universidad de Cambridge, 2017)

Aportes del problema: Nivel 2 y 3 – Análisis y clasificación.

- Implica un pensamiento y visualización sistemática, y búsqueda de estrategias de organización para poder obtener todas las soluciones.
- Requiere utilizar material concreto, ya sea con figuras de Polydron o de cartón, para abordar un problema matemático.

Comentarios:
"*Se ha dicho que la mejor forma de aprender sobre los poliedros es construirlos y después, observarlos, compararlos, transformarlos y modificarlos*." (Guillén Soler, 1997, p. 11).
Este problema presenta soluciones que pueden fomentar la discusión sobre la igualdad de figuras y reta la idea errónea de que todos los tetraedros son regulares.

Resolución:

- Estrategias didácticas

Solicitar, a los estudiantes, que se dispongan a trabajar en grupos pequeños, entregar uno de cada tipo de triángulo y luego proponer que piensen una lista de observaciones que son matemáticamente más importantes, ya sea considerando cada triángulo individualmente o cuando se comparan entre sí.
Realizar una breve puesta en común de las ideas, dónde tendría que aparecer.

- Dos son isósceles y los otros dos son equiláteros.
- Un triángulo tiene un ángulo recto
- Los triángulos tienen lados de sólo dos longitudes posibles.

Entregar más triángulos e invitar a los estudiantes a construir un tetraedro. Esta tarea puede resultar en la necesidad de discutir qué es un tetraedro y que un tetraedro se puede hacer a partir de triángulos que no son equiláteros.

- Preguntas claves (según método de resolución de problemas):

Si tomas uno de cada uno de los triángulos, ¿es posible hacer un tetraedro y cómo lo sabes?
¿Tienes un enfoque sistemático para encontrar todos los diferentes tetraedros? ¿Cómo estás registrando tus soluciones?
¿Cómo sabes que has probado todas las formas posibles de unir los mismos cuatro triángulos?

- Posible sugerencia.

Trabaja con dos y luego con tres tipos diferentes de triángulos para establecer un enfoque sistemático.

Solución
Se muestran algunos caminos de resolución sistemáticos que pueden mostrar un argumento convincente de que se tienen todas las posibilidades

1) Tabulando todas las posibilidades y probando (ver Figura 2).

2) Como solo hay dos longitudes de lados debe haber un número par de lados mayores y menores, en el conjunto de cuatro triángulos que forman el tetraedro para que los triángulos encajen. Esta observación permite descartar rápidamente aquellas combinaciones que no cumplan esta condición (ver Figura 3.)
3) Haciendo un diagrama de árbol, comenzando con cada triángulo y descartando las figuras iguales (ver Figura 3).

E	e	IR	I
4			
	4		
		~~4 NO~~	
			4
~~3 NO~~			
	~~3 NO~~		
1		3	
	1		3

Figura 2. Solución 1

E	e	IR	I	Cumple	Funciona
4				sí	sí
	4			sí	sí
		4		sí	no
			4	sí	sí
3			1	no	
3	1			no	
3		1		no	
	3		1	sí	no
1	111			no	

Figura 3. Solución 2

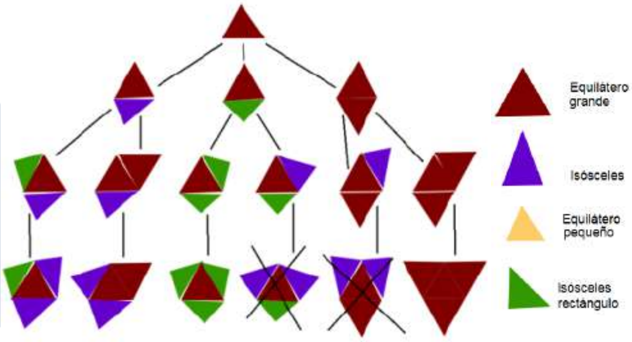


Figura 3. Solución 3

Luego de explorar todas las posibilidades se obtienen las siguientes soluciones: 1 equilátero pequeño y 3 isósceles; 1 equilátero grande y 3 isósceles rectángulo; 2 equiláteros grandes y 2 isósceles; 4 equiláteros pequeños; 4 equiláteros grandes; 2 equiláteros pequeños y 2 isósceles rectángulo; 2 isósceles, 1 isósceles rectángulo y 1 equilátero grande; 1 equilátero pequeño, 1 isósceles y 2 isósceles rectángulo, y, por último, 2 isósceles y 2 isósceles rectángulo (según su construcción forman dos tetraedros que se reflejan entre sí).

- Tema de discusión

¿Los tetraedros que se corresponden en una simetría especular son iguales?
Serían congruentes según la *definición 3*, ya que se corresponden en un movimiento.
Una figura es un conjunto de puntos y dos conjuntos son iguales si tienen los mismos elementos.
Solución: Se forman 10 tetraedros diferentes.

- Posible extensión

Se puede pedir cuantificar la relación entre los lados mayores y menores siendo una buena oportunidad para retomar el teorema de Pitágoras.

B) Explorando posibilidades de construcción con distintos triángulos, clasificados por ángulos, usando un software de geometría dinámica.

Actividad 2. ¿Cuántos tipos de tetraedros se pueden formar con triángulos acutángulos, rectángulos y obtusángulos? Investiga con GeoGebra. (Utilizar applet en GeoGebraTube: https://ggbm.at/xbeszt5y)

Aportes del problema: Nivel 2, 3 y 4 – Análisis, clasificación y deducción.

- Es una actividad que requiere explorar y organizar sistemáticamente la búsqueda de soluciones.
- Implica la formulación y demostración de conjeturas, para justificar observaciones empíricas.
- Requiere utilizar un software como apoyo en la resolución de un problema matemático.

Comentarios:
En este problema se puede apreciar el potencial de las TIC para modelizar y explorar, facilitando la búsqueda de ejemplos.
La justificación de conjetura promueve el vínculo con otras propiedades demostradas, como la 1 y 2.

Parte 2. Relaciones entre sus elementos: Caras vértices y aristas

Actividad 1. a. Observa y completa la siguiente tabla con el número de caras, vértices y aristas de cada poliedro regular. Utiliza un applet de GeoGebra (utilizar applet en GeoGebraTube: https://ggbm.at/fM6GQK2c), fichas Polydron o cuerpos sólidos.

	Tetraedro	Cubo	Octaedro	Dodecaedro	Icosaedro
Caras (C)					
Vértice (V)					
Arista (A)					

b. Verifica que $\mathrm{C} + \mathrm{V} = \mathrm{A} + 2$
c. Inténtalo con otros poliedros convexos.

Aportes del problema: Nivel 2, 3 y 4 – Análisis, clasificación y deducción.
- Es una actividad que requiere organización, para el conteo, y verificación de una relación.
- Valorar diferentes recursos para resolver una actividad.

Comentarios:
Esta relación la cumplen todos los poliedros convexos y recibe el nombre de Relación de Euler. La cantidad de figuras que cumplen la definición de poliedro convexo es tan grande que parece increíble que compartan una relación en común, este hecho hace que la fórmula de Euler sea considerada una maravilla matemática.
A través de algunos ejemplos se pasará a su demostración, ya que la misma es necesaria para justificaciones posteriores (ver Teorema 1).

Actividad 2. Teniendo en cuenta las dos condiciones básicas para que se forme un poliedro:
- En un vértice de un ángulo poliedro han de concurrir tres o más caras.
- La suma de las caras de un ángulo poliedro ha de ser menor que 360 grados.

Razona por qué sólo hay 5 poliedros regulares.

Aportes del problema: Nivel 3 y 4 – Clasificación y deducción
- Mostrar a través de una búsqueda sistemática y prueba, la existencia de cinco poliedros regulares.

Comentarios:
Ver Sistematizando la búsqueda de poliedros regulares, en la segunda etapa del Marco Teórico

Actividad 3. Busquemos nuevas relaciones.
a. ¿Existe alguna relación entre el número de caras del poliedro regular y el número de lados del polígono de sus caras con respecto al número de aristas?

	Tetraedro	Cubo	Octaedro	Dodecaedro	Icosaedro
Caras (C)					
Nº de lados del polígono (n)					
Arista (A)					

b. En caso de ser así, ¿esta relación se puede extender a otro tipo de poliedro? Justifica.

Actividad 4.
a. ¿Existe alguna relación entre el número de caras del Poliedro regular, el número de lados del polígono de sus caras y el número de caras que concurren al vértice con respecto al número vértices del poliedro?

	Tetraedro	Cubo	Octaedro	Dodecaedro	Icosaedro
Caras (C)					
Nº de lados del polígono (n)					
Nº de caras que concurren al vértice (m)					
Vértices (V)					

b. En caso de ser así, ¿esta relación se puede extender a otro tipo de poliedro? Justifica

Aportes de los dos problemas anteriores: Nivel 3 y 4 – Clasificación y deducción

- Formular conjeturas, búsqueda de regularidades y relaciones, y justificar.

Comentarios:

La relación en el primer caso es que $A = \frac{C.n}{2}$, ya que cada cara tiene n aristas (todos los polígonos tienen n lados) y cada arista pertenece a dos caras, por tanto se cuentan dos veces. En el segundo caso $V = \frac{C.n}{m}$, ya que a cada vértice de un poliedro concurren m vértices de las caras y cada vértice vale para n caras.

Las mismas permitirán abordar la siguiente actividad y establecer interacciones entre el álgebra y geometría.

Plantear problemas que requieran, en simultáneo, la utilización de recursos algebraicos y geométricos presentan gran potencialidad (Itzcovich, 2005)

Actividad 5.

Demuestra analíticamente que sólo existen 5 tipos de poliedros de Platón.

Sugerencia: utilizar las relaciones halladas en las dos actividades anteriores y la relación de Euler.

Aportes del problema: Nivel 4 – Deducción

- Requiere elaborar una demostración.
- Implica vincular todos los conceptos trabajados.

e.4) Segunda etapa. Marco Teórico

Teorema 1. Teorema de Euler: En todo poliedro convexo la suma del número (c) de caras, más el número (v) de vértices, excede en dos unidades al número (a) de aristas.

$$c + v = a + 2$$

Observaciones previas:

1. En toda línea poligonal cerrada, el número de vértices, es igual al número de lados.
2. En toda línea poligonal abierta , en la cual no se consideran los vértices extremos, el número de lados, excede en una unidad al número de vértices

Demostración: Se traza una línea poligonal cerrada, cuyos lados sean aristas del poliedro de tal modo que divida la superficie en dos regiones. Como esta poligonal tiene tantos vértices como aristas (observación 1), la suma $r_1 + v_1$ del número de regiones más el de vértice de la poligonal excede en dos unidades al número a_1 de sus aristas, es decir, $r_1 + v_1 = a_1 + 2$

En una de las regiones obtenidas se traza una nueva línea poligonal abierta, con extremos en los vértices de la poligonal anterior, y cuyos lados sean aristas. Se cumplirán dos condiciones:

- Se ha aumentado en una unidad el número de regiones, o sea que $r_2 = r_1 + 1$
- Se ha introducido una línea poligonal abierta, en la cual, no se consideran sus extremos o sea que $a´ = v´ + 1$(observación 2)

Sean r_2, v_2 y a_2, el número de regiones, vértices y aristas actuales, y $r´, v´$ y $a´$, los introducidos.

Se cumplirán las siguientes igualdades: $r_2 = r_1 + r´ \Rightarrow r_1 = r_2 - 1$ (ya que $r´ = 1$), $v_2 = v_1 + v´ \Rightarrow v_1 = v_2 - v´$ y $a_2 = a_1 + a´ \Rightarrow a_1 = a_2 - a´$

Sustituyendo estas tres últimas igualdades en la afirmación anterior $r_1 + v_1 = a_1 + 2$ se obtiene que, $(r_2 - 1) + (v_2 - v') = (a_2 - a') + 2$, y considerando que $a' = v' + 1$, se cumplirá que $r_2 + v_2 = a_2 + 2$

Al repetir el razonamiento n veces, dividiendo en forma análoga, las regiones obtenidas, hasta conseguir que cada región sea una cara, la igualdad $r_n + v_n = a_n + 2$, se seguirá cumpliendo, y por lo tanto se verificará la tesis $c + v = a + 2$

Los poliedros convexos también reciben el nombre de poliedros Eulerianos.

Sistematizando la búsqueda de poliedros regulares

Si las caras del poliedro son triángulos equiláteros (cuyos ángulos son de 60º), en cada vértice pueden concurrir tres, cuatro o cinco, pero no más, pues seis ángulos de 60º suman cuatro ángulos rectos y no se forman vértices porque quedan planos (prop. 2). Si en cada vértice se juntan tres triángulos , se obtiene un tetraedro, con cuatro un octaedro y con cinco un icosaedro.

Si las caras son cuadrados (cuyos ángulos son de 90º), sólo tres de ellos pueden concurrir en un vértice para que su suma sea menor a 360º (prop. 2), resultando el cubo. Porque con cuatro cuadrados no se forma un ángulo poliedro convexo y con un número mayor de cuadrados no pueden concurrir en un vértice.

La última posibilidad es considerar pentágonos regulares (cuyos ángulo son de 108º), sólo tres de ellos pueden concurrir en un vértice dando lugar al dodecaedro. Con hexágonos regulares (cuyos ángulo son de 120º) no se puede formar un ángulo poliedro ya que deben concurrir por lo menos tres en cada vértice y la suma de los ángulos de las caras sería de 360º.

También se superan los 360º con poligonos regulares de siete o más lados.

En resumen sólo pueden ser poliedros regulares: el tetraedro, el octaedro y el icosaedro, de caras triangulares; el cubo, de caras cuadradas, y el dodecaedro, de caras pentagonales.

Pero hasta aquí no hemos demostrando su existencia efectiva sino probado la imposibilidad de otros poliedros regulares convexos, para ello es necesario construirlos uno por uno.

Teorema 2. Existencia de cinco tipos de poliedros de Platón.

Demostración: Considerando un poliedro de Platón con C caras, V vértices, A aristas; cada cara tiene n lados y los vértices son de orden m. Entonces $m \geq 3$; y $n \geq 3$, y además:

i. $C + V = A + 2$. La relación de Euler se cumple ya que son poliedros convexos.

ii. $\frac{C.n}{2}$ Ya que cada cara tiene n aristas (todos los polígonos tienen n lados) y cada arista pertenece a dos caras, por tanto se cuentan dos veces.

iii. $V = \frac{C.n}{m}$ Ya que cada vértice de un poliedro concurren m vértices de las caras, cada vértice vale para n caras.

De la igualdad ii. se tiene que $C = \frac{2A}{n}$, y de sustituir ii. en iii. se obtiene que $V = \frac{2A}{m}$.

Sustituyendo ambas igualdades en la relación de Euler se obtiene que $\frac{2A}{n} + \frac{2A}{m} = A + 2$, operando y reordenando se llega a la expresión:

iv. $(2m + 2n - mn)A = 2mn$. De lo que sigue que $2m + 2n - mn$ debe ser positivo; es decir: $2m + 2n - mn > 0$ siendo equivalente a expresar que $(m - 2)(n - 2) < 4$.

Esta última expresión reduce considerablemente las posibilidades para m y n siendo las únicas: $(3, 3)$, $(3, 4)$, $(3, 5)$, $(4, 3)$ y $(5, 3)$ que corresponden a vértices de orden 3 y caras triángulos, cuadriláteros o pentágonos, vértices de orden 4 y sus caras triángulos, vértices de orden 5 y caras triángulos. Queda demostrado que solo hay cinco tipos de poliedros de Platón. Sustituyendo y operando iv. en ii. se obtiene que $C = \frac{4n}{2(m+n)-mn}$

- Si las caras son triángulos ($m = 3$) para: $n = 3 \Rightarrow c = 4$ es un tetraedro, $n = 4 \Rightarrow c = 8$ es un octaedro y $n = 5 \Rightarrow c = 20$ es un icosaedro
- Si las caras son cuadriláteros ($m = 4$) para $n = 3 \Rightarrow c = 6$ es un hexaedro y
- Si las caras son pentagonales ($m = 5$) para $n = 3 \Rightarrow c = 12$ es un dodecaedro.

Queda demostrado que solo hay cinco tipos de poliedros de Platón, regulares o no: tetraedro, hexaedro, octaedro, dodecaedro e icosaedro.

f) Línea de investigación

f.1) Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) y Educación

Un gran porcentaje de las investigaciones educativas que se están llevando a cabo son aquellas referentes al impacto de las tecnologías digitales en los aprendizajes.
En nuestro país el Plan Ceibal está realizando enormes esfuerzos por integrar las tecnologías a los procesos educativos, implicando importantes inversiones económicas. A pesar de ello, aunque se ha demostrado una reducción de la brecha digital y el desarrollo de habilidades no cognitivas y cognitivas, se está lejos de poder demostrar un impacto significativo y masivo en la calidad de los resultados de aprendizaje que se imaginaron al comienzo (IPES, 2016). Basta con analizar el Informe sobre el estado de la educación en Uruguay 2015-2016 (INEEd, 2017), para visualizar que no hubo cambios en los rendimientos en materia de aprendizaje en el tramo obligatorio.
Pero sin duda, el desarrollo tecnológico alcanzado en los últimos tiempos y los recursos disponibles, demandan una actualización de las prácticas educativas. Si nos centramos en la enseñanza de matemática podemos encontrar trabajos de investigación donde se ha logrado una implementación efectiva con modelizaciones matemáticas que de una forma tradicional no hubiesen sido posibles.
Dentro del tema geometría podemos citar algunos trabajos de investigación en nuestro país como: “Geometría en el aula con GeoGebra” de Damisa, Dodino y Piedra Cueva (2017), o “El desarrollo de un pensamiento deductivo en el bachillerato diversificado en un ambiente de Geometría Dinámica” de Dalcín (2006), entre otros, en los cuales un software de geometría dinámica ha mostrado su potencialidad en el proceso de enseñanza.

f.2) Desarrollo del pensamiento deductivo

Así como plantea Flores (como se citó en Dalcín, Ochoviet, Olave y Testa, 2006), uno de los propósito de la educación debería ser el desarrollo del pensamiento deductivo, entendido como la capacidad de encadenar ideas generales que lleven a conclusiones particulares. Estas conclusiones permitirán tomar decisiones de manera fundamentada.
Mediante la enseñanza de la geometría se puede influir en el desarrollo de un pensamiento deductivo a través de la argumentación matemática y demostración, competencia que se ha venido resaltando desde el inicio del trabajo.

f.3) Pregunta de investigación

A partir de la investigación de Dalcín (2006) sobre el desarrollo del pensamiento deductivo, en bachillerato diversificado, en un ambiente de Geometría Dinámica en el plano. Se plantea la siguiente pregunta de investigación: ¿Cómo favorece el programa GeoGebra 3D la producción de un razonamiento deductivo en estudiantes de Magisterio que trabajan en la formulación y validación de conjeturas en actividades con poliedros?
Para dar respuesta a esta pregunta se propone un estudio de corte cualitativo. El instrumento podría ser por ejemplo: ABCD es un tetraedro regular, P es un punto variable en el segmento AB.
a. ¿Es constante la medida del ángulo CPD, al variar P? ¿Qué dice tu intuición?
b. Construye una figura dinámica, en GeoGebra, que modele la situación, ¿Qué observas? Justifica. (Este es un fragmento de la actividad actividad 15 del libro *Cuerpos con historia. Poliedros para experimentar* (Dalcín, M., & Molfino, V., 2018, p. 28) Se sugiere utilizar toda la actividad, pero por una cuestión de espacio se mostraron los puntos más relevantes.)

Sería aplicado a estudiantes de magisterio, para luego realizar entrevistas con los casos más interesantes que se observen.

g) A modo de cierre

Con este trabajo se pretendió mostrar un posible camino para abordar los Poliedros. Aunque se recorre una mínima porción del tema, se expone un lineamiento con la esperanza de que un futuro docente afronte el desafío de continuarlo o, mejor aún, crear el suyo propio.
Mediante un planteo de resolución de problemas, se invita al estudiante a pensar y a ser protagonista de sus propias deducciones. Para de esta manera, fomentar el gusto e interés por la Geometría, el cual será trasmitido posteriormente a sus futuros estudiantes.

Referencias bibliográficas

Dalcín, M., & Molfino, V. (20 al 22 de mayo de 2017). *Semur.* Recuperado el 1º de febrero de 2019, de https://semur.edu.uy/curem7/actas/pdf/23.pdf

Dalcín, M., & Molfino, V. (2018). *Cuerpos con historia. Poliedros para experimentar. Volumen 2.* Montevideo: Ediciones Palíndromo.

Dalcín, M., Ochoviet, C., Olave, M., & Testa, Y. (2006). Didáctica de la Matemática. Cuatro Trabajos de Investigación en el Marco de Sistema Educativo Uruguayo. Montevideo: Ediciones Rocamadur.

Damisa, C., Dodino, M., & Piedra Cueva, M. (2017). *Geometría en el aula. Una experiencia de trabajo colaborativa en el aula.* Montevideo: Grupo Magro.

Extremiana, J., Hernández, L., & Rivas, M. (2001). *Poliedros.* Logroño: Servicio de Publicaciones. Universidad de La Rioja.

Guillén, G. (1997). *Poliedros. Matemáticas: cultura y aprendizajes. Nº 15.* Madrid: Síntesis.

Guillén, G., Gutiérrez, A., Jaime, A., & Cáceres, M. (marzo de 1992). *La enseñanza de la geometría de sólidos en la E.G.B.* Recuperado el 1º de febrero de 2019, de Universidad de Valencia: https://www.uv.es/Angel.Gutierrez/archivos1/textospdf/GutOtr92.pdf

Gutiérrez, A., & Jaime, A. (1991). El modelo de Razonamiento de Van Hiele como marco para el aprendizaje comprensivo de la Gometría. Un ejemplo: Los Giros. *Educación Matemática*, 49-65.

INEEd. (2017). *Informe sobre el estado de la educación en Uruguay 2015-2016.* Montevideo: INEEd.

IPES. (1º de abril de 2016). *IPES Virtual.* Recuperado el 1º de febrero de 2019, de ¿Cómo apoyar la gestión de los aprendizajes?: http://ipesvirtual.cfe.edu.uy/file.php/540/Modulo_3/Archivos/cmo_apoyar_la_gestin_de_los_aprendizajes.html

Itzcovich, H. (2005). *Iniciación al estudio didáctico de la Geometría.* Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Mabel. (3 de diciembre de 2017). *GeoGebra.* Recuperado el 1º de febrero de 2018, de https://ggbm.at/fM6GQK2c

Manrique, A. (1º de febrero de 2018). *GeoGebra.* Recuperado el 1º de febrero de 2018, de https://ggbm.at/xbeszt5y

Ochoviet, C., & Olave, M. (2006). *Matemática 4.* Montevideo: Santillana.

Pólya, G. (1965). *Cómo Plantear y Resolver Problemas.* México : Trillas.

Programa MESyFOD-ANEP-CODICEN. (1998). *Guía de apoyo al docente, Matemática. Primer curso.* Montevideo: Monteverde.

Programa MESyFOD-ANEP-CODICEN. (1998). *Guía de apoyo al docente, Matemática. Tercer curso.* Montevideo: Monteverde.

Puig Adam, P. (1986). *Curso de Geometría Métrica. Tomo 1: Fundamentos.* Madrid: Euler.

Sadovsky, P. (2005). *Enseñar Matemáticas hoy. Miradas, sentidos y desafíos.* Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Sardella, O., Berio, A., & Mastucci, S. (2002). Poliedros en el aula. *Revista de didáctica de las matemáticas*, 45-52.

Universidad de Cambridge. (2017). *NRICH*. Recuperado el 1º de febrero de 2019, de https://nrich.maths.org/

Poliedros

Jeannine Maufinet

Aspectos disciplinarios

Los poliedros han sido estudiados y empleados desde la antigüedad, uniendo la ciencia y la estética y relacionándolos con entidades cósmicas en un intento de explicar el universo. Hay hallazgos de piedras talladas que datan del neolítico (aproximadamente 2000 a.C.). Euclides trata acerca de la construcción de los cinco poliedros regulares en el libro XIII de su obra "Elementos" (300 a.C.). Posteriormente el astrónomo Kepler sistematizó y matematizó el conocimiento que había en su época acerca de los poliedros. Kepler tenía la creencia de que la ciencia permite un mejor conocimiento del universo, creado por Dios según un plan matemático.

> Con impulsos religiosos similares o diferentes, o sin ellos, lo cierto es que los científicos, siguiendo la pauta marcada por la asociación de poliedros a entidades cósmicas, continúan intentando explicar la forma del universo utilizando modelos, conceptos y teorías previamente desarrollados en Matemáticas. (Extremiana, Hernández, & Rivas, 2001)

Los poliedros modelizan varios objetos que atañen a distintas ciencias. Por ejemplo, Extremiana, Hernández y Rivas mencionan su presencia en los cristales de varias sustancias: el cubo en los cristales de sal común, el tetraedro en los del sodio sulfantinomiato, el octaedreo en el alumbre de cromo y el dodecaedro en los de la pirita. Esto implica que los poliedros se empleen en temas cristalográficos relacionados con la geología y la química. También hay muchas investigaciones con estas estructuras en el campo de la biología, química y física nuclear.

Los poliedros se pueden ubicar dentro de una estructura más amplia, la de los politopos. Según Coexeter (1953) los politopos son figuras geométricas limitadas por semirrectas, semiplanos o semihiperplanos. Desde este punto de vista, en dimensión uno serían segmentos, en dos dimensiones serían polígonos y en tres poliedros. Otra forma de definirlos sería como una región compacta en $\mathbb{R}^n$ definida por la intersección de semiespacios.

Enmarcados dentro de la topología algebraica, Extremiana, Hernández, & Rivas (2001) mencionan también que se puede usar la palabra poliedro o estructura poliedral para nombrar espacios construidos con piezas sencillas denominadas celdas de diversas dimensiones que son copias topológicas de discos correspondientes a la dimensión. Se forman partiendo de un espacio discreto de puntos (0-celdas) al que se le va pegando sucesivamente un conjunto de celdas (eventualmente vacío) de dimensión cada vez mayor, por los bordes de estas. Pueden tener un número finito o infinito de piezas (dimensión finita o infinita).

Moebius define los poliedros de una forma general como un conjunto de polígonos con la propiedad de que cada lado de estos polígonos es lado de exactamente otro polígono del sistema. Se observa que esta definición habilita los poliedros infinitos. Coxeter (1953) usa una definición equivalente e incluye al "dihedron" dentro de los poliedros, cuyas caras son dos polígonos coincidentes.

A continuación se proporciona la definición de un libro sugerido en Geometría I del IPA:

> Un poliedro es un objeto tridimensional formado por regiones poligonales denominadas caras. Los lados y vértices de las caras reciben los nombres de aristas y vértices del poliedro. Un poliedro está formado por un número finito de regiones poligonales. Cada arista de una región es la arista de exactamente otra región. Si dos regiones se intersecan, lo hacen en una arista o en un vértice. (Clemens, O'Daffer, & Cooney, 1998)

Puig Adam (1980) define en un principio *superficie poliédrica convexa* como el conjunto de una cantidad finita de polígonos, llamados caras, que verifican:

1. Cada lado de una cara pertenece también a otra única cara. En este caso, ambas caras son denominadas caras contiguas.
2. Dos caras contiguas son no coplanares.
3. El plano de cada cara deja en el mismo semiespacio a las demás.

Luego define *poliedro convexo* a la intersección de los semiespacios anteriores. Después define las superficies poliédricas no convexas a partir de la siguiente construcción: “Sustituir una cara ABCD de la superficie de un poliedro convexo por triángulos que resultan de proyectar sus lados desde un punto O al poliedro”. Las caras de esta nueva superficie siguen cumpliendo con las condiciones 1 y 2 de la definición de las superficies poliédricas convexas pero no la 3.

Los vértices y lados de las caras se denominan *vértices* y *aristas* del poliedro. Se llama *diagonal* a un segmento que tiene por extremos dos vértices no situados en la misma cara.

Los poliedros son denominados según su número de caras. Por ejemplo, tetraedro (4 caras), pentaedro (5), hexaedro (6), heptaedro (7),…, icosaedro (20), etc.

El estudio de los poliedros es muy amplio e imposible de abarcar en su totalidad en un trabajo de esta extensión. Por este motivo el énfasis de este trabajo estará en el desarrollo de un tipo particular de poliedros (los poliedros uniformes) y en los grupos de simetría rotacionales de los poliedros regulares.

A continuación definiremos varias familias de poliedros, no excluyentes entre sí:

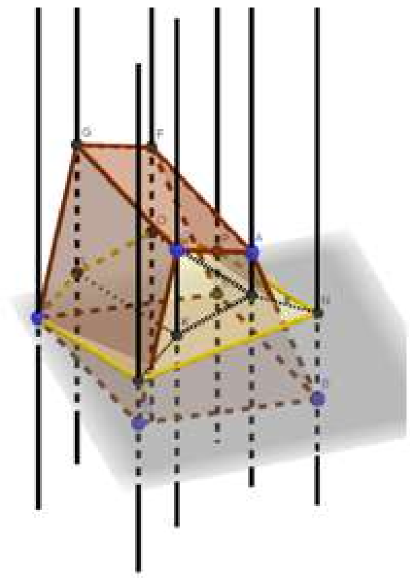
- Los poliedros *convexos* y *no convexos*. Un poliedro es *convexo* si todo segmento tiene por extremos dos puntos del poliedro está incluido en él. En caso contrario es *no convexo*.
- Los poliedros *de caras regulares* son aquellos en los que todas sus caras son polígonos regulares.
- Los poliedros de *caras uniformes* tienen todas sus caras iguales.
- Poliedros de *aristas uniformes* cuando los pares de caras que se reúnen en cada arista son iguales.
- Poliedros de *vértices uniformes* cuando en todos los vértices del poliedro convergen el mismo número de caras y en el mismo orden.
- Los *poliedros uniformes* son aquellos con caras regulares y vértices uniformes.
- Poliedros *simples* son los que no tienen ningún “agujero” y es posible por lo tanto transformarlos en una esfera mediante cierta deformación.
- Poliedros *regulares* e *irregulares.* Los *regulares* son aquellos poliedros convexos cuyas caras son polígonos regulares iguales y en los que en cada vértice concurre el mismo número de caras. Los *irregulares* son los que no son regulares.

- Los *sólidos arquimedianos* son poliedros convexos de vértices uniformes cuyas caras son polígonos regulares.
- Los *sólidos de Catalán* son poliedros que tienen todas las caras iguales, pero no son polígonos regulares.
- Los *sólidos de Kepler-Poinsot* son poliedros regulares no convexos.
- Los *prismas* son poliedros con dos caras que son polígonos iguales incluidos en planos paralelos y cuyas caras laterales son paralelogramos. Si los polígonos iguales de un prisma son paralelogramos lo llamaremos *paralelepípedo*.
- Un *antiprisma* es un poliedro con dos caras iguales paralelas denominadas bases, pero a diferencia del prisma, están giradas y reunidas por medio de triángulos. Las caras laterales son triángulos que unen dos vértices consecutivos de una base con el vértice correspondiente de la otra.
- Una *pirámide* es un poliedro cuyas caras están formadas por un polígono cualquiera (denominado base) y por triángulos con un vértice común (denominados caras laterales).
- Un *deltaedro* es un poliedro cuyas caras son triángulos equiláteros iguales.
- Las *bipirámides* son poliedros formados por las caras laterales de dos pirámides que tienen la misma base.
- Los *sólidos de Johnson* son poliedros convexos cuyas caras son polígonos regulares cuyos vértices no son uniformes.
- Los *zonoedros* son poliedros en los que cada cara tiene un centro de simetría.

Ahora presentaremos un resultado muy importante que cumplen los poliedros convexos, el Teorema de Euler:

En todo poliedro convexo la suma del número *c* de caras más el número *v* de vértices excede en dos al número *a* de aristas.

c+v=a+2

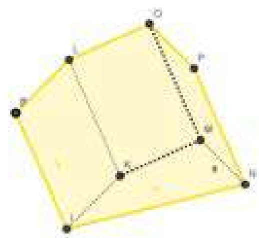


Veamos la demostración: (Las imágenes están realizadas con GeoGebra)

Para demostrar este teorema proyectaremos el poliedro ortogonalmente sobre un plano α que verifique:

- α no es perpendicular a ninguna de las caras del poliedro
- No existen dos vértices del poliedro que tengan la misma proyección

Como el poliedro tiene una cantidad finita de caras, vértices y aristas siempre es posible encontrar un plano α en estas condiciones. Considerando el conjunto de puntos de las proyecciones del conjunto de vértices del poliedro podemos tomar el menor polígono P convexo que contiene todos estos puntos, ya sea en sus lados o en su interior. Podemos dividir los puntos de P en dos partes: los del “borde” y los “interiores”. Los del borde serían los de los lados de dichos polígonos y los interiores serían los interiores al polígono.



La suma S de los ángulos interiores de las caras del poliedro va a ser igual a la suma de los ángulos interiores de sus proyecciones. Si bien estos últimos ángulos no tienen por qué ser iguales a los del poliedro su suma debe serlo ya que las proyecciones son polígonos convexos con el mismo número de lados, suma que es invariante.

Suponiendo que P tiene *m* vértices, si *v* es la cantidad de vértices del poliedro tendríamos *v-m* puntos interiores y la suma de las proyecciones de los ángulos en cada uno de los *v-m* vértices es 360° totalizando *(v-m)360°.*

Para calcular la suma de los ángulos interiores proyectados en el borde debemos tener en cuenta que cada arista proyectada corresponde simultáneamente a un lado de dos caras del poliedro por lo que dicha suma sería 2*(m-2)180°*.

Entonces S=*(v-m)360°+2(m-2)180°*.

Por otro lado, suponiendo que n_1, n_2, … n_c es el número de lados de cada cara tenemos que $S=(n_1+n_2+\ldots+n_c-2c)180°=(2a-2c)180°=2(a-c)180°$

Luego $(v-m)360°+2(m-2)180°=2(a-c)180°$ y $v-2=a-c$ siendo $c+v=a+2$ que era lo que queríamos demostrar.

Es importante destacar que esta relación se cumple en poliedros convexos, pero también hay poliedros no convexos que la verifican. Los poliedros que la verifican se denominan *poliedros eulerianos.*

A partir del teorema de Euler se deducen algunas condiciones para la existencia de poliedros eulerianos y particularmente convexos:

- Dado que cada cara de un poliedro está delimitada por un mínimo de tres aristas y que cada arista pertenece a dos caras se verifica: $3c\leq 2a$
- Considerando que en cada vértice concurren por lo menos tres aristas y que cada arista contiene exactamente dos vértices tenemos que: $3v\leq 2a$
- $3v\geq a+6$ y $3c\geq a+6$
- El número de aristas es mayor o igual que 6.
- El número de caras es mayor o igual que 4.
- El número de vértices es mayor o igual que 4.

Se observa que en los resultados anteriores se pueden intercambiar el número de vértices y el número de caras sin afectar la validez del teorema. Por este motivo para cada poliedro euleriano con *v* vértices, *c* caras y *a* aristas existe un poliedro, denominado dual, que tiene *c* vértices, *v* caras y *a* aristas. Se define como poliedro dual de un poliedro a aquel cuyos vértices son los centros de las caras del poliedro inicial.

A continuación veremos algunos corolarios del teorema de Euler:

1. No existen poliedros eulerianos con exactamente 7 aristas: Si a=7, como $3v\leq 2a$ y $3v\geq a+6$ tenemos que $14\geq 3v\geq 13$. Pero no existe ningún entero v que verifique estas desigualdades.
2. No existe ningún poliedro euleriano en el que todas las caras tengan más de 5 lados: Si cada cara tuviera al menos 6 lados, como cada lado es arista de dos caras tendríamos que $2a\geq 6c$. Por propiedad $3c\geq a+6$. A partir de las dos afirmaciones anteriores tenemos que $a\geq 3c\geq a+6$ lo cual es imposible para valores de a positivos.
3. No hay poliedros eulerianos en los que en todos los vértices converjan más de 5 aristas. Se demuestra con argumentaciones similares al segundo corolario.

En lo que sigue analizaremos distintos tipos de poliedros uniformes. Cabe destacar que Kepler fue el primero en sistematizar el estudio de estos poliedros y observó que esta definición incluye prismas con caras laterales cuadradas y antiprismas cuyas caras laterales

son triángulos equiláteros. En el siglo XIX se descubrieron 57 nuevos y en el siglo XX Coxeter y Miller descubrieron otros 12 a través de un estudio sistemático.
En primer lugar nos referiremos a los poliedros convexos regulares, también denominados sólidos platónicos, cuyo papel a lo largo de la historia ha sido muy relevante desde el punto de vista filosófico, científico, artístico y hasta lúdico. Fueron conocidos por los antiguos egipcios, empleando el cubo, el octaedro y el tetraedro en la arquitectura, además de que se sospecha que usaron el icosaedro como dado.
En el libro XIII de los “Elementos” de Euclides se detalla la construcción de los cinco poliedros regulares a los cuales se les atribuyen los elementos fundamentales que, según se concebía, constituyen el universo: átomos de agua, aire, fuego y tierra. Estos elementos tienen la característica de tener profundidad por lo que no pueden ser concebidos como planos. Al dodecaedro se le asigna la forma que envuelve el universo. De este modo la belleza de los poliedros se basa en su significación filosófica.
Estas concepciones

> contienen tres principios que han tenido y tienen gran importancia en el desarrollo de la ciencia: Unión entre ciencia y belleza, aplicación de objetos y reglas matemáticas conocidas a entidades o procesos desconocidos (asociación de los poliedros a entidades cósmicas) y construcción de la complejidad a partir de elementos simples. (Extremiana, Hernández, & Rivas, 2001)

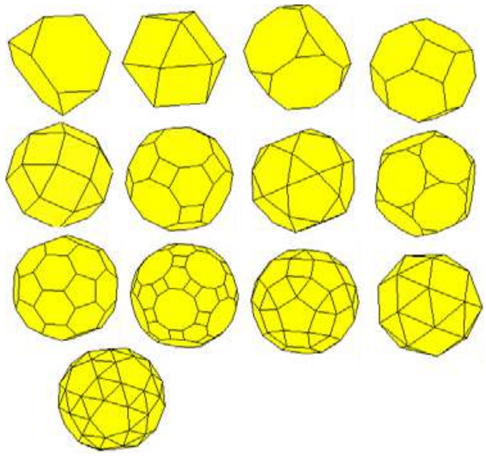
Los poliedros convexos regulares son:

- Tetraedro regular: Tiene cuatro caras que son triángulos equiláteros. En cada vértice concurren tres de estos triángulos.
- Cubo o hexaedro: Tiene seis caras cuadradas. En cada vértice concurren tres caras.
- Octaedro regular: Tiene como caras ocho triángulos equiláteros. En cada vértice concurren cuatro.
- Dodecaedro regular: Tiene doce caras que son pentágonos regulares, en cada vértice se agrupan tres.
- Icosaedro regular: Sus caras son veinte triángulos equiláteros, en cada vértice se intersecan cinco.

A continuación veremos que no existen más de cinco. Este resultado fue demostrado por Euclides basado en las ideas que se desarrollan a continuación.
Para poder formar un ángulo poliedro convexo, es necesario que la suma de las caras sea inferior a 360°. Las caras de los poliedros deben ser polígonos regulares.
Considerando el triángulo equilátero, podríamos tener tres, cuatro o cinco caras por vértice, obteniendo el tetraedro, octaedro o icosaedro regulares respectivamente. No podríamos superar las cinco caras ya que la suma de las mismas alcanzaría o superaría los 360°.
Teniendo en cuenta el cuadrado, podríamos tener tres caras por vértice que sería el caso del cubo. No podríamos tener más de tres caras por vértice ya que la suma de las caras no sería inferior a 360°.
En el caso del pentágono regular, solo podrían concurrir tres caras por vértice obteniendo el dodecaedro regular.
Si consideramos un polígono de seis o más lados, como en cada vértice deben concurrir por lo menos tres caras la suma de las caras no sería inferior a 360°. De aquí deducimos que no puede haber más poliedros regulares.

Ahora que sabemos que son cinco, analizaremos la dualidad de los poliedros regulares. En el caso del tetraedro, dado que tiene 4 vértices, su dual debe tener 4 caras por lo que el dual del tetraedro es el propio tetraedro. El dual del cubo es el octaedro ya que el cubo tiene 8 vértices y 6 caras mientras que el octaedro tiene 6 vértices y 8 caras. El dual del dodecaedro es el icosaedro puesto que el dodecaedro tiene 20 vértices y 12 caras mientras que el icosaedro tiene 12 vértices y 20 caras.
Otros poliedros uniformes son los poliedros arquimedianos, denominados de este modo porque fue Arquímedes quien los descubrió, estudió ampliamente y clasificó.
Dentro de los poliedros arquimedianos encontramos (Imágenes elaboradas con Poly de Pedagoguery Software Inc):

1. Tetraedro truncado
2. Cuboctaedro
3. Cubo truncado
4. Octaedro truncado
5. Rombicubooctaedro
6. Cuboctaedro truncado
7. Icosidodecaedro
8. Dodecaedro truncado
9. Icosaedro truncado
10. Icosi-dodecaedro truncado
11. Rombi-icosi-dodecaedro
12. Cubo romo
13. Icosaedro romo



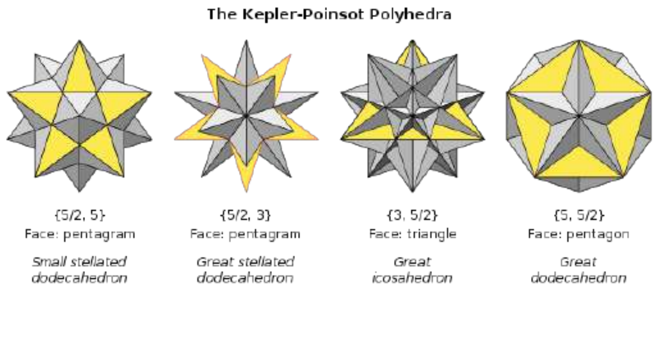
Los primeros once se obtienen truncando sólidos platónicos. Sus nombres se componen del poliedro que es truncado y el poliedro que lo trunca. Los dos últimos no se obtienen truncando poliedros, en el caso del cubo romo se mueven las caras del cubo hacia afuera en sentido perpendicular a sus planos, se rotan y finalmente se completa con triángulos equiláteros. El procedimiento para el icosaedro romo es similar.
Observamos que los sólidos de Catalán (que no son uniformes) son los duales de los arquimedianos, por eso también hay 13. Estos son el triaquistetraedro; el dodecaedro rómbico; el triaquisoctaedro; el tetraquishexaedro; el icositetraedro deltoidal; el hexaquisoctaedro; el icositetraedro pentagonal; el triacontaedro rómbico; el triaquisicosaedro; el pentaquisdodecaedro; el hexecontaedro deltoidal; el hexaquisicosaedro y el hexecontaedro pentagonal.
Otra clase dentro de los poliedros uniformes es la de los deltaedros. En total hay ocho, tres de los cuales son poliedros regulares. Observemos que en cada vértice no pueden concurrir más de seis caras o sea que concurren menos de 6 aristas. Si llamamos a_i al número de vértices en el que concurren i aristas, donde i puede ser 3, 4 o 5, considerando que contamos cada arista dos veces tenemos que el doble del número de aristas se puede escribir $2a = 3a_3 + 4a_4 + 5a_5$. Además 3c=2a ya que en cada cara concurren tres aristas y contamos dos caras por cada arista.Usando los resultados anteriores, el teorema de Euler y sabiendo que $a_3 + a_4 + a_5 = v$, realizando las sustituciones correspondientes llegamos a que $3a_3 + 2a_4 + a_5 = 12$. Esta ecuación tiene 19 soluciones no negativas las cuales no todas corresponden a deltaedros. Los siguientes son los posibles (Imágenes elaboradas con Poly de Pedagoguery Software Inc):

	a_3	a_4	a_5	v	c	a		Nombre
I	4	0	0	4	4	6		Tetraedro regular
II	2	3	0	5	6	9		Bipirámide triangular
III	0	6	0	6	8	12		Octaedro regular
IV	0	5	2	7	10	15		Bipirámide pentagonal
V	0	4	4	8	12	18		Dodecaedro siamés
VI	0	3	6	9	14	21		Prisma Triangular triaumentado
VII	0	2	8	10	16	24		Bipirámide cuadrangular giroelongada
VIII	0	0	12	12	20	30		Icosaedro regular

Otra clase de poliedros uniformes es la de los antiprismas cuyas caras laterales son triángulos equiláteros y las bases polígonos regulares. También tenemos el caso de los prismas cuyas bases son polígonos regulares y las caras laterales cuadrados. En ambos casos tenemos infinitas posibilidades para las bases por lo que hay infinitos antiprismas y prismas que son poliedros uniformes.

Hasta este momento nos referimos a poliedros uniformes convexos. A continuación veremos una clase de poliedros no convexos hallados por Kepler y Poinsot.

Los poliedros de Kepler-Poinsot se construyen a partir de polígonos regulares estrellados, que son polígonos no convexos que se obtienen prolongando los lados de los polígonos regulares hasta que se intersequen. Kepler aplicó este proceso a los sólidos platónicos, sin éxito en el tetraedro, el cubo y el octaedro ya que al prolongar sus aristas estas no se intersecan. Pero en



el caso del dodecaedro y el icosaedro obtuvo el dodecaedro estrellado y el gran dodecaedro estrellado.
Poinsot estudió los poliedros en forma independiente a Kepler, redescubrió los dos descubiertos por Kepler y además dos nuevos. En lugar de construir los poliedros a través de caras que sean polígonos estrellados, consideró la alternativa de sustituir los vértices usuales por vértices estrellados. Con este procedimiento obtuvo el gran dodecaedro y el gran icosaedro, en los que las caras son pentágonos y triángulos regulares. (Imagen recuperada de https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0 Original design and concept: Tom Ruen; SVG creation: Júlio Reis [CC BY-SA 3.0])
Finalmente analizaremos algunos aspectos relacionados con las isometrías que dejan invariantes a los poliedros. La necesidad de un estudio profundo en cuanto a las simetrías de los poliedros surge en un principio en la cristalografía, valiéndose de la teoría de grupos como herramienta.
Estas transformaciones tienen la estructura de grupo, la operación es la composición. Esto implica que la composición de dos elementos del grupo pertenece al grupo, existe un elemento inverso para cada elemento del grupo y existe un elemento neutro que es la identidad. Hay cinco grupos finitos de rotaciones en el espacio, tres de los cuales tienen por elementos las posibles rotaciones que dejan invariantes a los poliedros regulares. Analizaremos estos últimos tres.
Estudiaremos primero el grupo de simetrías de rotación del tetraedro regular, llamémosle A_1, A_2, A_3 y A_4 a sus vértices. Si consideramos el vértice A_1, podemos rotar el tetraedro alrededor de la recta que pasa por A_1 y el baricentro del triángulo de vértices A_2, A_3 y A_4. El tetraedro se puede superponer con sí mismo si rotamos con ángulos 0, $\frac{2}{3}\pi$ y $\frac{4}{3}\pi$. Lo mismo ocurriría con los vértices A_2, A_3 y A_4 por lo que tenemos en total 8 posibilidades además de la identidad.
También tenemos las rotaciones con ángulos 0 o π alrededor del eje determinado por los puntos medios de dos aristas opuestas. Como tenemos 6 pares de aristas opuestas tendríamos 3 casos más además de la identidad.
Es decir que el grupo de simetrías de rotación del tetraedro regular tiene 8+3+1 posibilidades (1 corresponde a la identidad).
Consideremos ahora el grupo de simetrías de rotación de un cubo. En el cubo tenemos tres tipos de rotaciones: ejes de rotación que pasan por los centros de dos caras opuestas y ángulos 0, $\frac{\pi}{2}$, π y $\frac{3}{2}\pi$, ejes que pasan por los puntos medios de aristas opuestas con ángulos 0 y π y ejes que pasan por vértices opuestos con ángulos 0, $\frac{2}{3}\pi$ y $\frac{4}{3}\pi$. Ahora contemos las posibilidades distintas de la identidad: en el primer caso tenemos 3 caras opuestas por lo que hay 3x3, en el segundo contamos con 6 pares de aristas opuestas por lo que tenemos 6x1 y en el tercero hay 4 pares de vértices opuestos teniendo 4x2. Entonces el grupo tiene 9+6+8+1=24 elementos.
Con respecto al grupo de rotaciones del dodecaedro**,** este posee tres tipos de rotaciones: respecto de un eje que pasa por los centros de caras opuestas y ángulos 0, $\frac{2}{5}\pi$, $\frac{4}{5}\pi$, $\frac{6}{5}\pi$ y $\frac{8}{5}\pi$, un eje pasando por los puntos medios de aristas opuestas y ángulos 0 y π y con eje que pasa por vértices opuestos y ángulos 0, $\frac{2}{3}\pi$ y $\frac{4}{3}\pi$.
Las posibilidades distintas de la identidad son: en el primer caso tenemos 6 pares de caras opuestas por lo que tenemos 6x4, en el segundo hay 15 pares de aristas opuestas por lo

que tenemos 15 y en el tercero contamos con 10 pares de vértices opuestos y 2x10 casos. En total el grupo tiene 24+15+20+1=60 elementos.
En el caso de los grupos de simetría de rotación del octaedro y el icosaedro coinciden con los del cubo y del dodecaedro respectivamente por ser sus duales. Nótese que al ser el octaedro el dual del cubo, los vértices del octaedro son centros de las caras del cubo y se puede ver que los ejes de simetría del cubo son los mismos que los del octaedro y además los ejes de simetría del cubo lo son del octaedro. Con un razonamiento análogo se observa que el grupo de simetría de rotación del icosaedro es el mismo que el del dodecaedro. En realidad esto es cierto para los duales, en el caso del tetraedro su dual es otro tetraedro y en ese caso se llama bidual.
En conclusión tenemos tres grupos de simetrías de rotaciones de los poliedros regulares: el tetraedral, el octaedral y el icosaedral.

Aspectos didácticos

En un abordaje netamente formal de la Matemática se eliminan los indicios de la actividad humana que las produjo. Por este motivo el conocimiento de la génesis o el proceso de construcción de la geometría es un aporte importante en los futuros docentes.
"Un estudio histórico-epistemológico que dé cuenta de la génesis, evolución y consolidación de un concepto matemático en el marco de unas condiciones socioculturales, contribuye a un conocimiento del concepto matemático que trasciende los meros procesos algorítmicos." (Ancona, 2003)
Los antiguos griegos enfatizaron el razonamiento lógico a la aplicabilidad. Esto se debe al descubrimiento pitagórico de los inconmensurables y la inquietud que provocaron en el mundo griego las paradojas de Zenón, dejando como consecuencia el horror al infinito que "paralizó parcialmente su imaginación creadora, que pasó a segundo plano, a la sombra del supremo rigor lógico impuesto por la escuela platónica, cuyo mayor exponente es la enciclopédica obra de Los Elementos de Euclides." (González Urbaneja, 1991)
En la década de 1930 comenzaron a aparecer una serie de textos de matemática del grupo "Bourbaki" que se caracterizó por reorganizar el conocimiento matemático basándose en el rigor y la lógica. Este enfoque deja de lado el proceso de creación del conocimiento y tiene grandes implicancias en la enseñanza de la Matemática y la Geometría. El alumno recibe el conocimiento en forma lógica y estructurada, las demostraciones se presentan en forma impecable y de un modo muy diferente a su forma de pensar.

> La exclusiva interpretación deductiva tiene negativas consecuencias sobre los estudiantes que se sienten engañados al hacerles creer que las Matemáticas han sido creadas por grandes genios que comenzaban con los axiomas y por vía exclusivamente lógica obtenían los teoremas y su demostración impecable. El estudiante, que naturalmente no puede funcionar de esta manera se llega a sentir humillado, acomplejado y desconcertado. (González Urbaneja, 1991)

Considerando la gestión en la clase, es importante tener en cuenta lo que menciona Zaslavsky (1995) donde afirma que las concepciones acerca de cómo enseñar están fuertemente influenciadas en la forma en cómo aprendió el docente la asignatura y los estándares de la NTCM (National Council of Teachers of Mathematics, 1991) sugieren que la mayoría de los profesores de Matemática deberían enseñar de una forma diferente a la que aprendieron como estudiantes. Por este motivo considero que es importante tener en cuenta que nuestros estudiantes van a estar fuertemente influenciados por la forma en que les enseñemos y que probablemente tiendan a reproducir nuestras prácticas docentes en su futura labor docente.

Si bien no hay un marco teórico que sea el ideal, es necesario buscar alguno de referencia para las estrategias que se usan en el aula teniendo en cuenta el conocimiento que se pretende tratar. En mi opinión, los distintos marcos de referencia nos invitan a reflexionar acerca de nuestras prácticas educativas permitiéndonos romper con algunas concepciones acerca de la forma en la que aprendimos que tenemos muy arraigadas. Con el fin de describir las estrategias de trabajo en el aula, proponemos trabajar en el marco del modelo de enseñanza de la "Teoría de las Situaciones Didácticas" de Brousseau. Este modelo rompe con el trabajo basado en axiomas y demostraciones acabadas y promueve el "hacer matemática".

Según Sadovsky, Alagia, & Bressan (2005), Brousseau propone un modelo desde el cual pensar la enseñanza como un proceso que se centra en la producción del conocimiento matemático en el ámbito escolar. Esta producción de conocimientos va acompañada de una validación de los mismos por parte de la comunidad en la que tiene lugar, que en este caso sería la clase. El conocimiento geométrico se va construyendo a partir de reconocer, abordar y resolver problemas que a su vez son generados por otros problemas.

Este modelo describe el proceso de construcción de conocimientos en el aula a partir de dos clases de interacciones básicas. La primera, denominada situación adidáctica, entre el sujeto y el medio, es decir la interacción del alumno con una problemática que ofrece resistencias e idas y vueltas sobre los conocimientos matemáticos puestos en juego. La segunda, el contrato didáctico, entre el docente y el alumno, mediando el conocimiento matemático. Estos dos tipos de interacciones están interrelacionados formando un sistema que es el de la situación didáctica.

En cuanto al abordaje de la asignatura, según plantea Guillén (2010) el énfasis de la enseñanza de la Geometría puede estar exclusivamente en el punto de vista estructural y lógico-deductivo o se puede priorizar su aspecto creativo, emplearla para modelizar situaciones de la vida real y destacar su aspecto lógico buscando distintas formas y niveles de rigor al demostrar. En mi opinión creo que debemos considerar todas estas facetas, no desechar ninguna y tener en cuenta la génesis de los conocimientos geométricos. Trabajar desde el punto de vista creativo o desde la modelización de situaciones de la vida real promueve la comunicación y el "hacer matemáticas". El razonamiento lógico-deductivo permite clasificar objetos y fundamentar propiedades y esto se puede lograr en todos los niveles adecuando el rigor de las formalizaciones a la población con la que estemos trabajando. En el caso de la formación de futuros docentes es importante el tratamiento y la discusión de distintos niveles de formalización para posibilitar la selección del nivel más adecuado en su práctica docente.

Con frecuencia la enseñanza de la Geometría tiene menos presencia en el aula ya que no se le reconoce una vinculación directa con los problemas de la vida diaria. Si bien hay varios problemas interesantes que se basan en aspectos prácticos de la vida real, hay varios problemas puramente geométricos que dan sentido por sí mismos a la Geometría. "Una centralización exclusiva en la utilidad hace perder de vista a la matemática como producto cultural, como práctica, como forma de pensamiento" (Izcovich, 2008).

Por otro lado, Freudenthal (1984) describe la importancia del aprendizaje de la Geometría en todos los niveles del desarrollo cognitivo y por ende su relevancia en la formación de

futuros docentes, ya sean de primaria como de secundaria. También afirma que muchos de los temas pueden ser entendidos en distintos niveles y a distinto nivel y que hay que respetar este hecho y utilizarlo.
Un aspecto interesante en el análisis de los poliedros es que trabajamos en el espacio. De acuerdo con Izcovich (2018), el estudio del espacio implica un conjunto de conocimientos que son necesarios para el dominio de las relaciones espaciales, tales como la orientación en el espacio, la ubicación de los objetos y la comunicación de sus posiciones, la organización de los desplazamientos y la elaboración e interpretación de representaciones planas de los objetos. Muchos de estos conocimientos son adquiridos fuera de las instituciones educativas, pero estos aprendizajes informales no son suficientes para resolver muchas situaciones espaciales (interpretar un plano, establecer puntos de referencia para poder ubicarse, etc).
Varios autores manifiestan que es conveniente que la enseñanza de la Geometría comience por el espacio. Por ejemplo, Freudenthal manifiesta la conveniencia de iniciar la enseñanza de la Geometría a partir de los sólidos basándose en que el espacio con los sólidos es más concreto que el plano con sus figuras. Además, el espacio es más intuitivo y facilitador de las actividades creativas. También manifiesta lo peligroso que es priorizar el estudio de la geometría plana en desmedro de la espacial, ya que la imaginación espacial se va perdiendo con la sobreejercitación de la geometría plana.
A continuación veremos algunas dificultades que se presentan en el aprendizaje de la Geometría.
Con frecuencia la Geometría del espacio es considerada por los docentes de enseñanza media como uno de los temas menos prioritarios provocando que nuestros estudiantes de formación docente tengan poca aproximación al conocimiento de las propiedades de los sólidos.
La familiaridad con los objetos geométricos influye en las tareas de identificación. Nos referiremos a continuación a las dificultades que describe Guillén (2000). La autora cita el trabajo de Hershkowitz, quien indica que para describir el desarrollo cognitivo de los alumnos en relación con sus imágenes, es necesario considerar lo que llama el “fenómeno prototípico”, los “juicios prototípicos” y los “rasgos analíticos”. Los ejemplos prototipo son los que existen en la imagen del concepto en la mayoría de los estudiantes y son los primeros que se logran. Los ejemplos prototípicos son usados por los estudiantes para realizar juicios prototípicos y determinar si una representación es un ejemplo de un concepto o no lo es. Hershkowitz también manifiesta que hay evidencia de que en la construcción de la imagen de un concepto se combinan procesos visuales y analíticos y que el fenómeno prototipo y los juicios prototípicos derivan de procesos visuales. Por este motivo los atributos irrelevantes actúan como distractores ya que tienen una fuerte componente visual.
Las representaciones físicas intervienen en la percepción de los objetos y por consiguiente en las tareas de clasificación. Hershkowitz deduce de sus investigaciones que hay diferentes patrones de ideas erróneas dentro de la misma población: las ideas erróneas que los alumnos resisten a abandonar persistiendo en cursos siguientes, las ideas erróneas que los estudiantes corrigen con la adquisición de un concepto y las ideas erróneas que se incrementan con el aprendizaje de un concepto.
La posición de los objetos geométricos influye en su identificación. Hay distractores de orientación y distractores de configuración. Los primeros se refieren, por ejemplo, a que la imagen de un triángulo rectángulo podría incluir sólo aquellos con los catetos en posiciones

horizontal y vertical, cuando lo rotamos muchos estudiantes dejan de percibirlo como tal. Otro ejemplo sería un prisma hexagonal “apoyado” en una cara lateral, varios alumnos no lo identificarían como prisma. Un ejemplo de los distractores de configuración sería el de una altura que no es interior a la una figura.
Hay ciertas características que Hershkowitz (1989) identifica como críticas y otras que no. Las críticas se refieren a atributos que tiene que tener un concepto para ser ejemplo del concepto y las no críticas son aquellas que poseen algunos ejemplos. El no distinguir las características críticas de aquellas que no lo son lleva a errores conceptuales.
El nombre que se asigna a parte de los elementos de los poliedros lleva a confusiones e implica que se deje de ver el sólido como un todo para enfocarse sólo en parte de la figura. Es frecuente que se identifique como “base” al polígono en el que está apoyado el poliedro.
Otra dificultad que se les presenta a los estudiantes es el uso del vocabulario geométrico. Tienen múltiples problemas al enunciar relaciones o propiedades, en especial cuando hay conceptos conectados. No logran ver que un poliedro puede pertenecer a varias familias al mismo tiempo, por ejemplo si es un cubo no puede ser un prisma.
Guillén también cita los trabajos de Mesquita quien describe un obstáculo en el aprendizaje de la geometría que resulta del origen mismo de la geometría y que origina otros varios errores: el “doble estatus de los objetos geométricos”. En geometría un concepto, aunque es distinto de sus representaciones externas, corre el riesgo de ser difícilmente disociable de ellas. Por ello las representaciones externas de cualquier concepto geométrico están acompañadas de una ambigüedad fundamental que es lo que la autora denomina el “doble estatus de los objetos geométricos”.
En lo que sigue veremos algunas posibles estrategias para abordar estas dificultades. En primer lugar debemos lograr que los estudiantes se sientan seguros para trabajar en el aula con figuras tridimensionales y así evitar que se relegue el estudio de la Geometría del espacio. Analizar estos temas en el aula es importante para concientizar acerca de la problemática.
Guillén (2000) sugiere que en las primeras aproximaciones a los sólidos los estudiantes necesitan representaciones físicas de estos y que se debe proponer actividades que impliquen construir o generar estas representaciones. También afirma, basada en sus investigaciones, que las representaciones con armazones de los sólidos (por ejemplo con varillas) generan confusiones por lo que sugiere, al principio, usar modelos macizos (madera o cartulina) o huecos (construidos a través de su desarrollo en cartulina o por medio de materiales comerciales realizados con polígonos que se encastran). En este proceso los estudiantes deben integrar en el objeto mental todos los significados que provienen de distintos contextos en los que aparecen los sólidos, de ahí la importancia de la variedad en la presentación de las representaciones. Al incluir en su representación mental una variedad de materializaciones, los estudiantes pueden llegar a prescindir de los sólidos materializados. A estas representaciones mencionadas por la autora, se puede agregar el uso de programas de geometría dinámica que permiten girar y desplazar los sólidos permitiendo observar desde distintas perspectivas a los poliedros.
Por otro lado, según Parzysz (1988) no hay que apresurar el pasaje del uso del modelo en el espacio a la representación plana y se recomienda hacerlo cuando las imágenes mentales estén bien adquiridas. También indica que es necesario explicitar las reglas de estas representaciones planas. Dado que es frecuente que los futuros docentes no hayan tenido mucha experiencia con el trabajo con sólidos, sería favorable trabajar en una primera

instancia con modelos y desarrollos de poliedros y en el momento en el que sea necesario realizar representaciones planas explicitar las reglas de las representaciones en perspectiva. También debemos considerar que los trabajos de representación y construcción de sólidos implican el análisis de las propiedades de paralelismo y ortogonalidad que tienen los cuerpos por lo que es muy importante incluirlos en la formación de futuros docentes.
Hay que tener en cuenta las ideas erróneas de cara, arista y vértice que provienen de las representaciones físicas. Guillén (2000) observa que en los modelos en los que las aristas se arman con varillas unidas por bolitas, en los casos en los que una arista está armada por más de una varilla algunos estudiantes confunden las bolitas que unen las varillas con vértices y cada varilla con aristas. También menciona modelos armados con materiales comerciales en los que se arma una cara con varios polígonos, los estudiantes con frecuencia confunden cada polígono con una cara, especialmente cuando los polígonos tienen distintos colores. En el caso de estudiantes de formación docente explicitar estas dificultades puede ayudar a una mejor comprensión de los conceptos cara, polígono, arista y vértice.
Se debe lograr que los estudiantes incluyan en el objeto mental correspondiente todos los ejemplos de la familia de poliedros y no dependan de las posiciones prototipo evitando así las concepciones erróneas que se deriven de ellas. Para ello es importante trabajar con una amplia variedad de ejemplos. Luego el docente debe buscar estrategias que enfaticen de los atributos críticos, una estrategia posible sería trabajar con secuencias que incluyan variedad de ejemplos y no ejemplos. Según Zodik & Zaslavsky (2007), para el aprendizaje un concepto geométrico figural se recomienda trabajar con variedad de ejemplos que difieran en sus atributos no críticos y no limitarse a los ejemplos prototípicos. También advierten que los ejemplos pueden facilitar o impedir el aprendizaje de los estudiantes. En el artículo citado se muestran ejemplos donde las representaciones de un problema guían al estudiante ayudándolo y otros en los que una figura prototípica es un obstáculo para visualizar lo importante. Es importante tener estos aspectos en cuenta en la planificación de nuestras clases
Con respecto a la evaluación, la metodología de trabajo analizada no es compatible con una evaluación que valore si un estudiante logra resolver adecuadamente los ejercicios que plantea un libro de texto. Por ese motivo se busca emplearla para identificar dificultades y valorar los progresos en los aprendizajes de los estudiantes. Se propone una evaluación formativa con objetivos que atañen tanto al estudiante como al docente. Desde la perspectiva del estudiante se busca ayudarlo a identificar sus fortalezas y debilidades y los aspectos que deben mejorar. Con respecto al docente, el objetivo es realizar los ajustes necesarios a nuestra propuesta educativa.

Proyección en líneas de investigación

Cuando representamos un sólido en una hoja de papel tenemos el inconveniente de representar un objeto tridimensional en dos dimensiones. Esto implica que debamos realizar una o más proyecciones, lo que conlleva necesariamente una pérdida de información. Por eso un tema que es de interés en la investigación relacionada con la geometría espacial es el de las representaciones planas de los sólidos y cómo inciden en la visualización. En particular, me parece interesante indagar acerca de: "Cómo interpretan los estudiantes de segundo año de Magisterio las representaciones planas de los poliedros en perspectiva caballera".

La elección de la población se basa en experiencias personales relacionadas con las dificultades detectadas en los estudiantes de segundo año de Magisterio. En el aula se observan dificultades tanto para representar poliedros en perspectiva como para interpretar las representaciones planas de distintos cuerpos. Estas dificultades se acentúan frente a los poliedros que no son prismas o pirámides y en aquellos prismas cuyas caras laterales son paralelogramos no rectángulos o en las pirámides no rectas.
El objetivo de esta investigación sería analizar las posibles interpretaciones de las representaciones planas de los cuerpos en el espacio por parte de los estudiantes de Magisterio. Se busca investigar qué conclusiones extraen los estudiantes de segundo a partir de las representaciones en perspectiva caballera de los poliedros y en qué basan sus conclusiones. Los resultados a obtener pueden servir de insumo para mejorar las prácticas educativas de los docentes de Magisterio y para el diseño de actividades adecuadas que mejoren la visualización plana de las figuras tridimensionales.
Guillén (2010) asigna los siguientes usos a las representaciones (físicas y planas): se consideran como maneras de "comunicarse" los sólidos, se usan como un contexto para describir los conceptos dándoles variedad de significados, se emplean para compararlas con otras representaciones creando variedad de significados asociados a los conceptos que representan y, también, se miran como representaciones del sólido que a su vez lo sustituyen, convirtiéndose en un medio para estudiar el concepto correspondiente.
La perspectiva es un modo de representación plana que deforma la realidad de los objetos para dar la sensación de que estos son fieles a la realidad. Dado que la perspectiva de un objeto del espacio es su imagen por medio de una proyección, es importante conocer las propiedades de las proyecciones. En este caso nos enfocaremos en la perspectiva caballera que se caracteriza por ser una perspectiva paralela. Parzysz (1989) manifiesta que la preferencia de la perspectiva caballera en varios textos se debe seguramente a que tiene un equilibrio entre el "ver" y el "saber".
El siguiente es un esquema acerca de las características que se conservan y las que no en la perspectiva caballera (Adaptado de Dũng, 2014, pág. 137):

Reglas que se conservan	**Reglas que no siempre se conservan**
• Alineación y orden de tres puntos alineados. • Naturaleza de de los objetos de una dimensión (por ejemplo, un segmento se representa como un segmento). • Paralelismo. • Relación de concurrencia. • Relaciones de incidencia. • Proporciones de los segmentos con la misma dirección. • Baricentros. • Naturaleza de los objetos frontales (por ejemplo, si la cara delantera de un poliedro es un rectángulo, se representa como tal).	• Ortogonalidad: dos rectas ortogonales pueden ser representadas por rectas no perpendiculares. • Naturaleza de los objetos en dos dimensiones (por ejemplo, un rectángulo que no es una cara frontal se representa como un paralelogramo). • Las medidas.

Otra convención es que las líneas (en el caso de los poliedros serían las aristas) que no se ven se representan punteadas y las visibles con trazos continuos.
Teniendo en cuenta las reglas de la perspectiva se pueden extraer las siguientes conclusiones:

- Si dos segmentos que representan dos rectas son secantes, entonces las rectas no son paralelas.
- Si tres puntos que representan tres puntos del espacio en el diseño no están alineados, entonces no están alineados.
- Si un punto A' que representa a un punto A no es el baricentro de un sistema de puntos (A'_i,a_i) representantes de (A_i,a_i) del espacio, entonces A no es el baricentro del sistema de puntos (A_i,a_i).
- Si un punto está representado en el exterior de una cara de un sólido podemos concluir que no pertenece a esa cara.

A continuación nos referiremos a dos investigaciones francesas relacionadas con las representaciones planas en perspectiva caballera de los sólidos:
Parzysz (1989) investiga cómo los alumnos del nivel medio francés interpretan los diseños clásicos de la geometría del espacio que contienen planos, rectas y puntos en cuanto a sus posiciones relativas. Analiza los diseños habituales de los textos franceses concluyendo que son estereotipados y las convenciones acerca de las representaciones no están explícitas o difieren de un texto a otro. Indaga acerca de cómo los estudiantes decodifican estos diseños y cómo interactúan en la perspectiva caballera dos puntos de vista habituales: el "ver" y el "saber" que deriva del conocimiento de las propiedades que están en juego. Los resultados de su investigación evidencian la influencia de las convenciones y los diseños prototípicos en la lectura que hacen los estudiantes de las representaciones.
Chaachoua (1997) basa su investigación en las convenciones y representaciones tipo utilizadas en la enseñanza, en particular se centra en la perspectiva caballera. Parte de dos hipótesis, en la primera enuncia que las representaciones pueden influir en las concepciones de los alumnos desencadenando interpretaciones ilícitas; en la segunda plantea que "Las convenciones en cuanto a la representación de la perspectiva caballera se convierten en reglas de interpretación de un dibujo en los alumnos". En su trabajo analiza las reglas acerca de las representaciones en perspectiva caballera que se presentan en distintos textos a nivel medio franceses y concluye que hay una confusión entre las reglas de la perspectiva caballera y las convenciones. Además, sólo algunas reglas y convenciones son explicitadas y varían de un texto a otro. El interés de la investigación está en analizar las propiedades y relaciones geométricas que los alumnos deducen a partir de la representación de un objeto en perspectiva caballera. En particular el foco está en analizar las interpretaciones que subyacen a la lectura de un diseño que son consecuencia de los diseños prototípicos que se emplean de manera implícita en la enseñanza. En su investigación toma varios elementos de la de Parzysz pero incluye la variable "sólido" empleando los sólidos que se emplean con mayor frecuencia. Concluye que las representaciones adoptadas en la enseñanza van más allá de ilustrar una situación espacial transformándose en "reglas de interpretación". Asimismo constata que las convenciones de representación de la perspectiva caballera se transforman en reglas de interpretación de un dibujo en los alumnos. Además destaca que los estudiantes usan en forma conjunta estas

reglas con los teoremas de la geometría del espacio para justificar sus respuestas sin que se presenten conflictos debido a que las representaciones ilustran a los teoremas.
Se propone trabajar con los estudiantes de segundo año puesto que en ese curso trabajan con geometría espacial. En matemática de primero la geometría es plana y se enfatiza el hecho de que la validación en geometría no depende de las mediciones ni de las características que parecen válidas por simple constatación sensorial sino que hay que apoyarse en las propiedades de los objetos geométricos.
En cuanto a la institucionalización del tema, las representaciones en perspectiva parecen ser un saber cuyas reglas están implícitas y que difícilmente se expliciten en el aula. Con frecuencia las evidencias del diseño constituyen un “obstáculo epistemológico” (la noción de obstáculo epistemológico corresponde a Gastón Bachelard refiriéndose a elementos psicológicos que impiden o dificultan el desarrollo de conceptos, tanto en el desarrollo histórico del pensamiento científico como en la práctica de la educación) que no permite que el alumno avance en el tema de las demostraciones ya que según su punto de vista no hay nada que demostrar.
Por lo anteriormente expuesto podemos conjeturar que los estudiantes de magisterio confunden las conclusiones que extraen de las representaciones y aquellas que provienen de las propiedades de los sólidos. Por ejemplo, ante la representación de un prisma sería interesante analizar si el paralelismo de dos rectas que contienen a dos aristas de una misma cara se debe a que se percibe en la representación o si se desprende de que la cara es un paralelogramo.
Una investigación en esta temática puede tener derivaciones positivas en el sentido de concientizar que es necesario explicitar las reglas de las representaciones de los sólidos en perspectiva. También sería favorable en cuanto a que se reconocería cuáles son las deducciones válidas que se desprenden de las representaciones planas de los sólidos.
Por un lado, la concientización de esta situación puede modificar las prácticas de los docentes de formación docente derivando en una mayor explicitación de las reglas mencionadas. Con estas modificaciones los estudiantes tendrían más claro cómo representar correctamente un poliedro en perspectiva caballera basándose en sus propiedades y discriminar las lecturas válidas que se pueden hacer de la representación de un poliedro de las que se derivan de las propiedades del mismo.
Esto tendría también repercusiones en la escuela primaria ya que los estudiantes de Magisterio tendrían en cuenta estos conceptos en su futura práctica docente, favoreciendo el aprendizaje de sus alumnos.

Bibliografía

Ancona, M. (2003). La historia de las matemáticas en la educación matemática. *EMA*, 30-46.

Behnke, H., Bachmann, F., Fladt, K., & Kunle, H. (1986). *Fundamentals of Mathematics Volume II Geometry.* Cambridge: MIT press.

Chaachoua, H. (1998). Géométrie dans l'espace. Le point sur la lecture des dessins par des élèves en fin de collège. *Petit x*, 37-68.

Clemens, S., O'Daffer, P., & Cooney, T. (1998). *Geometría con aplicaciones y solución de problemas.* México: Addison Wesley Longman de Mexico S.A.

Coexeter, H. (1971). *Fundamentos de Geometría.* México: Limusa.

Coxeter, H., Longuet-Higgins, M., & Miller, J. (1953). *Uniform Poliedra.* Londres: Philosophical Transactions of the Royal Society of London.

Dũng, M. (2014). Une étude didactique des praxéologies de la représentation en perspective dans la géométrie de l'espace, en France et au Viet-Nam. *Histoire et perspectives sur les mathématiques*. France: Université de Grenoble.

Extremiana, I., Hernández, J., & Rivas, T. (2001). *Poliedros.* Obtenido de https://www.unirioja.es/cu/luhernan/index.html

Freudenthal, H. (1984). En todos los niveles: ¡Geometría! *I.C.E. de la Universidad de Zaragoza*, 15-34.

González Urbaneja, P. M. (1991). Historia de la Matemática: Integración cultural de las matemáticas: Génesis de los conceptos y orientación de su enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias*, 281-289.

Guillén, G. (2000). Sobre el aprendizaje de conceptos geométricos relativos a los sólidos. Ideas erróneas. *Enseñanza de las Ciencias*, 35-53.

Guillén, G. (2010). ¿Por qué usar sólidos como contexto en la enseñanza /aprendizaje de la geometría? ¿Y en la investigación? En M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo, & T. Sierra, *Investigación en Educación Matemática XIV* (págs. 21-68). Lleida: SEIEM 21.

Hershkowitz, R. (1989). Visualization in geometry-two sides of the coin. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 61-76.

Izcovich, H. (2008). *La matemática escolar. Las prácticas de enseñanza en el aula.* Buenos Aires: AIQUE.

Parzysz, B. (1988). "Knowing" vs "Seeing." Problems of the Plane Representation of Space Geometry Figures. *Educational Studies in Mathematics*, 79-92.

Parzysz, B. (1989). *Représentations planes et enseignement de la géométrie de l'espace au lycée. Contribution a l'étude de la relation voir/savoir.* Paris: Université Paris.

Puig Adam, P. (1980). *Curso de Geometría Métrica- Tomo I-Fundamentos.* Madrid: Euler, G. Puig Ediciones.

Sadovsky, P., Alagia, H., & Bressan, A. (2005). *Reflexiones teóricas para la Educación Matemática.* Buenos Aires: Ediciones del Zorzal.

Zaslavsky, O. (1995). Open-ended tasks as a trigger for mathematics teacher's professional developement. *For the Learning of Mathematics*, 15-20.

Zodik, I., & Zaslavsky, O. (2007). Is a visual example i geometry always helpful? *Proc. 31st Conference of the Int. Group for the Psychology of Mathematics Education* (págs. 265-272). Seoul: PME.

Poliedros

Leticia Medina

Introducción

Organizamos este proyecto en torno a tres ejes. Iniciamos con los aspectos disciplinarios vinculados a la geometría y al estudio de los poliedros. Posteriormente exponemos los aspectos didácticos de nuestra propuesta de enseñanza. Finalmente formulamos nuestra proyección en una línea de investigación. Las referencias bibliográficas de las tres secciones se adjuntan al final del documento.

a) Aspectos disciplinarios

Esta sección comienza con un análisis histórico epistemológico de la geometría. Posteriormente desarrolla algunos conceptos matemáticos vinculados a los poliedros. Por la extensión de este trabajo y teniendo en cuenta que nuestra propuesta didáctica se enfoca en la enseñanza de algunos aspectos de los poliedros a través del trabajo con poliedros regulares en la formación magisterial, nuestro desarrollo abarca solo aquellos conceptos matemáticos que se movilizan con esta propuesta. La sección finaliza con una breve reflexión sobre la importancia de enseñar geometría y abordar el estudio de los poliedros.

a.1) Análisis histórico epistemológico

Distintas civilizaciones y culturas han prestado atención a las formas y las regularidades, dando muestras de una capacidad inherente al ser humano de abstraer propiedades de los objetos que lo rodean, hasta el punto de construir un cuerpo organizado de conocimientos como la geometría. Los registros más antiguos de conocimientos geométricos se vinculan a la civilización egipcia; un problema concreto como medir y repartir tierras impulsó el desarrollo de un conjunto de reglas empíricas para calcular áreas y volúmenes. De una forma similar surgieron conocimientos geométricos en Mesopotamia; los babilonios también desarrollaron métodos para calcular el área del círculo, triángulo y trapecio y para calcular el volumen de un conjunto importante de cuerpos: prisma recto, cilindro, tronco de cono, pirámide cuadrangular truncada, entre otras. Si bien en un comienzo el conocimiento de estas cuestiones se limitó a su función utilitaria sin pretensiones de justificar su certeza, esta situación cambió drásticamente con la intervención de los griegos. La civilización griega se orientó a aumentar el conocimiento verdadero y reivindicó la geometría como un área del conocimiento privilegiada en la que las verdades pueden deducirse y validarse. Platón (V a. C.) impulsó la geometría como una vía de acceso para comprender el mundo físico imperfecto, a través del conocimiento de las formas ideales que lo modelan. La geometría se consideró una ventana a una realidad superior, perfecta, inmutable y eternamente cierta, convirtiéndose en el paradigma de la verdad.

Aristóteles identificó que la riqueza de la geometría radicaba en su método de razonamiento deductivo y adaptó exitosamente este método a la física; la verdad y la certeza de la geometría se constituyeron en la base del pensamiento filosófico natural. Según Bursill-Hall (2002) esto podría haber llevado a Euclides a axiomatizar la geometría, convencido de que esta era el paradigma de la única verdad y que tenía que ser construida sobre una base demostrable, segura y cierta. En la obra *Elementos* escrita por Euclides surge “la prueba” como un término que garantiza de forma sólida e irrefutable la certeza de un enunciado, posicionando así a la geometría clásica, por los siguientes veinte siglos, como una ciencia racional y formal y un modelo insuperable e inigualable de teoría deductiva, sinónimo de perfección y verdad. Bursill-Hall (2002) sugiere que la demostración es la idea matemática más importante de todas y la señala como responsable de que la geometría sea epistemológicamente diferente de otras áreas del conocimiento.

En el Renacimiento la geometría fue vista como una ciencia divina cuyo objeto de estudio era la naturaleza misma de Dios y su revelación, una ventana especial a la mente de Dios que se revela a través de patrones y estructuras geométricas. Según Bursill-Hall (2002) esto le otorgó a la geometría y a los argumentos geométricos una autoridad y un peso que nunca antes habían tenido. Los jesuitas promovieron el estudio de la geometría abstracta y rigurosa para entrenar y ejercitar la mente, pues esto facilitaría lidiar con los infinitos misterios de Dios y la revelación y traería consigo fe y poder.

En el siglo XVI Galileo y Descartes se encargan de extender ampliamente los dominios de la geometría; esta se presenta como una forma de modelar fenómenos físicos pues, aunque no son matemáticos en sí mismos, las leyes que rigen su comportamiento se expresan de alguna manera utilizando la geometría. Surge la idea de dividir el complejo en sus partes componentes, de aislar los fenómenos "puros" de la naturaleza y luego estudiar su comportamiento en un aislamiento aparente, usando la idealización geométrica. Descartes proclama que todos los fenómenos físicos pueden entenderse completamente por medio de la geometría, que esta es abierta a nuestra comprensión y clara para nuestros sentidos racionales, poniendo por primera vez a la experimentación en el centro de la geometría. Durante la revolución científica, el método paradigmático predominante para entender la naturaleza fue la geometría, pues esta permitía modelarla y a través de ella las verdades geométricas de la naturaleza se tornaban paradigmáticamente verdaderas y ciertas. Este es el comienzo de un pensamiento físico-matemático que se convertiría en el paradigma de la nueva física del siglo XVIII, con la geometría como argumento de la nueva filosofía mecánica. Según Bursill-Hall (2002) la geometría fue el símbolo del conocimiento ordenado y razonado; enseñar geometría significó educar a los hombres con el poder de la razón. En esta época la capacidad de apreciar y utilizar los frutos de la geometría se extendió a un público más amplio y los pensadores de la Ilustración tomaron el modelo geométrico como modelo social. Argumentaron a favor de una sociedad racional, ordenada y bien gobernada, en la que la organización de las relaciones sociales, al igual que el universo, debía regirse por leyes sociales que permitirían guiarla hacia la armonía.

Según Olmedo (2015), en la segunda mitad del siglo XX el surgimiento de las geometrías no euclidianas puso en duda los ideales de certeza que hasta entonces convertían a la geometría, y a la matemática en su conjunto, en objeto de admiración filosófica. Se cuestionó el carácter necesario y absoluto de las verdades matemáticas, lo que trajo un cambio de actitud filosófica respecto de ese conocimiento y una crisis de sus fundamentos que increpó a la filosofía de la matemática. Diferentes posturas caracterizaron el conocimiento matemático y pretendieron fundamentar su naturaleza; los formalistas vieron la matemática como combinación de símbolos carentes de significado y la deducción formal como la tarea esencial del matemático; los logisistas vieron la matemática como extensión de la lógica y postularon que todo es reducible a sus principios; los intuicionistas apreciaron la matemática como creación de la mente humana, los objetos matemáticos como entidades mentales y basaron sus fundamentos en el pensamiento; finalmente, para los platonistas las leyes matemáticas son equiparables a las leyes naturales, los objetos matemáticos existen independientemente de los seres humanos y los fundamentos de la matemática residen en

el ámbito en el que existen los objetos matemáticos. Olmedo señala que, si bien aún se observan repercusiones de este debate, la idea de llegar a un consenso sobre los fundamentos de la naturaleza del conocimiento matemático ha fracasado. Entendemos que cada una de estas corrientes filosóficas prioriza aspectos distintos de la naturaleza de las matemáticas y que estos enfoques resultan de interés por su complementariedad al ser tenidos en cuenta para abordar su enseñanza.
Los párrafos anteriores dan cuenta de interconexiones entre la geometría y aspectos filosóficos, sociales, intelectuales y científicos de las sociedades que fueron construyendo nuestra historia. Ayudan a entender por qué los conocimientos geométricos, y matemáticos en general, son vistos tradicionalmente como verdades incuestionables e inmutables, y nos recuerdan que el papel pedagógico privilegiado que ha desempeñado la geometría se vincula al desarrollo del pensamiento ordenado y riguroso. Estos párrafos hacen foco en algunos resultados de un proceso y ayudan a entender por qué la geometría puede ser vista como alejada del mundo físico, tan perfecta que sería imposible que un simple mortal pudiera crearla. Sin embargo, es posible dar una mirada más profunda a los procesos de construcción de estos conocimientos, una mirada que haga foco en los procesos de pensamiento que involucra a una persona haciendo geometría, en los procesos de creación, de exploración e indagación, de búsqueda de alternativas, ejemplos, contraejemplos, de búsqueda de argumentos y justificaciones. Si tenemos en cuenta los aportes de "hacer geometría" al desarrollo del individuo como ser social y al desarrollo de los futuros docentes en particular, observamos que estos procesos son tan valiosos como el conjunto de conocimientos geométricos que hemos construido a lo largo de todos estos siglos.
Guillén (2010) sugiere atender múltiples aspectos de la geometría escolar. Su aspecto creativo permite introducir al estudiante en el "hacer matemáticas"; su aspecto lógico permite desarrollar el razonamiento lógico, la capacidad de describir, clasificar y organizar, aprender diferentes métodos de demostración y apreciar diferentes niveles de rigor en la prueba; su aspecto utilitario la realza como herramienta para modelizar la realidad; y finalmente su aspecto simbólico constituye una oportunidad de aproximarse al simbolismo geométrico, de un modo experimental y directo, a partir de problemas concretos que se simbolizan o manipulan.

a.2) Conceptos matemáticos

Los poliedros han estado ligados al origen y desarrollo de áreas fundamentales dentro del edificio matemático. Además de constituirse en un motor para el desarrollo de la geometría, han servido de inspiración para otras áreas como el álgebra, el análisis, la topología y la teoría de grafos. Los poliedros y en particular los poliedros regulares, han fascinado a muchas civilizaciones desde los pueblos neolíticos hasta nuestros días. Por sus especiales atributos geométricos y estéticos, los poliedros regulares han sido símbolo de la belleza ideal, fuente de inspiración y creación para artistas, filósofos, astrónomos, inventores y matemáticos.
El sistema escolar uruguayo aborda el estudio de los poliedros en el contexto de la geometría euclidiana, razón por la que este trabajo adopta este enfoque. Comenzaremos estableciendo una definición de poliedro. A lo largo de la historia se han manejado múltiples definiciones, algunas designan al objeto matemático poliedro como una superficie, mientras que otras lo consideran como un cuerpo sólido. Puig Adam (1981), por ejemplo, comienza definiendo el concepto de superficie poliédrica convexa y a partir de ella define poliedro

convexo. Toma luego estas definiciones como base para ampliar la noción a superficies poliédricas no convexas y luego definir el concepto de poliedro no convexo. Cabe acotar que las definiciones formuladas sobre superficies poliédricas y poliedros no convexos se restringen a poliedros no convexos simples, es decir, no dan cabida a los poliedros con huecos.

Realizando un análisis sobre las definiciones de los objetos matemáticos, Luis Puig (1997) señala que la aparición de contraejemplos globales a una propiedad ya demostrada, produce una tensión entre el concepto, el teorema y su prueba; agrega que, si bien esto puede resolverse de varias maneras, todas ellas afectan al concepto. Esto sucedió con el concepto de poliedro cuando Lakatos aplica la relación de Euler, cuya validez había sido aceptada por la comunidad matemática, a poliedros con agujeros como el cubo con un hueco cúbico en su interior y advierte que estos sólidos no verifican esta relación. Según Puig, estas situaciones llevan a que los objetos sean vistos de otra manera para hacer que dejen de ser contraejemplos, y finalmente, repercute en una ampliación del campo semántico. Desde una perspectiva del aula de matemática como comunidad de práctica, entendemos que este proceso es parte del hacer matemática, que formular una definición implica un acuerdo entre partes y que, si bien esta puede ser válida en cierto contexto, es susceptible de ser mejorada o modificada.

Resulta de nuestro interés que los futuros docentes puedan apreciar también el carácter cultural de la matemática. En este sentido, entendemos que la definición de poliedro ha de surgir como construcción de los propios estudiantes a partir de la exploración, del análisis de ejemplos y no ejemplos de poliedros y que la definición será provisoria y consensuada por nuestra comunidad de clase. En su construcción buscaremos dotar al objeto matemático poliedro de un conjunto de características que dependen de los usos que pretendemos darle a esa noción. Consideraremos aquí algunos de los aspectos que formarán parte del debate al construir una definición de poliedro. ¿Llamaremos poliedro a un sólido o a una superficie? ¿Qué características resultan fundamentales para estos objetos? ¿Basta con decir que el poliedro tiene caras poligonales? Una definición aceptable para iniciar el trabajo en un curso de matemática para la formación de futuros docentes podrá ser la siguiente: Un poliedro es una figura delimitada por un número finito de polígonos (llamados caras). Cabe observar que en esta definición no se hacen aclaraciones respecto a que dos caras unidas por una arista (llamémosle caras contiguas) no estén contenidas en un mismo plano. Al igual que le ocurrió a Lakatos, esto seguramente nos traerá dificultades cuando trabajemos con la relación de Euler, lo que nos llevará a rever esta definición y a complementarla al menos con la exigencia de que cada par de caras contiguas deberán estar contenidas en planos distintos.

Algunos poliedros no presentan hendiduras ni huecos, los poliedros convexos. Teniendo en cuenta que son figuras convexas pueden ser definidos como poliedros en los que dos puntos cualesquiera de ellos determinan un segmento contenido en dicho poliedro. Cabe aclarar que, si hubiéramos definido poliedro como una superficie, tendríamos acá una primera dificultad. Una definición que se correlaciona más con la idea física de que es posible “apoyar” el sólido en cualquiera de sus caras apunta a definirlo como un poliedro en el que cualquier plano que contenga a una de sus caras deja en un mismo semiespacio a todo el poliedro.

Cada característica de un poliedro puede dar origen a una clasificación posible para ellos. Los criterios habitualmente utilizados para clasificar los poliedros han puesto atención a múltiples aspectos, entre ellos: forma o número de caras del poliedro (si son todas iguales, si son todas regulares, si todas corresponden a un mismo tipo de polígono, su cantidad); aristas (si todas sus aristas unen dos polígonos iguales o del mismo tipo); vértices (cuántas aristas concurren en cada vértice y si este número se mantiene para todos los vértices); relaciones de paralelismo o perpendicularidad entre caras; inclinación respecto a una cara particular; cantidad o posición de los ejes de simetría; cantidad de diagonales del poliedro; ser inscriptible; relaciones de dualidad; tipos de ángulos poliédricos, etc.

Además de los sólidos platónicos sobre los que trataremos en los siguientes párrafos, los poliedros convexos particulares que más difusión han tenido son los prismas y pirámides. No enunciaremos en este trabajo las definiciones de cada uno de estos poliedros, para ello basta remitirse por ejemplo a Moise y Downs (1986).

Continuando con una mirada de lo general a lo particular, nos enfocaremos en ciertos poliedros convexos muy particulares, los poliedros regulares convexos. Estos poliedros despertaron el interés del ser humano al menos 2000 años antes de Cristo; el primer acercamiento del que se tiene evidencia procede de un yacimiento neolítico en Escocia, donde se encontraron figuras de barro que dan cuenta que, desde esta época, se le reconocieron cualidades especiales al tetraedro, al dodecaedro y al icosaedro. Sin embargo, el origen de los sólidos platónicos como elemento de estudio se vincula a la antigua Grecia, Platón relacionó los cinco poliedros regulares convexos con el universo y los elementos de la naturaleza: fuego, tierra, aire y agua, por lo que aún hoy se los conoce como sólidos platónicos.

Los poliedros regulares (convexos) pueden ser definidos como aquellos poliedros convexos (I) cuyas caras son polígonos regulares (II) e iguales (III) y en cuyos vértices concurren la misma cantidad de aristas (IV). Cabe destacar la importancia de cada una de las condiciones enunciadas, basta eliminar solo una de ellas para abarcar otros poliedros no tan particulares. Si eliminamos la condición (I) ampliamos la familia a nueve poliedros, sumando los cuatro poliedros de Kepler-Poinsot. Si descartamos la condición (II) incluiríamos otra familia (aún sin apellido), a la cual pertenece por ejemplo el octaedro convexo cuyas caras son todos triángulos isósceles iguales, pero no equiláteros. Si descartamos la condición de caras uniformes (III) estaremos incluyendo la familia de los sólidos arquimedianos. Finalmente, si excluimos únicamente la condición de uniformidad de los vértices (IV) estaríamos incluyendo otra familia de sólidos al que pertenece por ejemplo el hexaedro de caras uniformes (doble tetraedro). Este análisis nos hace pensar que los poliedros regulares poseen múltiples aspectos particulares que los destacan del resto. Intentaremos abordar algunos de ellos.

Desde Platón se supo la existencia de solo 5 poliedros regulares, pero fue Euclides quien pudo justificar la imposibilidad de poder construir otros. Según Dalcín y Molfino (2015) el estudio de los poliedros regulares realizado por Euclides en su obra Elementos, resulta particularmente importante para la Historia de la Matemática porque constituye el primer ejemplo de un teorema fundamental de clasificación. En Elementos (XI), Euclides introduce uno por uno los poliedros regulares y reconoce que la suma de los ángulos de los polígonos alrededor de cada vértice de un poliedro (convexo) debe ser siempre menor que 360°. En el libro XIII inscribe cada uno de los poliedros regulares en una esfera haciendo explícita la razón de la arista del sólido al diámetro de la esfera circunscrita y finaliza su obra enunciando y demostrando que solo existen 5 poliedros regulares (convexos). La sencilla demostración de Euclides se basa en estudiar las clases de polígonos que pueden formarse a partir de considerar las caras de los poliedros regulares, teniendo en cuenta la restricción de que la suma de los ángulos planos de los polígonos que concurren en cada vértice debe ser menor que cuatro ángulos rectos. Coxeter (1984) recrea la idea de esta demostración e incorpora el símbolo de Schäfli que permite registrar algunas propiedades importantes de los poliedros, lo que nos brinda una notación conveniente para identificar cada uno de los poliedros regulares. En esta notación, un poliedro regular que tiene caras regulares de p lados y cuyo grado de cada vértice es q, queda representado por $\{p,q\}$. Siguiendo el método utilizado por Euclides, Coxeter observa por ejemplo, que para formar un poliedro regular utilizando cuadrados, se requiere que en cada vértice concurran tres cuadrados y la figura se cierra cuando hemos usado seis de ellos, dando lugar a un cubo de configuración $\{4,3\}$. Con esa misma idea e intentando variar la cantidad de polígonos que se agrupan en un vértice, y posteriormente, la cantidad de lados del polígono considerado, es posible concluir que solo existen cinco poliedros convexos regulares, de configuraciones $\{3,3\}$; $\{3,4\}$; $\{3,5\}$; $\{4,3\}$; $\{5,3\}$, correspondientes al tetraedro regular, octaedro regular, icosaedro regular, hexaedro regular y dodecaedro regular, respectivamente. Esta justificación además de probar, explica; permite apreciar no sólo que la proposición es válida, sino además, proporciona una justificación al hecho de que solo existan 5 poliedros regulares convexos, lo que marca la riqueza pedagógica e histórica de esta demostración.

Los sólidos Platónicos sirvieron de inspiración para el surgimiento de la teoría de grafos. Si se elige una de las caras de un poliedro regular y se proyectan las aristas del poliedro desde un punto por encima del centro de esta cara sobre un plano, se obtiene una figura denominada diagrama de Schlegel. De la misma forma se la puede obtener si “rompemos” una cara y “estiramos” las restantes sobre la pared, sin romper las aristas. Estas transformaciones constituyeron la base para el desarrollo de la topología y la teoría de grafos, y facilitaron el estudio de algunos de sus problemas, como la demostración de la relación de Euler. Por su alto grado de simetría, en el caso de los sólidos Platónicos, estos diagramas son únicos sin importar la cara desde la que se proyecte y se preservan muchas de las características del poliedro, como la conexión entre vértices y lados, incluso se conservan algunas de sus simetrías.

Los sólidos platónicos también promovieron el desarrollo del álgebra. Estudiar el efecto de las simetrías sobre los sólidos platónicos y en particular estudiar las simetrías de rotación y reflexión sobre los ocho vértices del cubo, llevó de manera natural al estudio de las permutaciones de ocho elementos. Estudiando la acción de estas simetrías sobre los vértices del cubo, pudieron generalizarse propiedades que contribuyeron a forjar la noción de grupo, incidiendo positivamente en el desarrollo de la teoría de grupos.

Los sólidos platónicos también fueron fuente de inspiración para el desarrollo de la Geometría Descriptiva. Durero (1525) describe cada uno de los cinco poliedros regulares y los representa por su desarrollo en un plano y por dos proyecciones ortogonales sobre los planos horizontal y vertical, constituyendo así un antecedente para el desarrollo de la Geometría Descriptiva de Monge. El desarrollo plano realizado por Durero, permite reconstruir el objeto poliédrico en tres dimensiones y constituye el procedimiento que actualmente se utiliza en la escuela para representar los poliedros regulares. Sus tentativas de representación en perspectiva de los poliedros, tuvieron gran influencia en el desarrollo ulterior de la perspectiva en el arte del Renacimiento, en la que se creía que toda criatura, por designio divino, estaría compuesta por combinaciones poliédricas.

En 1755 Euler informa a Goldbach que ha encontrado una nueva relación para los poliedros convexos, señalando que “la cantidad de ángulos sólidos más la cantidad de caras es igual a la cantidad de aristas del poliedro más dos” (citado en Nápoles, 2002, p. 7). Resulta sorprendente que los griegos, con el amplio desarrollo realizado en el estudio de los poliedros, no hubieran conocido esta relación anteriormente. Para justificar su afirmación y sin advertir las restricciones que debe tener el poliedro para que la relación sea válida, Euler emplea el uso de transformaciones sucesivas del poliedro a otro más sencillo (un tetraedro), y da muestras de un ingenioso método que daría inicio a la teoría de grafos. Sin embargo, la comunidad matemática de la época no aceptó esta demostración como válida. La prueba que posteriormente ofrece Cauchy es una de las primeras en ser aceptada y asimismo refutada. Cauchy supone que el poliedro está hecho de goma, que se le elimina su cara frontal y se lo aplana creando una red poligonal plana. Señala que para esta red se verifica que $V - A + C = 1$; para demostrarlo propone inicialmente triangular la red, exigiendo que cada vértice pueda ser unido a otro por medio de una diagonal, observando que esta relación no sufrirá variación. Seguidamente propone eliminar triángulos suprimiendo una arista, o dos aristas y un vértice, hasta finalmente obtener un solo triángulo. Observa que la relación anterior no se altera tampoco con las eliminaciones, que el triángulo final obtenido cumple también la relación enunciada. Al considerar que a la red inicial se le quitó una cara, concluye que $V - A + C = 2$ para el poliedro completo. Esta prueba sufrió críticas relacionadas con las formas en las que se desarrolla: podría ser que no todos los poliedros puedan estirarse en un plano; no todos los que se puedan estirar en el plano puedan dividirse en triángulos y que el orden de esta eliminación influya en el resultado. Ante el aparente fracaso de la prueba, Legendre traslada esta demostración al terreno de la geometría esférica; supone un poliedro colocado dentro de una esfera de radio unidad y que este es proyectado dentro de ella, formando una red poligonal esférica susceptible de ser triangulada. Usando las áreas y los ángulos internos de cada triángulo esférico, desarrolla la primera demostración validada por la comunidad científica de la época sobre la relación de Euler. Dado que utiliza por primera vez una transformación topológica de un poliedro convexo a una esfera, marca un hito en el desarrollo de la topología. Actualmente hay cerca de una veintena de demostraciones diferentes de la relación de Euler (ver Nápoles, 2002), la mayor parte de ellas se basan en nociones de topología o teoría de grafos, dos áreas de estudio en las que la modelización realizada de estos sólidos constituyó una inspiración importante. Resulta interesante observar que esta relación fue extendida por Poincaré a la noción de politopo quien mostró que $V - A + C$ es un invariante topológico (actualmente conocido como relación de Euler-Poincaré) y es uno de los tópicos más representativos de la moderna Topología Algebraica.

Es relativamente sencillo observar que el cubo y el octaedro tienen las mismas simetrías. Piero della Francesca, pintor y matemático del siglo XV, realizó un estudio profundo de las formas de pasar directa o indirectamente de unos sólidos platónicos a otros, vinculando de múltiples maneras los diversos poliedros. Fue el primero en señalar que el sólido cuyos vértices son los centros de las caras de un sólido platónico también es platónico, y que el sólido determinado por los planos tangentes en los vértices a la esfera circunscrita a un sólido platónico también es platónico. Su obra da evidencias de conocer la noción de dualidad y los vínculos entre parejas de sólidos emparentados por esta relación: el cubo y el octaedro; el icosaedro y el dodecaedro y finalmente el tetraedro emparentado consigo mismo. Recordemos que todo poliedro P puede vincularse a otro poliedro denominado dual, de forma única, tal que las caras y los vértices de P están en correspondencia biyectiva con los vértices y caras de su dual. El concepto de dualidad que está implícito en estas ideas, no

se limita a la correspondencia antes señalada y constituye actualmente una noción importante dentro de la matemática. Esta potente idea permite "traducir" conceptos, teoremas o estructuras matemáticas en otros conceptos, teoremas o estructuras, mediante una correspondencia biunívoca que ha permitido la resolución de problemas complejos.
Finalmente, se observa que la inscripción de un poliedro en su dual no es la única inscripción posible. A modo de ejemplo, el tetraedro es inscriptible en un cubo. Analizar los centros, ejes y planos de simetría de los poliedros platónicos, permite estudiar otras posibles relaciones de inscripción entre estos cuerpos. De todas las relaciones de inscripción posibles, resultarán particularmente interesantes aquellas en las que los poliedros están colocados de manera que las simetrías comunes coincidan, lo que nos lleva a analizar las simetrías en cada uno de estos poliedros.
Inicialmente se observa que todos los poliedros regulares, a excepción del tetraedro, tienen un solo centro de simetría. Respecto a los ejes de simetría, el tetraedro tiene siete (cuatro de orden tres y tres de orden dos); el cubo y el octaedro tienen trece (tres de orden cuatro, cuatro de orden tres y seis de orden dos); finalmente el dodecaedro y el icosaedro tienen treinta y un ejes de simetría (seis de orden cinco, diez de orden tres y quince de orden dos). En relación a los planos de simetría, el tetraedro tiene seis, el cubo y el octaedro tienen nueve y por último, el dodecaedro y el icosaedro tienen quince.
Se observa que el conjunto de las simetrías del tetraedro, es un subgrupo del conjunto de las simetrías del cubo, y que hay simetrías comunes al cubo y dodecaedro, tetraedro y dodecaedro. Se concluye que, además de los pares de poliedros duales, al tener simetrías comunes los siguientes pares de poliedros pueden introducirse uno en otro: el tetraedro en el cubo y en el octaedro; el tetraedro en el dodecaedro y en el icosaedro; el cubo, octaedro, dodecaedro e icosaedro en el tetraedro; el cubo en el dodecaedro y en el icosaedro; el octaedro en el dodecaedro y en el icosaedro; el dodecaedro y el icosaedro en el cubo y en el octaedro. El famoso artista neerlandés Escher obtuvo en estos poliedros gran inspiración lo que lo llevó a construir con hilo y alambre un modelo de los cinco cuerpos platónicos, inscritos unos en otros, mostrando su fascinación por sus características de dualidad.

a.3) Síntesis

La regularidad y simetría de los sólidos platónicos, junto a la posibilidad de ser circunscritos en una esfera, son algunos de los factores determinantes para que los poliedros regulares trasciendan la matemática y se hayan vinculado de una u otra forma a disciplinas como la filosofía, astronomía, teología, cosmología, arte, literatura, medicina, ética y política. A lo largo de la historia han sido explorados bajo múltiples miradas y han servido de inspiración para el desarrollo de nuevas ideas, cualidades que destacan su potencial didáctico.

b) Aspectos didácticos

b.1) Introducción

En esta sección abordaremos la enseñanza de los poliedros en el curso de Matemática II, en la formación de maestros, tomando como eje los poliedros regulares convexos. Inicialmente fundamentamos la relevancia del estudio de los poliedros y los poliedros regulares en la formación matemática de futuros maestros, presentamos algunos aportes de la investigación en Matemática Educativa y definimos los objetivos que nos planteamos al abordar este tema. Luego fundamentamos la propuesta y explicitamos algunas consideraciones generales sobre la metodología de trabajo. Seguidamente presentamos algunas actividades que se consideran potentes para el logro de nuestros objetivos, fundamentando su elección y las posibilidades de trabajo que brindan. Finalmente hacemos explícito nuestro enfoque sobre la evaluación en la formación de docentes y dejamos un listado con parte de la bibliografía recomendada a los estudiantes magisteriales.

b.2) Relevancia del tema en la formación docente

La formación docente debe promover la construcción de los conocimientos que los futuros educadores necesitan para desarrollar su profesión con solvencia y dignidad. Por otra parte, Ball, Thames y Phelps (2008) categorizan el *conocimiento matemático requerido para la enseñanza* (MKT por sus siglas en inglés) en seis subdominios, tres de ellos vinculados al dominio del *conocimiento del contenido* y otros tres vinculados al *conocimiento didáctico del contenido*. Entendemos que los cursos de Matemática en la formación de docentes deben, al menos, promover el desarrollo de conocimientos en los tres subdominios vinculados al *conocimiento del contenido,* estos son: *conocimiento común del contenido (CCK), conocimiento especializado del contenido (SCK) y conocimiento del horizonte matemático (HCK)*.

El curso de Matemática II deberá hacerse cargo, no solo de revisar y resignificar los principales conceptos, estructuras y procedimientos vinculados a la geometría del espacio que conforman el currículo escolar, también deberá promover el desarrollo de saberes específicos que sólo resultan de interés de un docente cuando se propone desarrollar tareas vinculadas a la enseñanza de la geometría. El estudio de los poliedros regulares promueve el conocimiento del espacio, invita a explorar diferentes tipos de representaciones, permite mejorar los modelos mentales y desarrolla la capacidad de abstracción. Brinda una oportunidad para reencontrarse con objetos matemáticos ya conocidos, “desarmarlos” y reconstruirlos. Resulta oportuno para problematizar ciertas cuestiones: ¿Por qué solo existen cinco poliedros regulares? ¿Hay múltiples definiciones de un objeto matemático? ¿Son equivalentes? Estos conocimientos serán imprescindibles para proporcionar explicaciones matemáticas pertinentes, elegir y adaptar material didáctico y comprender procedimientos no estándares de resolución en las producciones escolares. El estudio de los poliedros permite desarrollar una visión periférica de los contenidos abarcados por el currículo escolar, una perspectiva global sobre los vínculos entre conceptos de una misma temática y las conexiones con el resto de la matemática y otras disciplinas como arte, arquitectura y literatura. Provee de múltiples situaciones que invitan a ser curioso y creativo, a explorar el mundo en busca de patrones y relaciones, a formular conjeturas y a apreciar cómo el razonamiento deductivo es una herramienta potente para validarlas. Resulta una oportunidad para hacer matemática, para interiorizar principios fundamentales de la matemática y de la geometría, y generar nuevas experiencias de producción y validación del conocimiento, fundamentales para renovar las prácticas docentes, desde una visión de la matemática como construcción social, tomando la experimentación y el error como parte fundamental del proceso de aprendizaje.

b.3) Aportes de la investigación en Educación Matemática

Guillén (2010) sugiere priorizar el aspecto creativo de la geometría y aprovechar la variedad de familias de sólidos como soporte para desarrollar actividad matemática. Agrega que la variedad de representaciones permite generar una variedad de contextos en los que los estudiantes pueden manipular los sólidos (juntando, descomponiendo, recomponiendo) y

reproducirlos en el plano (dibujándolos, fotografiándolos, realizando desarrollos planos), además de generar oportunidades para desarrollar una diversidad de procesos matemáticos (descripción, clasificación, definición, prueba, generalización y/o particularización).
El modelo Van Hiele sobre el razonamiento geométrico señala que, en cada nuevo aprendizaje, el estudiante vivencia un proceso que atraviesa una serie de niveles que es posible caracterizar; Guillén (2004) particulariza este modelo para el aprendizaje de los sólidos.
Samuel, Venegas y Gil (2016, citando a Chamorro, 2001) señalan que en muchos casos la enseñanza de la geometría se reduce simplemente a la identificación de figuras y formas, y al cálculo de perímetros y áreas. Agregan que la geometría y los conceptos espaciales a menudo, son ignorados o minimizados a principios de la educación, pues los maestros suponen que los niños no pueden aprender los contenidos por su complejidad y nivel de abstracción, o porque los mismos maestros presentan dificultades para construir oportunidades de aprendizaje geométrico.

b.4) Objetivos

Nos planteamos como objetivo general promover en los alumnos magisteriales la construcción y reconstrucción de conocimientos vinculados al dominio *conocimiento del contenido* del modelo *conocimiento matemático para la enseñanza* (Ball, Thames y Phelps, 2008), vinculados a la enseñanza del tema poliedros regulares convexos.

b.5) Fundamentación de la propuesta

Planteamos el estudio de los poliedros regulares como una vía de exploración del espacio que nos rodea, como una oportunidad para aproximarse a las formas y estructuras geométricas, a través de su descripción, análisis e identificación de características propias y las relaciones que existen entre ellas. Su abordaje no se limita a enseñar un conjunto de conceptos matemáticos; incluye la revisión y reconstrucción de un conjunto de ideas metamatemáticas y actitudes que tienen que ver con el proceso de inculturación matemática (Schoenfeld, 1992) y no se conforma con preparar buenos usuarios de la matemática. La formación de futuros docentes debe generar oportunidades para que esos estudiantes produzcan modos renovados de pensar y entender la matemática y su enseñanza. Para organizar y planificar las tareas de enseñanza de este tema, tomamos el modelo de razonamiento geométrico de Van Hiele y la caracterización de los niveles de razonamiento para el aprendizaje de los sólidos realizada por Guillén. Según Guillén (2004) en el nivel de razonamiento “de visualización”, los estudiantes solo perciben características generales de los objetos que son vistos como unidades o bloques. En el nivel “de análisis” los estudiantes identifican propiedades características de los sólidos, pero no establecen relaciones entre ellas. En el nivel “de clasificación” logran describir los objetos matemáticos de una manera formal, entienden el significado de las definiciones y reconocen propiedades derivadas de ellas. En el nivel “de deducción formal” los estudiantes realizan deducciones y demostraciones y entienden la lógica y el funcionamiento de un sistema axiomático.
Las actividades propuestas pretenden crear oportunidades para que los estudiantes transiten desde el nivel que se encuentren inicialmente, hacia el nivel de “deducción formal”.
La propuesta incluye el uso de diferentes materiales para representar los sólidos pues, como lo reporta Guillén (2004), cada tipo de representación ofrece oportunidades diferentes para

visualizar los elementos de dicho sólido y cada contexto particular permite mejorar y completar el modelo mental que paulatinamente construye el estudiante para cada noción.

b.6) Estrategias metodológicas

Teniendo en cuenta que lo que los estudiantes aprenden está fundamentalmente conectado con el cómo lo aprenden (NCTM, 1991), esta propuesta sostiene que el trabajo sobre poliedros no puede limitarse a visitar “monumentos matemáticos” (Chevallard, 2013). El aula debe concebirse como una comunidad de práctica, un espacio de creación, discusión y validación del conocimiento, que favorezca la interacción entre los estudiantes, el desarrollo de habilidades comunicativas y el respeto por la diversidad de opiniones. La metodología de trabajo debe permitir al futuro docente “hacer matemática” y vivenciar experiencias de aprendizaje coherentes con las recomendaciones actuales de la investigación en didáctica de la matemática; estas experiencias son necesarias para desarrollar una actitud positiva hacia las matemáticas y confianza en sí mismo como productor de conocimiento. Resulta fundamental la variedad en el tipo de tareas propuestas. Las actividades de final abierto (Zaslavsky, 1995) permiten que el estudiante aporte al grupo desde sus posibilidades, que aprecie la matemática como construcción humana y vivencie las ventajas del trabajo colaborativo. Las situaciones de cuestionamiento invitan a contraponer ideas, a generar respuestas argumentadas y a formular nuevas preguntas que resulten un motor para explorar nuevas cuestiones. Las actividades que promueven el debate científico (Legrand, 1993) permiten evaluar distintos puntos de vista y vivenciar auténticas experiencias científicas en el aula. El uso de recursos didácticos variados (juegos, material manipulativo, tecnología) permite que los futuros docentes aprecien su potencial para facilitar y profundizar el aprendizaje de las matemáticas y forja experiencias positivas que promueven la integración de estos recursos en sus futuras prácticas profesionales.

Para incentivar que los futuros docentes se responsabilicen como estudiantes y para favorecer su inculturación en las tareas propias de su profesión, cada clase dará inicio con una síntesis de los contenidos matemáticos tratados en la clase anterior a cargo de los propios estudiantes. Luego de abordadas las dudas que pudieran surgir, el docente explicitará los objetivos de la clase y los logros de aprendizaje esperados para ella, promoviendo que el estudiante monitoree sus propios aprendizajes y juegue un papel activo también en la evaluación del proceso de enseñanza-aprendizaje. El docente propondrá las actividades para ser realizadas principalmente en pequeños grupos, monitoreando su organización y producción, proponiendo nuevas preguntas para reorientar el trabajo en caso de ser necesario, invitando a realizar acuerdos dirigidos a mejorar el lenguaje o construir definiciones compartidas de los objetos matemáticos y organizando la puesta en común de las actividades grupales. En la puesta en común se comparten procedimientos, dificultades, dilemas y resultados; el error es tomado como alimento para nutrir el proceso de enseñanza-aprendizaje, y el profesor sólo actúa como experto para orientar al grupo en la búsqueda de soluciones o enriquecer los aportes de los estudiantes en aspectos que se consideren sustantivos para su futura práctica profesional, y cuya resolución no esté al alcance del grupo. El estudiante es visto como sujeto pensante (en el sentido dado por Sadovsky, 2005) y será impulsado a participar de forma comprometida y reflexiva en las actividades propuestas, atendiendo a profundizar no sólo su conocimiento disciplinar sino también a apropiarse de los valores de la matemática y su enseñanza.

Se espera que el estudiante sea quien formule las preguntas, se comunique matemáticamente y con argumentos y tome una actitud cuestionadora sobre los contenidos, procedimientos y técnicas que siempre utilizó y asumió como válidos. También se espera cobre autonomía en el monitoreo crítico de su propio proceso de aprendizaje y solicite ayuda personalizada del docente en caso de entenderlo necesario. Para promover la metacognición y el involucramiento de los estudiantes en su papel como futuros enseñantes, en los últimos minutos de cada clase el grupo deberá reflexionar sobre los objetivos de aprendizaje de esa clase y hacer un breve análisis sobre ella que incluya: hacer explícitos los vínculos que pudieron establecer entre los contenidos trabajados y los contenidos del currículo escolar, los errores o dificultades que surgieron en la clase y el aprovechamiento que se hizo de ellos, las dificultades y errores que pueden anticipar respecto a la temática abordada en los escolares, las creencias e ideas metamatemáticas que los futuros maestros pudieron modificar en esta clase.

b.7) Las actividades, sus objetivos, fundamentos y metodología específica

Actividad 1: Las propiedades de los sólidos como criterios para clasificarlos

Se propone una tarea de atención a similitudes y diferencias entre objetos matemáticos (Zaslavsky, 2008) que permitirá: diagnosticar (conceptos geométricos, el lenguaje matemático y nivel de razonamiento geométrico); promover experiencias de aprendizaje no tradicionales y actitudes propias de la matemática (interés por buscar regularidades, clasificar y definir); revisar y resignificar conceptos matemáticos (poliedros y posibles clasificaciones, poliedro regular); desarrollar conocimientos y actitudes específicas del docente (definir, analizar equivalencias entre definiciones, desarrollar un pensamiento flexible para alternar entre distintas representaciones de un poliedro) y desarrollar una visión periférica del universo matemático (apreciar la geometría como forma de modelar el espacio, resignificar el concepto de definición y sus formas de legitimación, valorar el uso de ejemplos y contraejemplos y conocer sus limitaciones).

Clasificar de todas las formas que se considere posible los sólidos entregados. Registrar en orden de realización, los criterios considerados para la clasificación y sus categorías.

Se ofrecerán una veintena de figuras tridimensionales, mayormente poliedros variados y algunos cuerpos de revolución, presentados a través de distintos tipos de representación: macizos, huecos con superficie semitransparente y armazones de alambre. Esta tarea presenta una oportunidad para que los estudiantes experimenten y paulatinamente perciban algunos elementos constitutivos de los sólidos entregados, haciendo foco en sus propiedades y cuáles de ellas resultan características a una familia de sólidos. Trabajando en pequeños grupos, bajo las normas del debate científico (Legrand, 1993), los estudiantes pondrán en juego sus conocimientos previos, descubrirán nuevas propiedades y relaciones entre éstas, y tomarán conciencia de la existencia de diferentes tipos de representación de los sólidos. Esta tarea de final abierto (Zaslavsky, 1995) es de bajo riesgo pues, estudiantes cuyo razonamiento geométrico se encuentre en cualquiera de los niveles del modelo de Van Hiele, podrán dar alguna respuesta correcta; desde un nivel de visualización se podrán agrupar los sólidos observando características globales como el tipo de representación utilizada, o por observar que tienen la misma forma; desde un nivel de análisis se podrán identificar propiedades de estos objetos y utilizarlas como criterios de clasificación; desde un nivel de clasificación se podrán realizar descripciones formales argumentadas; finalmente desde un nivel de deducción formal se podrán vincular ideas y hacer deducciones generales. En la puesta en común, se potenciará el análisis de las propiedades de los objetos matemáticos estudiados como aspectos que permiten organizarlos, se revisarán algunas clasificaciones comunes de los poliedros y se observará que hay otras clasificaciones posibles, promoviendo el aprecio por un vocabulario compartido. La actividad será tomada como un disparador para estudiar los sólidos platónicos y definirlos. Si el grupo no propone un acercamiento a esta categorización, se los podrá invitar a identificar similitudes y diferencias entre dos sólidos que presentemos (elegimos dos sólidos platónicos). Para que la actividad permita trabajar en la formulación de una definición de poliedro regular convexo, interesa que se identifiquen todas las características que definen los poliedros regulares convexos. Por esta razón, entre los sólidos entregados, existirán poliedros que cumplirán algunas de las propiedades que definen a estos poliedros, pero no todas ellas, como los poliedros convexos de caras uniformes, sin vértices uniformes.

Actividad 2: Construyendo poliedros regulares
Esta actividad que tiene como foco los poliedros regulares, se plantea los siguientes objetivos de aprendizaje: conjeturar y justificar la existencia de los cinco poliedros regulares; desarrollar actitudes propias de las matemáticas (curiosidad, creatividad, experimentación, intuición, imaginación, capacidad crítica, autonomía, gusto por investigar, conjeturar, generalizar y demostrar); valorar el papel de la visualización, representación y demostración para el desarrollo de la geometría; conocer diferentes métodos de demostrar y apreciar diferentes niveles de rigor en la prueba.
Los estudiantes trabajarán en grupos de 4 integrantes, recibirán un sobre que incluirá una cinta adhesiva y representaciones en cartulina de dos tipos de polígonos regulares. Cada sobre contendrá 35 triángulos y otro grupo similar de polígonos iguales elegido al azar entre los siguientes: cuadrados, pentágonos, hexágonos y heptágonos. A nivel de clase habrá al menos un grupo que contará con cada uno de estos tipos de polígono.

Con los materiales recibidos. ¿Puedes armar un poliedro regular? ¿Puedes armar otros?

A medida que los grupos logran construir algún poliedro regular, se los invitará a encontrar más poliedros con el material que disponen. Cuando se identifique que dos grupos no encuentran más soluciones se sugerirá la permuta del material para permitir continuar con la exploración. Cuando a nivel del grupo-clase se obtengan los 5 poliedros regulares, se socializarán los poliedros encontrados y se incentivará a buscar otros. En caso de apreciar que los grupos ya intuyen la imposibilidad de hacerlo, se los invitará a buscar una justificación para esta conjetura, que luego será compartida y validada por el grupo. Nuevamente las reglas de debate científico guiarán el debate, se promoverá que los estudiantes interioricen la necesidad de argumentar y atender a la coherencia de los argumentos para analizar las justificaciones propuestas por un tercero, lo que resulta fundamental para tener una visión más global de las matemáticas, imprescindible para desempeñarse como docentes. En caso que se concluya que solo existen cinco poliedros regulares y considerando que la consigna no aclara que los poliedros deben ser convexos, se revisará el razonamiento realizado haciendo explícita la presunción de considerar solo ángulos poliedros convexos.

Actividad 3: Simetrías, inscripción y dualidad en los sólidos platónicos
Esta actividad, que involucra el uso de recursos tecnológicos para facilitar y profundizar los aprendizajes, se plantea los siguientes objetivos: explorar relaciones de dualidad e inscripción entre poliedros regulares; promover el interés por la actividad matemática (búsqueda de relaciones, elaboración y comprobación de conjeturas, interés por explorar, generalizar y fundamentar); reflexionar sobre algunas ideas matemáticas (la noción de dualidad y sus múltiples aplicaciones, la idea de simetría) y promover experiencias de uso de recursos tecnológicos para aprender matemática.
Los estudiantes trabajarán en duplas sobre la siguiente consigna, contando con una computadora con el programa GeoGebra:

1) Construye en GeoGebra un tetraedro, un cubo y un octaedro e investiga sus centros, ejes y planos de simetría, indicando cuáles y cuántos son. Regístralos.
2) Investiga relaciones entre las simetrías de estos tres sólidos.
3) Investiga relaciones de inscripción entre estos tres sólidos.
4) Analiza la cantidad de vértices, aristas y caras de los tres sólidos. ¿Qué relaciones observas?

Esta actividad, que prioriza la exploración, la búsqueda de regularidades y la identificación de relaciones entre los poliedros, se apoya en la intuición y en lo visual y lo articula con el razonamiento para desarrollar nuevos conceptos. Permitirá observar y justificar que los poliedros regulares son inscriptibles en una esfera cuyo centro es el centro del poliedro. También permitirá apreciar que las cantidades de ejes y planos de simetría coinciden en el cubo y el octaedro, e intuir que existen ciertos vínculos entre estos dos cuerpos. La experimentación a través de GeoGebra permitirá observar que las simetrías de los sólidos, constituyen una guía para la búsqueda de posibles relaciones de inscripción entre ellos. Al investigar las relaciones de inscripción, no se pretende que los estudiantes logren identificar todas las posibles relaciones entre estos tres sólidos, pues algunos casos resultan más complejos. Se pretende que esta búsqueda arroje al menos las relaciones de inscripción cubo-octaedro, octaedro-cubo y tetraedro-tetraedro. También se espera que los estudiantes adviertan que, en estos tres casos, los vértices del poliedro inscripto coinciden con los centros de las caras del poliedro que lo inscribe. El apartado 4 contribuirá a hacer visibles las condiciones que definen dos poliedros duales, esta idea permitirá trabajar el concepto de dualidad y explorar esta relación en la globalidad de los sólidos platónicos.

b.9) Evaluación
Se concibe la evaluación como un proceso continuo y recursivo que proporciona información relevante para que el formador y los futuros docentes tomemos decisiones que permitan regular y mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje. La formación de un profesional de la educación, crítico de sus saberes, autónomo, capaz de analizar una situación y tomar decisiones que contribuyan a su mejora, requiere de estudiantes que jueguen un rol activo y participativo en la construcción de los criterios y las implicaciones de la evaluación. NCTM (2000) recomienda integrar evaluación con instrucción; la autoevaluación y la coevaluación se aprecian fundamentales en el desarrollo de las destrezas y actitudes necesarias para mirar la evaluación como una instancia crucial en el proceso de aprendizaje. Además de los

instrumentos tradicionales de evaluación, que se focalizan en los resultados del proceso, se entiende necesario utilizar instrumentos que permitan monitorearlo a tiempo real; una guía de observación para el docente y una pauta de autoevaluación para el estudiante se aprecian como instrumentos adecuados en este sentido. La pauta de autoevaluación hace explícitos los aprendizajes esperados y permite que el propio estudiante monitoree su proceso de aprendizaje, promoviendo así su autonomía y metacognición. La guía de observación para el docente facilita el registro de aspectos específicos y fundamentales del proceso de enseñanza- aprendizaje; permite recabar información sobre los estudiantes, llevar un registro de los conocimientos que moviliza, las actitudes que manifiesta al hacer matemática, observar su capacidad crítica y reflexiva y el grado de autonomía que ha logrado desarrollar. Acompaña todo el proceso educativo y constituye también un insumo valioso para obtener registros que lleven al formador a reflexionar sobre su propia práctica. También resulta útil el uso de rúbricas especialmente para desarrollar la coevaluación de actividades grupales, como planificar y dictar en duplas una clase sobre una temática del curso. En estos casos la rúbrica será elaborada por los estudiantes y consensuada de forma previa al desarrollo de la actividad. Los instrumentos tradicionales de evaluación (pruebas escritas, individuales o en duplas) serán utilizados de acuerdo a la normativa vigente, para evaluar los resultados de un proceso de trabajo. La calificación del estudiante emanará de considerar el proceso de aprendizaje, atendiendo particularmente a su capacidad de ser crítico, reflexivo y capaz de aprender de forma autónoma, pues estas capacidades se consideran fundamentales para un futuro docente.

b.10) Bibliografía a recomendar a los futuros educadores

Alsina, C. (2011). *Las mil caras de la belleza geométrica. Los Poliedros*, Navarra, España: RBA Coleccionables.

Courant, R., & Robbins, H. (1967). *¿Qué es la matemática? Una exposición elemental de sus ideas y métodos.* Madrid: Aguilar S.A. de Ediciones

Godino, J., & Ruíz, F. (2002). *Geometría y su didáctica para maestros*. Universidad de Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática.

Moise, E., & Downs, F. (1986) *Geometría moderna*. Massachusetts, EEUU: Addison Wesley Iberoamericana

c) Proyección en líneas de investigación

c.1) Descripción de la línea de investigación

Rico y Sierra (2000) delimitan tres campos de reflexión dentro de la Educación Matemática: la trasmisión del conocimiento matemático y su evaluación; la formación, preparación, actuación y desarrollo de los profesionales que asumen intencionalmente los procesos de enseñanza de la matemática y, finalmente, la fundamentación y teorización de los fenómenos derivados de la enseñanza y el aprendizaje de la matemática. Estos investigadores indican que cada uno de estos campos considera un problema diferente y que los tres proceden de ámbitos de la educación bien diferenciados. Señalan que la investigación en Educación Matemática encuentra sus problemas de estudio en estos tres campos, y que los departamentos universitarios e institutos de investigación, organizan líneas de investigación para promover su realización y desarrollo. Una de las líneas de trabajo a nivel del Consejo de Formación en Educación, que se inscribe en el segundo campo de reflexión, estudia la formación de profesores de matemática. Como parte de

distintos cursos de posgrado, algunos docentes del CFE han desarrollado trabajos de tesis y tesina, que giran en torno al conocimiento del profesor de matemática (o del maestro) para enseñar matemática.
Desde que Shulman invitara a la comunidad educativa a investigar sobre el conocimiento profesional del profesor, en el contexto particular de la educación matemática han surgido múltiples modelos teóricos, que permiten reflexionar sobre los conocimientos que ha de construir un docente para enseñar matemática. Actualmente una de las líneas prioritarias en investigación en Matemática Educativa es el *desarrollo y conocimiento profesional del profesor de matemáticas*. En esta línea, han surgido múltiples trabajos que utilizan el constructo teórico denominado *Conocimiento Matemático para la Enseñanza (MKT*) desarrollado por un equipo de investigadores de la universidad de Michigan liderados por Deborah Ball, que ha sido utilizado en múltiples estudios para identificar los conocimientos necesarios para el desarrollo de tareas de enseñanza sobre una temática, permitiendo obtener resultados que orientan la formación inicial y continua de los docentes. Vaillant y Manso (2012) señalan que existe a nivel internacional, una insatisfacción de la propia comunidad de educadores respecto a la capacidad de los institutos de formación docente para dar respuesta a las necesidades de esta profesión. A pesar que estas autoras señalan que han aumentado los estudios en materia de formación inicial, Silverman y Thompson (2008) señalan que hay un conocimiento limitado sobre el conocimiento matemático-didáctico que el profesor necesita para la enseñanza y que caracterizar este conocimiento es un tema relevante de investigación.
En particular, en relación a la enseñanza de la geometría González, Guillén y Figueras (2006) indican que "se hace necesario realizar investigaciones que aporten información sobre los elementos que debieran formar parte de la conducta competente de profesores de primaria al enseñar los contenidos geométricos relativos a los sólidos en sus clases" (p.1).
El presente proyecto se inscribe dentro de la línea de investigación *desarrollo y conocimiento profesional del profesor de matemáticas*, específicamente se enfoca en conocer el conocimiento matemático necesario para desarrollar las tareas de enseñanza de los poliedros en estudiantes de nivel primario.

c.2) Descripción de la problemática

A través de nuestra experiencia, hemos observado que el abordaje de la geometría en general y de la geometría del espacio en particular, es percibido como una carga difícil de sobrellevar. Fripp (2012) señala que un grupo de maestros uruguayos que participan de su estudio, se ven a sí mismos como "otro docente" en el momento de enseñar geometría. Observa que esta percepción se basa en "cierta inseguridad relativa a las características de su formación en geometría" y que esto imprime "una debilidad en su biografía profesional" (p.61). En este sentido Báez e Iglesias (2007) señalan que los docentes que participan de su estudio tienden a postergar la enseñanza de la geometría y los investigadores vinculan este hecho a una escasa formación matemática y didáctica. Por otra parte, González, Guillén y Figueras (2006) señalan que la enseñanza de la geometría que se realiza en las escuelas, no actúa como soporte para desarrollar actividades de producción matemática, estos autores también vinculan esta problemática a debilidades en la formación de los docentes.
Lo expuesto nos lleva a problematizar cuales son los conocimientos que ha de construir un docente para desarrollar con solvencia y dignidad su profesión, especialmente en relación a la enseñanza de la geometría. En este sentido Ball, Thames y Phelps (2008) categorizan el

conocimiento matemático requerido para la enseñanza en seis subdominios, tres de ellos vinculados al dominio del *conocimiento del contenido* y otros tres vinculados al *conocimiento didáctico del contenido.* Asimismo, el dominio *conocimiento del contenido* es subdividido en tres subdominios: *conocimiento común del contenido (CCK), conocimiento especializado del contenido (SCK)* y *conocimiento del horizonte matemático (HCK).* Observamos que en particular el conocimiento especializado del contenido no requiere ser movilizado para describir o caracterizar un poliedro, para realizar su desarrollo plano ni para definirlo. Como formadores de maestros y profesores, resulta relevante increparnos a nosotros mismos si las tareas que proponemos a los futuros docentes requieren movilizar conocimientos del subdominio *conocimiento especializado del contenido* y preguntarnos qué oportunidades creamos para que los futuros maestros construyan estos conocimientos.

En otro orden, Llinares (2008) señala que "aprender, desde un punto de vista sociocultural, está relacionado con cómo las personas se apropian de herramientas para pensar y actuar en una comunidad de práctica" (p.12) y propone mirar a la formación de profesores de matemática, como un ámbito en el que se aprende una práctica. Agrega que, "al considerar la enseñanza de las matemáticas como una práctica que tiene que ser comprendida y aprendida, podemos identificar algunas tareas que la articulan y componentes del conocimiento profesional del profesor que permiten realizarlas" (p. 12). Entendemos que esta perspectiva presenta una forma novedosa y potente para entender la problemática que afecta la formación inicial docente.

Por lo expuesto entendemos sustantivo plantearnos las siguientes preguntas: ¿Qué necesidades formativas tienen los maestros y en particular los maestros noveles respecto a los conocimientos del subdominio SCK? ¿Qué conocimientos configuran el subdominio conocimiento especializado del contenido del modelo MKT en relación a la enseñanza de los poliedros? ¿Qué tareas o prácticas docentes ponen en juego estos conocimientos? ¿Qué agentes formadores participan en la construcción de estos conocimientos desde la formación inicial? ¿Cómo potenciar el desarrollo de estos conocimientos desde la asignatura Matemática II en la formación inicial de maestros?

c.3) Antecedentes

Ribeiro, Monteiro y Carrillo (2010) analizaron el conocimiento matemático para enseñar el contenido cubo, en el nivel primario y sus implicaciones en la práctica docente. Estos investigadores concluyen que las carencias en el conocimiento especializado del contenido impiden a los docentes desplegar explicaciones y procedimientos matemáticos para hacer este contenido enseñable.

A nivel regional, Sgreccia y Massa (2012) realizaron una investigación con estudiantes de profesorado de matemática y profesores nóveles argentinos, en el que indagaron el conocimiento especializado del contenido respecto al tema poliedros. El estudio se orientó a reconocer los diferentes criterios que adoptan los participantes al realizar adecuaciones y adaptaciones para transformar los contenidos *poliedros* y *cuerpos redondos* en contenido enseñable. Las investigadoras señalan que, si bien los participantes dieron indicios de un conocimiento matemático bastante consolidado, se detectaron debilidades en la conformación de su *conocimiento especializado del contenido*.

Sámuel, Vanegas y Giménez (2016) se interesaron por conocer el *conocimiento matemático para la enseñanza* vinculado a geometría, que es movilizado por un grupo de futuros maestros de educación primaria al participar del diseño de tareas profesionales. El modelo desarrollado por Ball et al., (2008) les permitió estructurar el diseño de la tarea profesional, hacer ciertas caracterizaciones iniciales, identificar y reconocer diferentes aspectos de los subdominios del MKT. Esto permitió identificar los posicionamientos de los futuros maestros respecto del conocimiento matemático para la enseñanza, vinculados con la visualización y la idea de simetría. Señalan que la identificación de las respuestas y su relación con cada uno de los subdominios que propone el modelo es un proceso complejo, ya que en una misma respuesta podemos reconocer diversos aspectos que involucran un entramado de conocimientos relativos a diferentes subdominios, y sugieren seguir avanzando en el estudio de este análisis.

c.4) Problema de investigación

Este proyecto se orienta a profundizar en el *conocimiento especializado del contenido* (Ball et al., 2008), vinculado a la enseñanza de los poliedros a nivel de enseñanza primaria. Teniendo en cuenta que no se encuentran estudios que informen las necesidades específicas de los maestros uruguayos respecto al desarrollo de conocimientos del subdominio SCK para el abordaje del tema poliedros, se plantea un estudio exploratorio orientado a dar respuesta a la siguiente pregunta: ¿Qué saberes del subdominio *conocimiento especializado del contenido* son relevantes para desarrollar tareas vinculadas a la enseñanza de los poliedros en el nivel de enseñanza primaria?

c.5) Objetivo general

Identificar conocimientos vinculados al *conocimiento especializado del contenido* que resulten relevantes para desarrollar tareas vinculadas a la enseñanza de los poliedros en educación primaria.

c.6) Objetivos específicos

- Identificar un conjunto de tareas propias de la profesión docente que sean percibidas por un grupo de maestros noveles, como matemáticamente desafiantes o complejas, vinculadas a la enseñanza del tema poliedros.
- Identificar cuáles son los conocimientos del subdominio SCK que participan en el desarrollo de las tareas de enseñanza de los poliedros, que generan inseguridad en los docentes.

c.7) Metodología

Esta investigación de tipo exploratorio tendrá corte cualitativo. La población de estudio estará constituida por un grupo de maestros noveles que se desempeñen como maestros de escuela primaria, que tengan al menos un año de desempeño como maestros y menos de cinco años de egresados. Utilizará un cuestionario para recabar información general sobre las percepciones de los participantes respecto a sus propias necesidades formativas en el área de matemática, indagar si han identificado tareas propias de la enseñanza de la geometría, que le generen inseguridad o rechazo. A través de las respuestas obtenidas se seleccionarán dos o tres maestros para constituirlos en nuestros casos de estudio. Seleccionados éstos, se realizan entrevistas que serán audio grabadas para explorar en profundidad las características de estas tareas o actividades, indagar qué conocimientos matemáticos resultan implicados en ellas y específicamente, identificar los conocimientos del subdominio SCK que han de ser movilizados para realizarlas.

Ball, Thames y Phelps (2008) desarrollaron un constructo teórico denominado Conocimiento Matemático para la Enseñanza (MKT), creado con el propósito de diferenciar los componentes del conocimiento del profesor de matemática y orientar su formación inicial y continua. Se considera que este modelo resulta una herramienta apropiada para guiar la exploración, entendiendo que la delimitación del conocimiento matemático para la enseñanza en subdominios específicos, permite profundizar el análisis y posibilitará la identificación de los conocimientos necesarios para enseñar geometría haciéndolos explícitos y visibles para la comunidad educativa.

c.8) Impacto esperado del proyecto

Se espera que este estudio contribuya a visibilizar los conocimientos matemáticos que han de ser trabajados en las aulas de formación docente. Los resultados obtenidos permitirán sin duda reflexionar y reorientar nuestras propias prácticas, pero entendemos que también será un insumo importante para reflexionar sobre la contribución de los profesores formadores de matemática a la construcción de los conocimientos del subdominio SCK en la formación inicial docente, y aportará al debate sobre los contenidos del currículo de matemática que resultan valiosos para los futuros maestros. También se entiende que este estudio podría proporcionar insumos valiosos para elaborar un nuevo currículo de matemática en la formación de maestros. Considerando que este estudio involucra a maestros noveles como la población de estudio y a un docente de matemática que oficia como investigador, este trabajo busca también tender puentes entre distintos actores del sistema educativo.

Referencias bibliográficas

Báez, R. & Iglesias, M. (2007). Principios didácticos a seguir en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la geometría en la UPEL. "El Mácaro". *Revista Enseñanza de la Matemática, 12 al 16,*67-87.

Ball, D., Thames, M. & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching what makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389–407.

Bursill-Hall, P. (2002). *Why do we study geometry? Answers through the ages.* DPMMS. Centre for Mathematical Sciences Wilberforce Road, Cambridge, pp. 1-31.

Chevallard, Y. (2013). Enseñar matemáticas en la sociedad de mañana: alegato a favor de un contra paradigma emergente. *Journal of Research in Mathematics Education, 2*(2), 161-182.

Coxeter, H. (1984). *Fundamentos de geometría.* México: Limusa.

Dalcín, M. & Molfino, V. (2015). *Cuerpos con historia. Poliedros para experimentar.* Montevideo: Ediciones Palíndromo.

Fripp, A. (2012). Enseñanza de la geometría en la escuela primaria. Cómo entrelaza el maestro, en sus prácticas, la matemática, el contexto y sus alumnos. *Cuadernos de Investigación Educativa, 3*(18), 55-63.

González, E., Guillén, G. & Figueras, O. (2006). Estudio exploratorio sobre la puesta en práctica de un modelo de enseñanza para la geometría de los sólidos en Magisterio.*En Actas del X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.* (195-204). Huesca: SEIEM.

Guillén, G. (2004). El modelo de Van Hiele aplicado a la geometría de los sólidos: describir, clasificar, definir y demostrar como componentes de la actividad matemática. *Educación matemática, 16*(3).

Guillén, G. (2010). ¿Por qué usar los sólidos como contexto en la enseñanza/aprendizaje de la geometría? ¿Y en la investigación? En *Investigación en educación matemática XIV* (21-68). SEIEM.

Legrand, M. (1993). *Débats cientifique en cours de mathématiques et spécificité de l'analyse*. Repères IREM, 10(123-159). Topiques Editions.

Llinares, S. (2008). Construir el conocimiento necesario para enseñar matemática: prácticas sociales y tecnología. *Revista Evaluación e Investigación. 3*(1). 7-30.

Moise, E. & Downs, F. (1986). *Geometría moderna*. Massachusetts: Addison Wesley Iberoamericana.

Nápoles, J. (2002). *La fórmula de Euler y la topología.* Corrientes, Argentina: Universidad de la Cuenca del Plata. Recuperado de: https://www.uaq.mx/ingenieria/publicaciones/eure-uaq/n19/en1905.pdf

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (1991). *Professional standards for teaching mathematics.* Reston, VA: NCTM.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2000). *Principles and standards for school mathematics (Vol. 1)*.Reston, VA: NCTM.

Olmedo, A. (2015). Epistemología y filosofía de la matemática: un análisis de la propuesta de Richard Rorty. *Versiones. (7),* 37-52.

Puig Adam, P. (1981) *Curso de Geometría Métrica. Tomo I-Fundamentos*. Madrid, España: Gómez Puig.

Puig, L. (1997). Análisis fenomenológico. En L. Rico (Coord.) *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 61-94). Barcelona: Horsori.

Ribeiro, C., Monteiro, R. & Carrillo, J. (2010). ¿Es el conocimiento matemático del profesorado específico de su profesión? Discusión de la práctica de una maestra. *Educación matemática, 22*(2), 123-138.

Rico, L. & Sierra, M. (2000). Didáctica de la Matemática e investigación. En Carrillo, J.; Contreras, L. (eds.), *Matemática española en los albores del siglo XXI* (pp. 77-131). Huelva: Hergué Editores.

Sámuel, M., Vanegas, Y. & Giménez, J. (2016). Visualización y simetría en la formación de maestros de Educación Infantil. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia, 5*(1), 21-32.

Sadovsky, P. (2005). *Enseñar matemática hoy: Miradas, sentidos y desafíos* (Vol. 1). Buenos Aires, Argentina: Libros del Zorzal.

Schoenfeld, A. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. En D. Grouws (Ed.), *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 334-370).New York: MacMillan.

Sgreccia, N. & Massa, M. (2012). 'Conocimiento especializado del contenido' de estudiantes para profesor y docentes noveles de matemáticas: El caso de los cuerpos geométricos. *Educación matemática, 24*(3), 33-66.

Silverman, J. & Thompson, P. (2008). Toward a framework for the development of mathematical knowledge for teaching.*Journal of mathematics teacher education, 11*(6), 499-511.

Vaillant, D. & Manso, J. (2012). Tendencias en la formación inicial docente. *Cuadernos de Investigación Educativa, 3*(18), 11-30.

Zaslavsky, O. (1995). Open-ended tasks as a trigger for mathematics teachers' professional development. *For the Learning of Mathematics, 15*(3), 15-20.

Zaslavsky, O. (2008). Attention to similarities and differences: A fundamental principle for task design and implementation in mathematics education. *Topic Study Group 34: Research and development in task design and analysis, ICME, 11*.

Poliedros

Verónica Molfino

Poliedros es un contenido matemático que, si bien tiene un fuerte arraigo en el uso cotidiano que desde sus orígenes la humanidad le ha dado, ha ido perdiendo paulatinamente lugar en el discurso matemático escolar actual, quedando subordinado a otros contenidos considerados prioritarios, como los aritméticos, algebraicos y analíticos. En este proyecto pretendemos rescatar el valor que el contenido tiene en la formación docente, no solo por su poder formativo en lo que hace a la percepción visual y a la potencialidad que representa para comprender el mundo que nos rodea y ser partícipe de su creación, sino también porque nos permite explicitar los vínculos existentes entre las diversas ramas que componen a las matemáticas.

a) Aspectos disciplinarios

a.1) Conceptos e ideas involucrados en el tema

a.1.1) Reflexiones sobre la noción de poliedro

Los poliedros han constituido un centro de interés y de inspiración para la creación humana desde la antigüedad. Las primeras piedras talladas con forma poliédrica datan de al menos 2000 años a.C. y las majestuosas pirámides de Egipto son una muestra fehaciente del interés humano por la construcción y admiración de este tipo particular de figuras geométricas. En la antigua Grecia Pitágoras (582 a.C.-507 a.C.), Teeteto (415 a.C.-369 a.C.) y Platón (427 a.C. – 347 a.C.) dieron un paso más, dejando evidencias de estudios pormenorizados de los poliedros, en particular de la familia de los poliedros regulares y vinculando esta familia con explicaciones filosóficas sobre la creación del cosmos y sus elementos constitutivos (Collette, 2006). La obra cúlmine de Euclides (325 a.C-265 a.C.), *Los Elementos*, presenta una minuciosa recopilación de gran parte del conocimiento matemático alcanzado hasta el momento mediante una presentación ordenada y lógicamente secuenciada que consuma en una descripción de las propiedades geométricas y aritméticas de los cinco poliedros regulares. Esta obra constituiría una piedra fundamental en la construcción del conocimiento matemático de la humanidad y los poliedros regulares pudieron haber sido su móvil germinal. “Se ha llegado a afirmar que de alguna manera todo el texto euclidiano se vertebra para poder culminar precisamente con esta descripción poliédrica.” (Alsina, 2011, p. 30).

Siendo una construcción humana con tanta trayectoria, podría llamar la atención que tuviera que esperar tantos siglos para tener una definición precisa, pero este proceso no es exclusivo de los poliedros, también lo vivieron otros objetos matemáticos como el límite funcional o el infinito. La definición de un concepto matemático, a diferencia de lo que a menudo se quiere mostrar, es posterior a su construcción, requiere explicitar vínculos con otros objetos mediante propiedades y en el caso de los poliedros, ello requirió el desarrollo de diversas ramas de las Matemáticas, en particular de la Topología. Más sorprendente puede ser descubrir que aún hoy podemos encontrar en libros especializados definiciones que no son equivalentes. Veamos algunos ejemplos.

Una necesaria aclaración: definición de polígono

Cualquier definición de poliedro requiere de una precisa definición de polígono. Si bien dicha noción merecería una amplia discusión, dada la extensión permitida en este trabajo nos acotaremos a asumir la siguiente definición que es una adaptación de la definición dada por Alsina (2011, p. 13):

Llamamos *poligonal cerrada* a una figura geométrica del plano que consiste en una sucesión de vértices V_1, V_2, …, V_n, $V_{n+1} = V_1$ y una sucesión de segmentos (consecutivos y no alineados) V_1V_2, V_2V_3, … V_nV_1.

Observamos que el conjunto de vértices es un conjunto finito, y que los segmentos (lados) que no pueden estar alineados son los consecutivos. Dos lados no consecutivos podrían estar alineados.

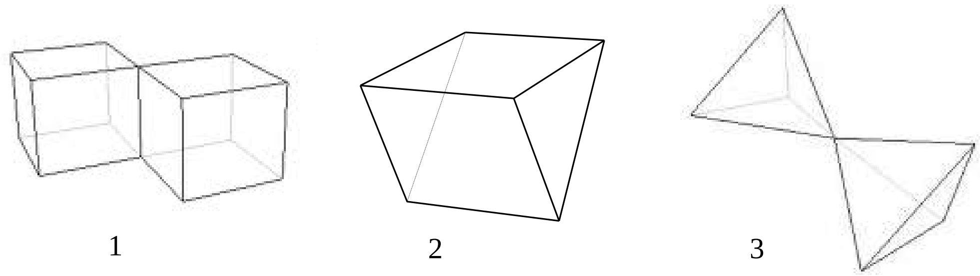
Una poligonal es *simple* si los únicos puntos que tienen en común los lados son vértices.

Finalmente,

llamamos *polígono simple* a la región del plano formada por una poligonal cerrada simple y sus puntos interiores.

Definiciones de poliedros

Comparemos las siguientes definiciones mediante el análisis de las figuras 1, 2 y 3:



1)
Un *poliedro* es una figura formada por un número finito de polígonos (llamados caras), de forma que cada arista (intersección de dos caras consecutivas) está contenida en sólo dos caras. Dos caras consecutivas tienen que estar en planos distintos. (Dalcín y Molfino, 2018, p. 18).

Según esta definición la figura 1 no es un poliedro (hay una arista contenida en más de dos caras) mientras 2 y 3 sí serían poliedros.

1) Se llama *superficie simple* a una figura que reúne las condiciones siguientes:

a) Las caras son polígonos simples, cada uno de cuyos lados pertenece a dos caras y sólo a dos llamadas contiguas.
b) Dos caras contiguas no son coplanarias.
c) Dos caras no contiguas pueden unirse por una sucesión de caras contiguas, cada una con la anterior y la siguiente.
d) Dos caras no contiguas, no pueden tener más punto común que un vértice de ambas, y si le tienen deben pertenecer ambas a un mismo anguloide de la superficie (es decir, a un mismo conjunto ordenado de caras concurrentes, cada una con la anterior y la siguiente y la última con la primera, conjunto llamado también ciclo).

Se llama *poliedro simple* al conjunto de puntos interiores a una superficie simple más los puntos de la superficie. (Puig Adam, 1986, p. 237)

Según esta definición, la figura 2 sería un poliedro, pero 1 no por no cumplirse la condición a y la figura 3 tampoco sería un poliedro porque no cumple la condición c ni la d.

3) Un *poliedro* es una reunión finita de polígonos convexos, llamados caras de ese poliedro. Los lados de esos polígonos se llaman aristas del poliedro y los vértices de los polígonos se llaman vértices del poliedro. Se exige además que la intersección de dos caras cualesquiera del poliedro sea una arista común a esas caras, o un vértice común, o sea vacía.(Lages Lima, 1991, p. 189.)

Según esta definición, las tres figuras serían un poliedro.

4) Definimos poliedro como un conjunto conexo de polígonos planos simples, tales que cada lado de cada polígono pertenece también a otro polígono del conjunto y sólo uno. Convenimos que dos polígonos cualesquiera deben tener en común o bien un lado (y dos vértices), o un vértice, o nada. (Coxeter, 1999, p. 78)

Esta definición admite como poliedros tanto a la figura 2 como a la 3, al igual que la primera definición. Pero en esta se exige que el conjunto de polígonos sea conexo, lo que no se pide en la primera. Entonces por ejemplo un cubo al que se le extrae un cubo interior cumple la definición 1, pero no esta última. De ahí que podemos concluir que no definen el mismo conjunto de figuras.
En suma, observamos que no hay consenso sobre la definición de poliedro en los textos especializados, lo que lejos de resultarnos un problema, nos aporta luz sobre el carácter humano de la construcción de las matemáticas. Estas diferentes definiciones responden a diferentes necesidades de los autores de los textos, escritos con diferentes propósitos.

a.1.2) Algunas familias de poliedros

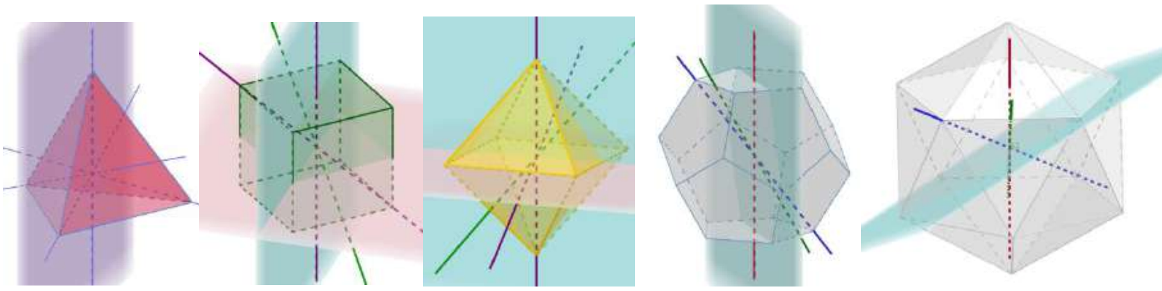
Una clasificación muy usada de los poliedros distingue entre convexos y no convexos. Los primeros son aquellos que son figuras convexas, lo que en el espacio euclídeo R^n se entiende como una figura tal que dados dos puntos P y Q cualesquiera de la figura, el segmento PQ está contenido en la figura. Existen otras maneras equivalentes de definir poliedro convexo, que no discutiremos aquí por razones de espacio.
Sin entrar en otro tipo de clasificaciones del conjunto de los poliedros, nos abocaremos ahora a presentar algunas familias particulares.

Poliedros regulares

Denominamos *poliedros regulares convexos* o platónicos a los poliedros convexos de caras polígonos regulares iguales y con vértices uniformes (en todo vértice confluye el mismo tipo de polígono, en la misma cantidad y en el mismo orden).

Existen también poliedros regulares no convexos (de Kepler-Poinsot). El hecho de que sus caras sean polígonos regulares del mismo tipo permite deducir que también sus aristas y caras son uniformes. Es decir que los poliedros regulares presentan un grupo de simetría transitivo en sus vértices, sus caras y sus aristas (Uniform Polyhedron, 2019).

Si bien no son los únicos, esta familia de poliedros presenta varias simetrías (los poliedros semirregulares comparten esa característica). Como consecuencia de ello, presentan numerosos ejes y planos de simetría y de rotación, algunos de los cuales se muestran en las siguientes figuras:



Tetraedro Cubo Octaedro Dodecaedro Icosaedro

¿Cuántos poliedros regulares existen? La búsqueda por responder cuántos y cuáles elementos de un conjunto de objetos matemáticos cumplen ciertas características ha sido germen de la construcción de conocimiento matemático y el caso de los poliedros, en particular del estudio de algunas familias, no escapa a ello.

Para Platón, la belleza de los sólidos regulares no reside realmente en su apariencia física, sino que permanece oculta en el ámbito ideal del pensamiento matemático. Tal belleza anida en que se puede demostrar mediante un razonamiento apriorístico -independiente de la investigación empírica- que existen cinco y sólo cinco representaciones de la idea de poliedro regular. De hecho, este sería el primer ejemplo en la historia de las matemáticas de un teorema fundamental de clasificación, que es precisamente el que corona a modo de brillante clímax final la última proposición de los *Elementos* de Euclides. (González Urbaneja, 2006, p. 85).

En términos actuales, la demostración realizada por Euclides (2007) puede expresarse así:

Para construir un ángulo poliedro (en cada vértice de los que son uniformes en el poliedro) precisamos como mínimo tres polígonos. Si el ángulo poliedro está compuesto por tres triángulos equiláteros, obtenemos un tetraedro. Si son cuatro triángulos equiláteros obtenemos un octaedro y si son cinco obtenemos un icosaedro. No es posible construir un ángulo poliedro convexo con seis triángulos equiláteros o más porque su suma sería igual o superior a 360º, contradiciendo la proposición 21 del libro XI de los *Elementos*. Con tres cuadrados en cada vértice se construye un cubo, y no pueden ubicarse más cuadrados por la misma razón. Con tres pentágonos regulares por vértice se construye un dodecaedro y no se pueden disponer más de tres por vértice. La misma proposición nos permite concluir que no pueden construirse poliedros regulares con polígonos regulares de más de 5 lados.

Deltaedros

Los *deltaedros* son poliedros cuyas caras son exclusivamente triángulos equiláteros.

Algunos de los poliedros de la familia anterior pertenecen también a esta familia: tetraedro, octaedro e icosaedro. Es fácil ver que existen infinitos poliedros no convexos en la familia de los deltaedros, pero un asunto interesante consiste en responder cuántos deltaedros convexos existen. Esta pregunta fue planteada por primera vez recién a mediados del siglo

XX por los matemáticos Hans Freudenthal (1905-1990) y Bartel van der Waerden (1903-1996), prueba de la vigencia que aún tiene el estudio de los poliedros. Ellos también dieron una respuesta y la demostraron: son sólo 8. La demostración no es trivial, un paso intermedio consiste en la siguiente propiedad:

Los deltaedros tienen un número par de caras. Llamemos C al número de caras y A al número de aristas de un deltaedro. Las caras de los deltaedros son triángulos equiláteros así que cada cara tiene tres aristas, es decir, el número de aristas sería el triple del número de caras, lo que podría expresarse como $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{3C}$.Pero a su vez, cada arista es compartida por dos caras adyacentes, o sea $\boldsymbol{A} = \frac{\boldsymbol{3C}}{\boldsymbol{2}}$.Ahora, el número A es un número natural. Para ello el número $\frac{\boldsymbol{C}}{\boldsymbol{2}}$ tiene que ser un número natural, o sea que C tiene que ser par.
Asumiendo que la cantidad mínima de triángulos para formar un poliedro es cuatro (tres para armar un ángulo poliedro y uno más para "cerrarlo") pueden analizarse en forma exhaustiva las diferentes posibilidades de construir poliedros convexos con triángulos equiláteros. Por razones de extensión no lo expondremos en este trabajo, pero la conclusión es que existen solo 8 deltaedros convexos: D_4 (tetraedro), D_6 (bipirámide triangular), D_8 (octaedro), D_{10} (bipirámide pentagonal), D_{12} (dodecaedro siamés), D_{14} (prisma triangular triaumentado), D_{16} (bipirámide cuadrangular giroelongada), D_{20} (icosaedro).

Poliedros semirregulares

Denominamos *poliedros semirregulares* a los poliedros convexos de caras polígonos regulares de más de un tipo y con vértices uniformes.

Esta familia de poliedros presenta un grupo de simetría que es transitivo en sus vértices, pero dado que las caras son de más de un tipo, las caras ya no son uniformes y las aristas pueden, o no, ser uniformes. Dentro de esta familia encontramos a dos familias infinitas de poliedros: prismas (cuyas caras son polígonos regulares) y antiprismas (de caras polígonos regulares) y a una familia finita de poliedros, llamados "arquimedianos" en honor a quien los creó, aunque fueran recreados por otros matemáticos y artistas posteriormente. Es la familia de todos los poliedros semirregulares que no son ni prismas ni antiprismas, que tal como lo probó Johannes Kepler (1571-1630) en 1619, es finita (son 13 elementos, si bien según el criterio pueden considerarse dos más, que presentan simetría especular con dos de ellos, totalizando 15). Dos de los poliedros arquimedianos son casi regulares, esto es, que presentan aristas uniformes (cuboctaedro e icosidodecaedro). Los restantes tienen aristas no uniformes.
Es interesante analizar la manera de obtener estos poliedros, siete de ellos pueden ser construidos mediante el truncamiento de los poliedros regulares, tanto por puntos medios como por puntos que dividen a las aristas en proporciones particulares (por ejemplo 1:3). Los restantes seis poliedros arquimedianos pueden obtenerse también mediante truncamiento pero combinando con otros métodos, como el de expansión ideado por Alicia Boole Stott (1860-1940) o el doble truncamiento (Rouse Ball y Coxeter, 1962).
Una posible demostración de la finitud de esta familia puede hacerse mediante un análisis exhaustivo de las posibles configuraciones de los vértices en función de la cantidad de polígonos que concurren en él (Dalcín y Molfino, 2018).

Poliedros de Johnson

Denominamos *poliedros de Johnson* a los poliedros convexos de caras polígonos regulares de más de un tipo y con vértices no uniformes.

Estos poliedros vendrían a completar el conjunto de los poliedros convexos de caras polígonos regulares. Algunos de ellos son pirámides, prismas o antiprismas aumentados, cúpulas o rotondas. Quien por primera vez formuló la pregunta de cuántos poliedros de esta familia existen fue Norman Johnson (1930-2017), construyó 92 de ellos y conjeturó, en un artículo de 1966, que no existen más. El matemático ruso Victor Abramovich Zalgaller (1920) demostró esa conjetura, en 1969. Una posible demostración es mediante un análisis de las posibles configuraciones de las caras: el tipo y la cantidad. En Dalcín y Molfino (2015) se ilustran los 92 poliedros y se muestra una forma de construirlos a partir de combinar o truncar poliedros de otras familias.

Poliedros de caras uniformes

Las familias anteriores se caracterizan por tener caras regulares, pero no necesariamente uniformes (iguales entre sí). ¿Existen poliedros de caras uniformes? Sí: los poliedros regulares son ejemplos, pero no los únicos.

Una manera de abordar a estos poliedros es atendiendo a los *poliedros duales*: un poliedro es dual de otro si tiene por vértices los centros de las caras del poliedro original. Los poliedros de caras uniformes son, pues, los duales de los de vértices uniformes, que son los semirregulares (prismas de caras regulares, antiprismas de caras regulares y arquimedianos). Sus duales, todos ellos con caras uniformes, son: las *bipirámides*, duales de los prismas (caras triángulos isósceles); los *deltoedros*, duales de los antiprismas (caras cometas) y los *poliedros de Catalán*, duales de los arquimedianos.

a.1.3) Relaciones entre cantidad de caras, vértices y aristas

Posibles valores para las cantidades de caras (C), aristas (A) y vértices (V)

Sabemos que para que un poliedro exista se precisan al menos 4 vértices, de lo contrario la figura sería plana. Esto nos conduce a una primera condición: $\boxed{V \geq 4}$. Análogamente, la cantidad de caras debe ser al menos 4 para que se cumpla una condición sustancial de los poliedros, que cada arista pertenezca a exactamente dos caras. Entonces, $\boxed{C \geq 4.}$

Por otro lado, en cada vértice concurren al menos tres aristas, y como cada arista tiene por extremos dos vértices, en todo poliedro se cumple que $\boxed{3V \leq 2A.}$

Análogamente, cada cara tiene al menos tres lados (aristas) y como cada arista está contenida en dos caras, en todo poliedro se cumple que $\boxed{3C \leq 2A.}$

Algo más que una relación: un invariante topológico

Al hablar de poliedros es ineludible mencionar una de las relaciones más sorprendentes de las matemáticas: en -algunos- poliedros, se cumple que $\boxed{C + V = A + 2}$. Resulta sorprendente, por un lado, por su generalidad: se cumple en todos los poliedros convexos, cualesquiera sean sus caras, y también en algunos no convexos. Por otro lado, por su simpleza: es asombroso descubrir que una relación tan elegante entre las cantidades de elementos de los poliedros se cumpla. Quien primero la concibió fue Leonhard Euler (1707-1783) en 1758.

Estudios posteriores, especialmente mediante el desarrollo de la Topología, han permitido concebir un resultado más general de la cual esta relación es un caso particular: la característica de Euler-Poincaré, que resulta ser un invariante topológico: $\boxed{\chi = C + V - A.}$
Esto es, todos los poliedros que sean homeomorfos entre sí (tales que existe una función biyectiva y bicontinua que transforma uno en el otro) comparten la misma característica de Euler-Poincaré. La condición de ser homeomorfos no tiene que ver con las consideraciones geométricas sobre las que antes pusimos atención para definir las diferentes familias: según ella un cubo, un poliedro estrellado y un prisma cuya base es un polígono simple no convexo pasan a considerarse "topológicamente iguales". Una manera de visualizarlo es pensar que la superficie del poliedro es flexible y que lo inflamos. Si logramos una esfera, entonces $\chi = 2$ pero si lo que obtenemos es un toro (superficie de revolución generada por una circunferencia que gira alrededor de un eje exterior a ella) entonces $\chi = 0$. La cantidad de "agujeros" en la figura tridimensional produce nuevas características de Euler-Poincaré (Alsina, 2011 y Armstrong, 1987).

Demostraciones de la relación de Euler
Una demostración de la relación de Euler ampliamente conocida fue publicada en 1813 por Augustin Cauchy (1789-1857). Parte de imaginar que a un poliedro se le quita una cara y su superficie se "achata" mediante una transformación continua de manera que no se quiebren las aristas (lo que generaría una transformación que no es un homeomorfismo) y que todas las caras queden visibles y coplanares, generando lo que se denomina el *diagrama de Schlegel*. Las medidas y formas se alteraron, pero la cantidad de vértices y aristas permanece inalterable, mientras C disminuyó en 1. El procedimiento ideado por Cauchy consiste en trazar diagonales en las caras para triangular todos los polígonos, e ir quitando de a una las caras con aristas libres (que sólo pertenecen a un polígono en la nueva representación del poliedro "achatado") hasta quedarse solamente con un triángulo. Un estudio exhaustivo de las diferentes posibles situaciones le permite concluir a Cauchy que esto es posible para cualquier poliedro convexo. Y en un triángulo se cumple que C=1, V=3 y A=3, esto es, C+V-A=1. Como inicialmente se le había quitado una cara al polígono, si la volvemos a considerar obtendremos: $\boxed{C + V - A = 2}$
Lages Lima (1991) presenta un análisis detallado de esta demostración, intentando explicitar para cuáles poliedros es válida tal demostración. Muestra que en el estudio de casos Cauchy omitió cuatro para los cuales, si bien el resultado sigue siendo válido, la demostración requiere nuevos argumentos. Concluye que en la demostración de Cauchy se asume implícitamente que el poliedro cumple simultáneamente:

- Toda arista está contenida exactamente en dos caras.
- Dos caras cualesquiera son encadenadas (condición c de nuestra definición 2 de poliedro).
- Todo ciclo (línea poligonal cerrada cuyos segmentos son aristas del poliedro) es un borde.

Esta última condición es equivalente a la impuesta por Armstrong en su demostración: "*todo lazo del poliedro P formado con segmentos rectilíneos (no necesariamente aristas) separa a P en dos piezas)*" (1987, p. 3).
Los poliedros convexos cumplen esas condiciones, pero no son los únicos. Más genéricamente, los poliedros que las cumplen son los homeomorfos a la esfera (Lages

Lima,1991), pero lo que señala Lages Lima es que el argumento que subyace a la demostración de Cauchy son esas propiedades, y no el hecho de ser convexo o ser homeomorfo a una esfera. Otros autores, como Armstrong (1987) ven poco elegante a la demostración de Cauchy por hacer uso de la inducción matemática.
El mismo Armstrong presenta una demostración alternativa que hace uso de la teoría de grafos y se basa en la conexión de los poliedros. Otras demostraciones pueden derivarse de la idea central de Adrien Legendre (1752-1833), basada en la proyección esférica del poliedro y la consideración de las relaciones entre ángulos -esféricos- de los polígonos de sus caras. Una relación invariante que puede formularse para la suma de tales ángulos permite deducir, también, la relación de Euler para todo poliedro homeomorfo a una esfera (Lages Lima, 1991).

Relación de Descartes
Finalizamos este apartado con otra relación sorprendente, que, tal como veremos, está estrechamente relacionada con la anterior.

El *defecto angular del vértice de un poliedro* es la diferencia entre 360º y la suma de todos los ángulos formados por aristas consecutivas que concurren en él.
El *defecto angular de un poliedro* es la suma de los defectos angulares de todos sus vértices.

El defecto angular de un poliedro puede vincularse con la relación de Euler (lo que es, en esencia, el argumento manejado por Legendre en su demostración de la relación de Euler y que George Polya (1887-1985) presenta tal como lo hacemos acá). Ello permite deducir que, para ciertos poliedros, el defecto angular es constante.
Llamamos S_i a la suma de los ángulos de los polígonos que convergen en un vértice V_i de un poliedro P. Entonces, los defectos angulares de cada vértice son
$\Delta_i = 360° - S_i$. Despejando S_i y considerando la suma de todos ellos obtenemos:
$S = (360° - \Delta_1) + (360° - \Delta_2) + \dots + (360° - \Delta_n) = 360º \times n - (\Delta_1 + \Delta_2 + \dots + \Delta_n) = 360°.n - \Delta$
Donde n es la cantidad de vértices de P y Δ el defecto angular.
Por otro lado, también se puede calcular el mismo S de otra manera. En un poliedro de *n* caras, la suma de sus ángulos es $180°(n - 2)$. Entonces, la suma de todos los ángulos de los polígonos que conforman el poliedro puede calcularse como la suma de los ángulos de todas sus caras.
Si llamamos C_3 a la cantidad de caras que son triángulos, C_4 a la cantidad de caras que son cuadriláteros, etc., la suma puede entonces calcularse así:

$$S = (3 - 2)\times180°\times C_3 + (4 - 2)\times180°\times C_4 + \dots + (k - 2)\times180°\times C_k =$$
$$= 180° [(3C_3 + 4C_4 + \dots + kC_k) - 2\times(C_3 + C_4 + \dots + C_k)].$$

Donde k es el número de lados que tienen las caras con más lados en el poliedro.
Ahora, como en un poliedro cada arista pertenece a dos caras, la cantidad total de aristas A es la mitad de la suma de los lados de cada cara y $C_3 + C_4 + \dots + C_k$ es la suma de las caras del poliedro. Sustituyendo, obtenemos:

$$S = 180° [2A - 2C]$$

Igualando ambas expresiones para S, obtenemos la siguiente relación para P:

$$360° \times n - \Delta = 180° [2A - 2C]$$

Si ahora en lugar de escribir n escribimos V, cantidad de vértices, y simplificando:

$$\Delta = 360\times(C + V - A)$$

Para poliedros que cumplan que χ=2, se cumplirá:

$$\Delta = 360\times 2 = 720º$$

a.2) Fundamentación epistemológica

Más allá de los aspectos filosóficos que los antiguos griegos le adjudicaron a los poliedros, durante siglos el arte fue el auténtico motor del interés por los poliedros (Alsina, 2011). Multiplicidad de obras artísticas son testigo de ello. Es a partir del 1600 que los poliedros cobran interés para el desarrollo del conocimiento matemático. Y, tal como vimos en el apartado a.1), los poliedros siguen siendo aún hoy un tema con preguntas por responder o muy recientemente respondidas, y siguen siendo móvil para la creación y desarrollo de las matemáticas.

Si bien la noción de poliedro es de las primeras construcciones humanas de las matemáticas, es recién a partir de la necesidad de encontrar propiedades generales y ampliarlas a otros contextos que se hace necesaria una definición precisa. De hecho, la búsqueda de explicaciones y generalizaciones de la relación de Euler para poliedros convexos fue uno de los problemas germinales de la Topología, rama de las matemáticas que hoy en día vertebra los avances en el resto de las áreas. Según Amstrong (1987), “este resultado constituyó el punto de partida de la Topología moderna” (p. 9). Recíprocamente, fue gracias al desarrollo de la Topología en el siglo XX que pudieron precisarse las definiciones de poliedros que consideramos en este trabajo. En este sentido consideramos que el contenido *Poliedros* es un tema ineludible en la formación actual de maestros y profesores de Matemática.

Por otro lado, entendemos que los poliedros han representado una buena puerta de entrada para el desarrollo de conocimiento en torno a la geometría del espacio: definiciones y propiedades relativas a entes abstractos como rectas y planos en el espacio que sólo existen como creación humana. De eso nos ocuparemos en el siguiente apartado.

b) Aspectos didácticos: relevancia del tema para la enseñanza en la formación de formadores, incluidas estrategias y evaluación

b.1) Prácticas de enseñanza en la formación docente

Los aspectos didácticos deben ser abordados teniendo en cuenta al menos dos grandes componentes de la actividad matemática y su enseñanza: la epistemológica y la metodológica. Desde la dimensión epistemológica, hemos brindado en la sección anterior muestras de nuestra concepción de las matemáticas: como una construcción humana en permanente proceso, del cual el concepto de *poliedros* es testigo.

Por otro lado, es necesario tener en cuenta lo que Ball, Thames y Phelps (2008) denominan *conocimiento especializado del contenido* dentro de la categoría más amplia *conocimiento del contenido,* considerada por Shulman (1986) como uno de los conocimientos bases del docente. Ball et al. (2008) sostienen que los docentes tienen que aprender conocimiento *común* de las matemáticas -el mismo conocimiento que en otras carreras vinculadas con matemáticas- pero también deben aprender contenidos matemáticos que son específicos para la enseñanza. El conocimiento especializado de las matemáticas implica, entre otros, evaluar las conjeturas de los estudiantes, anticipar métodos alternativos de resolución, seleccionar representaciones adecuadas para el contenido a enseñar, comprender el

sentido matemático de las producciones de los estudiantes, formular ejemplos adecuados y presentarlos en momentos precisos, saber responder preguntas del tipo “por qué”, conocer las explicaciones matemáticas de reglas y procedimientos estándares.
Cabe preguntarnos: ¿Por qué es importante enseñar este tema en la formación de profesores?, para lo cual debemos primero responder ¿por qué es importante enseñar poliedros a los ciudadanos, destinatarios finales de nuestra enseñanza? Por un lado, los poliedros permiten un abordaje concreto a un tema tan abstracto como las posiciones relativas y relaciones entre rectas y planos en el espacio. Por otro lado, este contenido permite mostrar a la matemática como una ciencia en construcción, con preguntas formuladas hace mucho tiempo, pero también preguntas formuladas más recientemente, algunas con respuestas aún por encontrar. También permite enriquecer las conexiones entre diferentes ramas de las matemáticas, por ejemplo, estableciendo vínculos con el álgebra o la topología. Por último, este contenido da la oportunidad a los estudiantes de crear matemática, vivenciando la concepción de la misma que antes explicitáramos. Desde la simple construcción de poliedros hasta la más compleja búsqueda de relaciones generales entre sus componentes o intentos de clasificaciones del conjunto de los poliedros, todas esas son oportunidades para crear. Estos aspectos deben ser tenidos en cuenta en toda propuesta de enseñanza de este tema, desde niveles iniciales hasta universitarios.
Respecto a la dimensión metodológica, es importante tener en cuenta investigaciones en el campo de la Matemática Educativa que nos informan que los docentes ya poseen, incluso previo a su formación específica en educación, sistemas de creencias y concepciones pedagógicas estables, difíciles de modificar (Marcelo, 1994 y Mellado, 1996).
Si los profesores en formación toman como referencia, positiva o negativa, para la enseñanza de las ciencias, a los profesores que han tenido a lo largo de su etapa escolar, es fundamental que la metodología utilizada durante la formación inicial sea consistente con los modelos teóricos que propugnan. En caso contrario, los estudiantes para profesores aprenderán más de lo que ven hacer en clase, que de lo que se les recomienda hacer. (Mellado, 1996, p. 299).
Ya en 1991 la NCTM recomienda que los futuros docentes de matemática sean enseñados en forma parecida a como ellos habrán de enseñar. Esto es, que “puedan explorar ideas matemáticas, elaborando conjeturas, comunicándose, razonando.” (Olave, 2013, p. 27).

b.2) Niveles de conocimiento geométrico de Van Hiele

Una manera de estructurar la enseñanza y el aprendizaje de la Geometría, en particular de los poliedros, puede consistir en considerar el modelo presentado por Dina y Pierre Van Hiele en 1957. Este modelo articula el aprendizaje de la geometría en niveles cognitivos, y, haciendo uso de esos niveles brinda una posible explicación del porqué del fracaso del currículo tradicional en geometría: es presentado de manera prematura en un nivel más alto que aquel en el que los estudiantes están operando. Según explican Alsina, Burgués y Fortuny (1997), en un determinado nivel ciertos objetos o relaciones pueden ser estudiados, pero otros no se manejan o sólo se manejan como objetos transparentes, inaccesibles. En el siguiente nivel se suponen conocidos los saberes del nivel anterior y se pueden explicitar nuevas relaciones, que permanecían implícitas previamente.
Van Hiele (1986) propone los siguientes cinco niveles de conocimiento geométrico:
Nivel 0. Visualización o reconocimiento: Percepción global de las figuras, sin distinción de sus propiedades

Nivel 1. Análisis: Consideración de elementos y propiedades de las figuras. Identificación de familias de figuras sin explicitación de las relaciones entre ellas.
Nivel 2. Deducción informal: Establecimiento de relaciones entre las propiedades de una figura. Formulación de definiciones económicas y completas y clasificación de las figuras.
Nivel 3. Deducción: Comprensión y uso del razonamiento formal para deducir una propiedad de otra(s)
Nivel 4. Rigor o abstracción. Comprensión y uso de diferentes sistemas axiomáticos que definen diferentes geometrías.

b.3) Implicancias para la enseñanza de los poliedros

b.3.1) Formación de maestros y profesores de Matemática

Las consideraciones anteriores nos permiten inferir algunos aspectos importantes a tener en cuenta para la enseñanza de los poliedros en la formación docente. En primer lugar, que es importante brindarles a los docentes oportunidades de transitar por los diferentes niveles del modelo, para lo que es importante poner atención sobre las tareas que se proponen.
Tanto en el programa vigente de Matemática II para Magisterio (DFPD, 2008a) como en el de Geometría para la formación de profesores de Matemática (DFPD, 2008b) se propone abordar el paralelismo y perpendicularidad en el espacio y también el contenido *Poliedros*. A partir de lo expuesto entendemos que el estudio de los poliedros puede ser una manera de abordar el estudio más general del paralelismo y perpendicularidad en el espacio mediante la visualización de objetos concretos, esto es, respetando la necesidad de los estudiantes de vivenciar el nivel 0. Es decir que primero debería abordarse el contenido poliedros para construir significados relevantes sobre nociones generales de posiciones entre rectas y planos en el espacio.
La representación de poliedros no es trivial ya que, por tratarse de figuras tridimensionales, cualquier representación bidimensional implica distorsionar alguna de sus propiedades. Requiere del uso de diferentes estrategias: representaciones bidimensionales, construcción real, descripción verbal, entre otras. La comprensión de las representaciones y la capacidad de realizarlas implica “visión espacial y conocimiento de convenciones que hay que utilizar, en el paso de la representación al modelo y viceversa” (Guillén Soler, 1997, p. 173).
Esto puede ser realizado mediante actividades de construcción con diversos materiales manipulativos (sorbetes, palitos, plastilina, cartulina con desarrollos planos o materiales comercializados específicamente para este fin, como polígonos en acrílico, imantados, juegos de palillos y bolitas imantados, entre otros posibles materiales). También es importante disponer de diferentes visualizaciones de los poliedros, para lo que pueden emplearse programas específicos de visualización, como el Poly Pro o de construcción, como el GeoGebra. Hoy pueden encontrarse múltiples aplicaciones a tales efectos, incluso para los dispositivos móviles, accesibles a todos los estudiantes. Más allá de que nos encontremos en carreras de nivel terciario, es importante que los estudiantes tengan la oportunidad de manipular, en forma real y virtual.
Tanto en formación de maestros como de profesores de Matemática, es necesario que en esta primera instancia de reconocimiento los estudiantes tengan la oportunidad de transitar entre las diferentes representaciones, por ejemplo del poliedro al desarrollo plano y viceversa.

En estas primeras instancias se puede consensuar con los estudiantes una definición de poliedro -por ejemplo, la definición 1 expuesta en este trabajo- que puede posteriormente ser ajustada a los intereses del desarrollo posterior de la temática.
Después de estas primeras representaciones pueden ser propuestas actividades de transición hacia el nivel 1 (Análisis). Para ello se pueden planificar actividades de atención a similitudes y diferencias (Zaslavsky, 2008). En particular puede darse un conjunto de 20 o 30 poliedros construidos en material manipulativo o mediante sus representaciones bidimensionales y pedirle a los estudiantes que los clasifiquen atendiendo a criterios que ellos mismos deberán crear. También pueden darse dos poliedros y solicitar un listado de diferencias y similitudes. Este tipo de actividades se entiende como de final abierto, es decir que no hay una única respuesta correcta, por eso no sólo es importante la propuesta de la actividad sino también su gestión. Debe ser realizada en grupos pequeños para que todos los estudiantes tengan la oportunidad de participar y dar tiempo para ello. Luego se pondrán en común todas las ideas generadas en los subgrupos y a partir de ello se guiará la discusión para enriquecer las nociones que los estudiantes tienen sobre poliedro. Otro tipo de actividades posibles, también de final abierto, son las que requieren que los estudiantes elaboren mensajes para describir o indicar cómo construir un poliedro determinado (Gaulin, 1985, citado en Guillén Soler, 1997).
Es esperable que a partir de este tipo de actividades los estudiantes pongan atención a los atributos de las figuras puestos en juego, lo que les permitirá conjeturar propiedades de las figuras, comunicarlas, discutir su validez, validarlas o refutarlas en un trabajo conjunto con otros estudiantes.
Una vez logrado el reconocimiento de algunas propiedades y elementos que permiten describir a los poliedros, pueden proponerse actividades para identificar ciertas familias de poliedros. En este trabajo hemos propuesto un recorrido que pone atención a la regularidad de las caras y la uniformidad de caras, vértices y aristas, en este orden. No pretendemos clasificaciones exhaustivas del mundo de los poliedros, pero sí abordar su estudio mediante la consideración de algunos subconjuntos especiales. Así pueden surgir las familias de poliedros que expusimos en el apartado a.1), en primer lugar sin explicitación de las relaciones entre ellas pero más adelante intentando establecerlas. Por ejemplo, mediante preguntas del tipo: *¿hay antiprismas cuyas caras sean todos polígonos regulares de un solo tipo*? Ello conduciría a los estudiantes a transitar al nivel 2 (deducción informal).
Una vez creados los criterios para diferenciar familias de poliedros y consensuado qué poliedros las componen, los estudiantes pueden formular definiciones económicas y completas. Es importante tener en cuenta que según el modelo de Van Hiele, es recién en este nivel 2 que los estudiantes logran significar estas definiciones y no antes.
A medida que se van estudiando las propiedades geométricas de cada una de las familias, pueden explorarse relaciones entre sus elementos, por ejemplo entre la cantidad de caras, vértices y aristas. A partir de razonamientos inductivos puede conjeturarse que para un prisma o antiprisma cualquiera se cumplen la relación de Euler y la de Descartes. Un razonamiento deductivo permite explicar por qué son válidas para cualquier elemento de algunas de esas familias. Demostrar lo mismo para otras familias, como la de poliedros arquimedianos o deltaedros, puede ser más engorroso, pero el hecho de que sean familias finitas lo hace posible. Este tipo de trabajo puede conducir a que el estudiante recree esas relaciones y sienta la necesidad de preguntarse qué grado de generalidad tienen, si serán válidas para otros poliedros. La búsqueda de patrones y relaciones generales es esencial en

la actividad matemática y es importante que estudiantes de todos los niveles, especialmente futuros docentes, la vivencien. Además, en particular estas relaciones estrechan vínculos entre geometría y otras ramas de la matemática, como aritmética o álgebra.

En esta misma línea puede ponerse atención sobre otro tipo de relaciones entre cantidad de caras, vértices y aristas, como las expuestas en el apartado a.1.3), las que consideradas en conjunto con la relación de Euler permiten concluir que, en los poliedros homeomorfos a una esfera, se cumple ${}^{1}/_{2}V + 2 \leq C \leq 2V - 4$. Ello posibilita una interesante exploración sobre la existencia de poliedros con una cantidad dada de caras y de vértices.

Tanto en la formación de maestros como de profesores de Matemática, el análisis de propiedades en los poliedros es un camino deseable para intentar explicar las fórmulas conocidas para hallar sus volúmenes y áreas.

Además, es importante tener en cuenta las conexiones entre este contenido matemático y el arte y la naturaleza, ambos móviles para la creación humana de poliedros y su estudio.

b.3.2) Formación de profesores de Matemática: Geometría

En la formación de profesores específicamente, después del trabajo anterior pueden proponerse, en el curso *Geometría* de primer año, actividades que permitan a los estudiantes alcanzar el nivel 3 del modelo de Van Hiele. Un primer tipo de tareas puede ser demostrar la existencia de una determinada cantidad de poliedros de una familia. Por ejemplo, que los deltaedros convexos son 8 o que los poliedros arquimedianos son 13 (sin considerar simetrías). Es importante recordar que estas demostraciones deben seguir siendo acompañadas de material concreto, ya que no pretendemos aún trabajar con sistemas axiomáticos abstractos.

También pueden proponerse actividades que permitan reflexionar sobre la definición de poliedro acordada en primera instancia, por ejemplo mediante un banco de imágenes más amplio que el expuesto en este trabajo. Tal discusión podría seguir las mismas pautas que la presentada en el apartado a.1). Otro tipo de tareas puede ser la discusión de las demostraciones elaboradas para propiedades consensuadas previamente, por ejemplo, sobre la existencia de únicamente 5 poliedros regulares o la misma relación de Euler. Nuevamente la discusión expuesta en este trabajo sobre tal demostración puede ser insumo para ello.

En relación a los poliedros arquimedianos es sumamente interesante el análisis de cómo pueden ser construidos a partir de truncamientos de poliedros regulares. Se puede preguntar a los estudiantes qué poliedro se obtiene al truncar a cada uno de ellos por puntos especiales de sus aristas (por ejemplo los que las dividen en dos o tres partes iguales) y analizar si la figura obtenida es o no un poliedro arquimediano. También puede profundizarse el estudio al visualizar que ciertos truncamientos no generan el poliedro esperado, y reflexionar sobre cómo pueden obtenerse mediante truncamientos o mediante otro tipo de métodos todos los poliedros arquimedianos. Este estudio conduce a estrechar relaciones con el contenido paralelismo y perpendicularidad, mediante preguntas tales como: *¿qué tipo de poliedro se obtiene al truncar un octaedro por sus puntos medios? ¿Cómo puedo explicar que efectivamente sus caras son triángulos equiláteros y cuadrados*? Lo último sólo puede ser explicado mediante la consideración de propiedades relativas a rectas y planos paralelos y perpendiculares en el espacio.

b.3.3) Formación de profesores de Matemática: Topología

Dado que el estudio de los poliedros y sus propiedades fue uno de los móviles del desarrollo de la Topología, en particular la Topología Combinatoria, puede resultar de interés una discusión sobre ello en el curso *Topología*.

En ese marco puede abordarse de forma más general la relación de Euler, observando que es un caso particular de una relación más general, la llamada característica de Euler-Poincaré. Esto conduce a la necesidad de estudiar el homeomorfismo, ya que dos poliedros que sean homeomorfos tendrán la misma característica. De esa manera puede significarse el estudio de la continuidad, tema central en Topología. Además, resulta interesante el análisis de demostraciones alternativas a las aquí presentadas para la relación de Euler. En Armstrong (1987) se presenta una demostración que involucra el concepto de conexión, uno de los contenidos a abordar en el curso, y que hace uso de la teoría de grafos. Según el autor, esa demostración es elegante por prescindir de la inducción y es interesante porque no sólo permite concluir sobre la relación de Euler para ciertos tipos de poliedros sino que también permite concluir que dichos poliedros pueden deformarse de manera continua hasta obtener dos discos identificados a lo largo de sus contornos, formando una esfera. Esto permite concluir que los únicos poliedros que cumplen la relación de Euler como él la formulara son los que son homeomorfos a una esfera.

Por otra parte, en el curso de Topología podrían estudiarse espacios que son generalizaciones de los poliedros: los politopos. Para algunas propiedades puede convenir abordarlas en espacios más generales y luego verlas como casos particulares aplicadas a figuras tridimensionales.

b.4) Evaluación

Entendemos a la evaluación como indisociable de la enseñanza, consistentemente con lo antes expuesto. Explicitamos aquí algunos aspectos y estrategias que creemos podrían tenerse en cuenta específicamente en la formación de profesores.

Una evaluación formativa y continua permite al docente formador estar atento a las necesidades de sus estudiantes, reconocer sus intereses, debilidades y fortalezas. Es indispensable para replanificar actividades. Por otro lado, ese tipo de evaluación permite al estudiante, futuro profesor, percibir la evaluación como parte intrínseca de su aprendizaje y enriquecer su metacognición: aprender a identificar sus propias debilidades y fortalezas sobre la temática.

Para lograr que este tipo de evaluación sea real es necesario dejar de identificar evaluación con calificación y no concebir al parcial como única vía de devolución al estudiante sobre sus actividades. Debemos implementar otras estrategias que posibiliten una interacción constante. En el salón de clase, abandonar la tradicional postura de profesor que enseña-estudiante que aprende y facilitar un ambiente real de construcción de conocimiento, permite que el docente indague cuáles son los conocimientos previos de los estudiantes, que ellos puedan explicitarlos, y generar así que el estudiante se apropie de su propio proceso de aprendizaje. En esas dinámicas tanto estudiantes como formadores pueden identificar los aspectos dominados y aquellos sobre los que es necesario continuar trabajando. Las tareas de final abierto propuestas (Zaslavsky, 2008) se presentan como ideales para tal fin.

Además de ello, puede implementarse la entrega de tareas escritas o presentación de temas, ya sea de forma individual o en equipos que serán consideradas como instancias de evaluación en las que puede asignarse una calificación, o no. Mediante esas tareas el

docente puede monitorear el avance del conocimiento de los estudiantes en la temática, sin olvidar que las presentaciones orales los fortalecen para el ejercicio de su futura profesión.
No pueden despreciarse las pruebas escritas, ya sean escritos bimensuales o parciales cuatrimestrales en las que los estudiantes deben demostrar un conocimiento integrado de la temática. Es importante que estas pruebas no se separen del contenido abordado en el curso.
Una estrategia que hemos implementado es la formulación de preguntas orales establecidas con anterioridad a las pruebas finales. El conocerlas permite a los estudiantes prepararlas con anticipación y tener una mejor idea de cuáles son las expectativas por parte de los docentes respecto a las respuestas, algo especialmente importante para estudiantes de primer año.

c) Proyección en líneas de investigación

Entendiendo que los aspectos epistemológicos, cognitivos y didácticos están íntimamente relacionados, especialmente pensando en la formación de docentes, proponemos algunas preguntas que pueden ser abordadas teniendo en cuenta esas tres grandes dimensiones del triángulo didáctico.

- Sobre la definición de poliedro: ¿qué consecuencias epistemológicas y didácticas tiene asumir una u otra definición de poliedro? Una determinada figura, ¿puede ser poliedro según una definición pero no serlo según otra?
- ¿Qué tipo de tarea relacionada al concepto de poliedro promueve una mejor transición entre los niveles del modelo de Van Hiele? Interesaría en este caso recorrer todo el tramo formativo, desde niveles iniciales hasta formación de maestros o docentes.
- Inspirados en la investigación desarrollada por Ticknor (2012) relativa a la enseñanza de Álgebra en formación de profesores, podemos preguntarnos: ¿cómo contribuye la enseñanza del tema *Poliedros* en los cursos actuales de formación docente al conocimiento matemático especializado de los estudiantes? ¿Logran esos estudiantes establecer conexiones entre lo que aprenden en las aulas de formación docente y las Matemáticas que deben enseñar en nivel primario o secundario?

Referencias

Alsina, C. (2011). *Las mil caras de la belleza geométrica. Los poliedros*. Madrid: RBA Coleccionables.

Alsina, C. Burgués, C. y Fortuny, J. (1997). *Invitación a la Didáctica de la Geometría*. Madrid: Editorial Síntesis.

Armstrong, M. A. (1987). *Topología Básica*. Barcelona: Editorial Reverté.

Ball, D., Thames, M. y Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special? *Journal of Teacher Education 59*(5), 389-407.

Collete, J. P. (2006). *Historia de las matemáticas*. México DF: Siglo XXI ediciones.

Coxeter, H. (1999). *The Beauty of Geometry. Twelve essays*. Nueva York: Dover.

Dalcín y Molfino (2018). *Cuerpos con historia POLIEDROS para experimentar. Vol. II*. Montevideo: Ediciones Palíndromo.

Dirección de Formación y Perfeccionamiento Docente (2008a). Programa de Matemática II para Magisterio. Plan 2008.

Dirección de Formación y Perfeccionamiento Docente (2008b). Programa de Geometría para profesorado de Matemática. Plan 2008.

Euclides (2007). *Los Elementos. Tomo I y II*. Barcelona: RBA
González Urbaneja, P. M. (2006). *Platón y la Academia de Atenas*. Madrid: Nivola.
Guillén Soler, G. (1997). *Poliedros*. Madrid: Síntesis.
Lages Lima, E. (1991). *Meu Professor de Matemática e outras histórias*. Rio de Janeiro: Sociedad Brasilera de Matemáticas
Marcelo, C. (1994). Investigaciones sobre prácticas en los últimos años: qué nos aportan para la mejora cualitativa de las prácticas. Ponencia presentada al *III Symposium Internacional sobre Prácticas Escolares*, Poio.
Mellado, V. (1996). Concepciones y prácticas de aula de profesores de ciencias, en formación inicial de primaria y secundaria. *Enseñanza de las ciencias*, 14(3), 289-302.
National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (1991). Principles and Standards for School Mathematics. Recuperado de http://www.fayar.net/east/teacher.web/math/standards/previous/profstds/index.htm
Olave, M. (2013). *Modelos de profesores formadores de Profesores de Matemática: ¿cuáles son y en qué medida se transmiten a los futuros docentes? Un estudio de casos.* Tesis doctoral no publicada. CICATA, IPN. México. Recuperado de http://www.matedu.cicata.ipn.mx/tesis/doctorado/olave_2013.pdf
Puig Adam, P. (1986). *Curso de Geometría Métrica. Tomo I.* Madrid: Euler Editorial.
Rouse Ball, W. W. y Coxeter, H. S. M. (1962). *Mathematical Recreations and Essays.* New York: The Macmillan Company.
Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4-14.
Ticknor, C. (2012). Situated learning in an abstract algebra classroom. *Educational Studies in Mathematics 81*, 307-323.
UniformPolyhedron, Wikiwand. Recuperado el 26 de febrero de 2019 de: https://www.wikiwand.com/en/Uniform_polyhedron
Van Hiele, H. P. (1986). *Structure and Insight*. Nueva York: Academic Press.
Zaslavsky, O. (2008). Attention to similarities and differences: A fundamental principle for task design and implementation in mathematics education. Invited presentation at the *Topic Study Group (TSG34) on Research and Development on Task Design and Analysis, the 11th International Congress on Mathematics Education (ICME-11),* Monterrey, Mexico.

Poliedros

Nathalia Weigle

Introducción

En este ensayo se pretende poner de manifiesto la importancia de los poliedros en la formación de los futuros maestro de primaria, y como se podría plantear un acercamiento a la enseñanza de las matemáticas en formación docente, planteándose una visión didáctica, metodológica y evaluativa. En todo momento, se comparten posibles factores, variables, reflexiones e hipótesis a tomar en cuenta en la enseñanza de la geometría, siendo el rol docente en su función de mediador del quehacer educativo; el cual permite proponer situaciones que acceden a la aprehensión de los conocimientos geométricos en la actualidad desde una perspectiva crítica compleja.

a) Dimensión disciplinaria

a.1) Génesis epistemológica de Poliedros

Es necesario que los estudiantes de cualquier nivel de educación pero especialmente en la formación de futuros docentes, tengan como parte de sus planes de estudios consideraciones de tipo epistemológicas, debido a que estas permiten abordar temáticas desde una perspectiva más amplia, en la que se contemple no solamente el conocimiento científico como tal sino también la evolución del pensamiento matemático y el impacto que ha producido en el hombre y en la sociedad. En este sentido D´Amore (2007, en González, 2013, p. 16) plantea:

> el desarrollo de la matemática, procede de diversas direcciones, pero no se puede negar que, en primera instancia y con gran fuerza, se asocie a la creación de conceptos; ahora bien, no se pueden crear conceptos sin delinearlos epistemológicamente, por tanto, queriendo sin querer, quien reflexiona sobre el desarrollo de la Matemática debe necesariamente plantearse el problema de la naturaleza de los conceptos.

Sin conocer el origen y evolución de las ciencias tampoco se logra acceder a nuevos avances, en este sentido Ramírez (2010, en González, 2013, p. 23) plantea:

> Los docentes deben conocer la historia de las ciencias y las diferentes posturas epistemológicas de las ciencias experimentales, para reconocer y articular en su desempeño, la enseñanza de una ciencia que reconozca el cómo, el para qué y el qué de la misma, es decir, llevar al aula de clases discusiones relacionadas con el origen de la ciencia como campo que ayuda a comprender de mejor manera, la construcción y dinámica de la ciencia que enseña el docente y que además permite la innovación, el fortalecimiento de procesos argumentativos, el desmonte del fundamentalismo de las teorías y la discusión de las rupturas y problemas en el desarrollo de un concepto científico dentro de su contexto de producción.

Si se parte de lo expuesto en la cita, dicha ciencia posee un lenguaje simbólico, pues debe su comprensión al modo en que el individuo establece un significado según su realidad sociocultural; ésta logra la aprehensión del conocimiento si incentiva la abstracción, se mejoran las destrezas y habilidades cognitivas en el individuo, a través de competencias fundamentales en el hacer matemático. La forma de enseñar en los futuros docentes está marcada por sus experiencias de aprendizaje, por ese motivo es importante variar prácticas de representación, de copia, de comunicación, de clasificación, con legajos, en palabras de Fripp (2011) "Cuando se plantea la necesidad de variar las actividades se hace referencia a situaciones que involucren, para su resolución, la contemplación de aspectos diferentes de un mismo contenido."

a.2) Introducción Histórica-Construcción conceptual

Según Alsina, Burgues y Fortuny (1997) plantean la siguiente construcción histórica, comenzando desde los problemas de medidas, que motivaron el nacimiento de la geometría empírica. En la cultura egipcia se puede encontrar una culminación de la geometría aplicada tanto ligada a la resolución cotidiana de problemas como a la creación artística. Entre los siglos VI y III a. C. se da en la sociedad griega el paso decisivo del empirismo al carácter científico. Según Proclo: "Thales fue el primero que, habiendo estado en Egipto, introdujo esa doctrina (de la Geometría) en Grecia." A Thales se unirían, junto con sus respectivas escuelas, Pitágoras, Heráclito de Efeso, Hipócrates de Quío, Eudoxo, Euclides, Arquímedes, Apolonio, etc. el conocimiento geométrico se transmitió de maestros a discípulos. Hay que destacar en este periodo los libros denominados los Elementos de Euclides fueron los textos de la época, usados por los alumnos de Euclides en su escuela de Alejandría, el mismo es considerado como el texto "definitivo", cuyo prestigio y uso se prodigará durante dos milenios. Se considera a la geometría euclidiana de creer ser la disciplina esencial para la descripción de la realidad. La geometría encarna el gran modelo del rigor, algo a lo que la Filosofía y los otros saberes deberían tener, su enseñanza esa interrogaciones socráticas, de diálogos peripatéticos, de esquemas trazados con estilete sobre arena y no está exenta de estructura. El énfasis está más en el razonamiento deductivo correcto que en la aplicabilidad, o la exactitud de la representación. El Imperio Romano recoge la herencia de las mismas y se realiza la traducción del griego al latín de los Elementos, que más tarde desempeñará un papel esencial en la difusión del conocimiento geométrico en Europa para luego trascender y posibilitar el Renacimiento. En el siglo XVI surgen las nuevas geometrías para la representación: la Proyectiva y la Descriptiva. Con el tiempo la aritmetización de la Geometría encontrará una nueva visión con la Geometría analítica de Descartes, donde el divorcio aritmética- geometría parte del desuso de los Elementos. Con el tiempo irán surgiendo aún nuevas geometrías: algebraica, diferencial probabilística o integral, geometrías no euclidianas, combinatoria, etc. el desarrollo de las geometrías en la investigación ha seguido siendo una constante vital de la Matemática del siglo XX, habiendo sido remarcable el empuje dado por Hilbert. Si bien hoy en el siglo XXI la geometría vive de nuevo un momento de esplendor, reconocida por su calidad y si conveniencia, la didáctica planteada sigue en debate abierto si bien antiguamente el saber estaba fraccionado; en cambio hoy se plantea una revolución del saber con el inicio en las modalidades de las tecnologías de la información y la comunicación, las computadoras, han cambiado la forma de transmitir y compartir el conocimiento diseñado desde la interdisciplinariedad, la pluridisciplinariedad o la transdisciplinariedad de los saberes, donde su metodología no son sólo teorías descritas en libros , sino vivientes en la red, los cuales permiten ser enlazados con el uso de la interactividad; es decir, se puede crear colectivamente el conocimiento en intercreatividad.

a.3) Pertinencia disciplinar de poliedros en formación docente

¿Cuál es el sentido de enseñar geometría en la formación docente?, no debemos olvidar que los alumnos de magisterio comunicarán e intercambiaran con sus alumnos sus conocimientos de tal forma que fomentaran la creación y transmisión de cultura, donde la geometría forma parte de ella. La enseñanza de la Geometría en el marco de la educación, según Martínez y Rivaya (1998) cobra importancia debido a que tiene pleno sentido, ya que la Geometría está presente en múltiples ámbitos del sistema productivo de nuestra actual sociedad (industrial, diseño, arquitectura, topografía, etc.), otro factor importante es que a través de la forma geométrica se representan elementos de la naturaleza. Porque es un componente esencial del arte y de las artes plásticas, porque nos sirve para orientarnos reflexivamente en el espacio, para hacer estimaciones sobre formas y distancias, para hacer apreciaciones y cálculos relativos a la distribución de los objetos en el espacio. Pero principalmente la enseñanza de la geometría ha tenido, en efecto, su importancia basada en el carácter deductivo y formal, que fomentado desde la primaria, aún sin el carácter algebraico posterior, permite en los estudiantes el desarrollo de ideas intuitivas como instrumento hasta lograr las formas deductivas finales. Dentro de esta perspectiva, la matemática por ser una ciencia axiomática y formalizada busca dar respuestas a las diversas interrogantes que el hombre se formula diariamente, para construir así, su propio conocimiento. Pero principalmente el objetivo de su importancia recae en formación docente en el sentido de valorar las matemáticas como parte integrante de nuestra cultura, tanto desde el punto de vista histórico como desde la perspectiva de su papel en la sociedad actual.

La formación de futuros maestros debe entenderse desde una visión integral, considerando a la geometría como una de las ramas de las matemáticas y en especial el tema poliedros como un eje dentro de la geometría del espacio. Dentro de la estructura curricular de matemática en la formación de maestros, esto permite a los estudiantes a partir de sus aprendizajes previos, la comprensión e importancia, analizada desde su proceso histórico considerando el significado etimológico de la palabra geometría , "medida de la tierra", nos indica su origen práctico y centrando su enseñanza en los procesos de aula a través de situaciones problemas cotidianos. Como dice Alaminos (2009) "La matemática nace por las propias necesidades de la vida cotidiana y resulta imprescindible para desarrollar las capacidades que le permitan resolver problemas de su vida". El aprendizaje de poliedros implica ciertos aspectos fundamentales, la geometría utiliza la visualización como herramienta para su mejor comprensión; pero no es una herramienta fácil de utilizar para los docentes; por esta razón los temas de visualización de objetos tridimensionales son poco enseñados; los libros de texto no ayudan en su enseñanza puesto que no traen herramientas que permitan su enseñanza; solo se enfocan en la figuras planas dejando de lado el tema sin permitir hacer una representación real del objeto, no se trabaja en espacios conocidos sino con representaciones de espacios ficticios y personajes imaginarios. (Godino, 2011) Es importante en geometría principalmente utilizar diferentes registros tanto para la visualización como para la descripción (palabras, símbolos, signos, fórmulas, expresiones, figuras o gráficos) “la visualización como elemento de comunicación y cognición, el campo de las representaciones semióticas, el campo de la modelación como aspecto integrador de distintas representaciones y en el contexto real donde muchas veces se desprenden las situaciones matemáticas.” (Planchart, 2012) En una época en que la tecnología invade cualquier ámbito de la vida, es necesario que los futuros docentes utilicen todas las herramientas que estén a su disposición, el proceso de enseñanza- aprendizaje mediante los software de computadoras y celulares resulta más atractivo para los alumnos, aumenta y se consigue que el aprendizaje sea más profundo y productivo. Las modelizaciones con diferentes materiales son importantes y muchas veces dejadas de lado en cursos previos a la formación, por ese motivo también es relevante desarrollar esas instancias, para que los alumnos futuros docentes, reproduzcan esas prácticas con sus estudiantes. Principalmente la función del docente del instituto al enseñar geometría estaría exigiendo comenzar a pensar en actividades que generen en sus estudiantes la curiosidad y necesidad de relaciones entre los conceptos involucrados en palabras de Guy Brousseau "La geometría no consiste en describir lo que se ve sino en establecer lo que debe ser visto".

a.4) Conclusiones

Se destaca la enseñanza de la geometría y su impacto en la comprensión de los conocimientos en los estudiantes, la importancia que tienen los factores que influyen en la formación de los futuros docente, las estrategias enseñadas por sus formadores, la comprensión personal. La evolución histórica de la geometría y su enseñanza. La huella de la tecnología en los aprendizajes y la reconstrucción de los conceptos en los estudiantes de magisterio, pensando la evaluación y la metodología desde una mirada más crítica, considerando la creación de espacios para el análisis de diferentes estrategias, se propone cambiar la enseñanza de contenidos, no como un proceso lineal y terminado sino en función de una búsqueda constante de investigación, considerando los aportes constructivos de los estudiantes. En consecuencia, la enseñanza de la geometría en estos momentos donde los paradigmas se ha ido modificando por una necesidad del hombre, es función de los docentes promover una forma de construir el conocimiento desde una perspectiva crítica compleja, donde independientemente del nivel de educación (básico, medio o superior) el estudiante debe partir de lo concreto para llegar a lo abstracto y viceversa.

b) Dimensión didáctica

b.1) Posibles objetivos y finalidades formativas en la formación docente en geometría

Se necesita primeramente reformar la enseñanza de la geometría, debido a que existen diversas formas de conocimiento y cultura que controlan la construcción de una sociedad. Si se considera a la geometría como ejemplo, se puede observar su pérdida progresiva de su posición formativa en la enseñanza de la matemática en varios países del mundo; como consecuencia, se debe revisar la formación de los docentes y por repercusiones al reorganizar la enseñanza superior. Al respecto se han realizando investigaciones que resaltan la problemática existente en la enseñanza de la geometría, en países como México

> se ha observado que los estudiantes tienen serias dificultades al enfrentarse a sus cursos de geometría formal, en particular al hacer demostraciones, y una manifestación de esto es el alto índice de reprobados, lo cual es común en diferentes escuelas. (Cantoral y otros, 2005, p. 152).

En otras palabras, los alumnos presentan dificultades para la aprehensión de los conocimientos geométricos, a manera de identificación de los objetos como entes matemáticos, representación, caracterización de figuras y cuerpos geométricos según su apariencia global. El conocimiento según Muñoz y Velarde (2000), es “la identificación de objetos externos o internos (al sujeto) y su reconstrucción o representación interna adecuada” (p. 417), lo que propicia a originar un conjunto de información almacenada mediante el aprendizaje (a posteriori), o a través de la introspección (a priori), esa reorganización y resignificación de contenidos es fundamental en formación docente. Por otro lado otros investigadores afirman, “…los alumnos pueden manifestar una aparente comprensión y conocimiento pero puede ser que no sean capaces de aplicar esa comprensión y conocimiento para resolver los problemas prácticos relativamente complejos a los que tiene que enfrentarse” (D´Amore, Díaz y Fandiño, 2008, p. 7), pues surge la siguiente pregunta: ¿cómo se debe enseñar la geometría para lograr un verdadero episteme de esta rama de la matemática? principalmente se debe considerar al docente como mediador del aprendizaje del quehacer educativo se deben proponer situaciones donde el estudiante acceda a ensayar, buscar, plantear soluciones, confrontar sus ideas con sus compañeros, discutir y aplicar su propia lógica para resolver conflictos que surjan en su contexto; a pesar, que el alumno desde temprana formación escolar comienza a estructurar espontáneamente el espacio, amerita de todos modos que el docente indague en relación a las experiencias que han construido los estudiantes previamente para ampliar sus conocimientos en dirección de un trabajo pedagógico intencional. Según Medina Rivilla (2009), es importante el conocimiento de la didáctica para desarrollar de forma adecuada el proceso enseñanza-aprendizaje; clarificando y creando escenarios necesarios, estrategias de aprendizaje mucho mejores que los tradicionales.

Objetivos generales

- Fortalecer la construcción de conceptos que promuevan el pensar en la escuela y la enseñanza de la geometría evitando simplificaciones, reflexionar e interpretar sobre las razones que hacen que ciertas prácticas y concepciones se prioricen sobre otras.
- Promover en los futuros docentes el desarrollo de herramientas para ser sus propios formadores en forma continua.
- Diseñar, desarrollar y validar un ambiente de aprendizaje basado en problemas para la enseñanza de poliedros y sus propiedades, para promover el desarrollo del pensamiento espacial y los sistemas geométricos de los estudiantes de magisterio.

Objetivos específicos

- Reconstruir, describir, relacionar conceptos y enunciar propiedades geométricas
- Identificar y utilizar relaciones geométricas para aplicar su enseñanza relacionada a la cotidianidad.
- Construir poliedros usando diferentes estrategias.
- Analizar las principales dificultades del proceso de enseñanza - aprendizaje de la geometría, comparando investigaciones respecto al tema desde una postura crítica.
- Analizar la pertinencia de la solución de un problema.
- Reconocer regularidades y realizar conjeturas a través de las Tic´s.
- Componer, descomponer, truncar o seccionar cuerpos para obtener otros cuerpos.
- Utilizar métodos inductivos para formular conjeturas sobre propiedades geométricas.
- Representación plana de cuerpos geométricos. construcción del desarrollo plano de cuerpos geométricos.

Justificación de las finalidades

El egresado del Instituto enseña matemáticas entre otras materias, por ese motivo es importante que los futuros maestros demuestren una capacitación integral y funcional de ideas matemáticas que incluya la compresión de los conceptos, operaciones y relaciones matemáticas involucradas. En consecuencia la formación del maestro no debe entenderse como una formación centrada únicamente en los contenidos científicos, sino como un conocimiento profundo de carácter didáctico en el área que se ha de impartir. Por lo tanto la matemática planteada en el instituto estará vinculada principalmente a otros contenidos dentro del diseño curricular pensados desde educación primaria. Muchos de estos contenidos han sido estudiados por el alumno en cursos previos, pero generalmente, en forma de unidades acabadas de la comunidad matemática científica y con un enfoque dirigido a la aplicación de fórmulas o conceptos concluidos y por supuesto sin haber reflexionado sobre ellos como objetos de enseñanza. Esta realidad plantea, la necesidad de un tratamiento distinto de los mismos con la finalidad de que los conceptos matemáticos sean resignificados e integrados en función de la tarea de enseñar. Es inevitable tener en cuenta a estudiantes con experiencias previas no siempre positivas frente a las matemáticas, además de las concepciones erróneas que traen sobre algunos conceptos y su aprendizaje, por ese motivo se deberá pensar y crear un clima que le permita desde la diversidad del aula incluir a cada estudiante a apreciar y comprometerse con la enseñanza de resolución de problemas y el aprendizaje de los conocimientos necesarios para fundamentar su posterior enseñanza. El docente del instituto deberá ir creando situaciones que busquen elevar el nivel de aprendizaje matemático de los estudiantes mediante estrategias de reflexión, esquematización, generalización, prueba, rigor y simbolización. Procesos sobre los futuros docentes deberá reflexionar, reconocer y analizar para poder hacer lo mismo en su aula y en el planteo de sus planificaciones. Es importante que el alumno de magisterio demuestren conocimiento y manejo fluido de procedimientos matemáticos, formular, representar y resolver problemas matemáticos desarrollando su capacidad estratégica. Permitiendo exponer un razonamiento adaptativo y demostrando un vocabulario ampliado que permita comunicar las diversas formas de expresión y representación que admiten los contenidos matemáticos a enseñar. Valorando una disposición positiva hacia las matemáticas considerándola valiosa, útil y valorando el esfuerzo continuo que implica su aprendizaje y reconociéndose aprendiz a la vez como hacedor de matemáticas (Silver, 2008). La matemática debe ser enseñada como una fuente de elaboración de desafíos que lleven al estudiante a resolver problemas concretos. No solo se deberá incentivar que los futuros docentes aprendan y reconstruyan conceptos, la enseñanza de las matemáticas debe cumplir otras funciones como explica Fernández (2010) estas funciones son: a) Formativa: desarrolla la capacidad de razonamiento y abstracción. b) Instrumental: permite aprendizajes posteriores dentro de las mismas matemáticas y dentro de otras áreas de enseñanza. c) Funcional posibilita la comprensión y resolución de la vida cotidiana.

b.2) Aspectos disciplinarios involucrados en el desarrollo curricular de Poliedros

Afirman López y García (2008) que de modo general, se observa que la tendencia en primaria y secundaria de la enseñanza de la Geometría es la memorización de conceptos y propiedades, que muchas veces no son comprendidos en su totalidad por todos los estudiantes. Asimismo, en general los profesores en esos niveles de formación no se

detienen en el estudio de aspectos y propiedades geométricas, sino que van directo al desarrollo de actividades de identificación por sus nominaciones, cálculos de ángulos, áreas y volúmenes o repetición de propiedades, sin considerar en sus planificaciones el diseño de tareas que proponga a los estudiantes sostener la validez de una afirmación o conjetura mediante la explicación y la prueba para finalmente hacer la demostración.
¿Qué es un poliedro? Seguramente si en una clase el profesor propone dibujar un heptaedro a uno de sus alumnos, por más que todos sepan sus características, es probable que tengan diferentes imágenes visuales (convexos y cóncavos) o tal vez ninguna de ellas. Otra consigna polémica a considerarse según Alsina, Fortuny y Pérez (1997) sería plantear la siguiente preguntar a un estudiante ¿Limita la superficie del heptaedro? La respuesta es "no" si se define superficie como "limitadora" y sólo si es frontera del poliedro en el sentido de separar el interior del exterior del poliedro. Pero la respuesta sería "sí" si definimos la superficie como "limitadora" y sólo si es la frontera del poliedro en el sentido de que contiene todas sus caras. Luego el problema está en definir "limitar" y "frontera". Estas son algunas de las dificultades en la enseñanza de la geometría

> ...la complejidad de la educación geométrica a diferencia de la educación numérica, radica en la omnipresente e inevitable dialéctica entre la conceptualización y la visualización […] De esta manera, la Geometría puede ser considerada una búsqueda de modelos guiada tanto por el ojo visual como por el ojo de la mente. (Fortuny, 1994)

Muchos de los errores que cometen los alumnos se deben a que tienen imágenes conceptuales pobres sobre los temas sin olvidar que en Geometría el concepto está muy ligado a la imagen conceptual. Es importante aclara que la función del docente del instituto no se enfocará en solo definir objetos geométricos sino de conceptualizarlos. Las tareas de conceptualizaciones que se debe plantear se refieren a la construcción de conceptos y sus relaciones geométricas. Por ese motivo para enriquecer la imagen conceptual de cualquier figura es necesario trabajarla y explorarla de diferentes maneras. Se pretende que la imagen conceptual de un objeto geométrico esté lo más cercanamente posible al concepto en cada caso. Por ejemplo según el Modelo Duval, de acuerdo con la enseñanza y el aprendizaje de la geometría se involucran, como mínimo, tres actividades cognitivas la construcción, que alude al diseño de configuraciones mediado por instrumentos geométricos; el razonamiento relacionado con procesos discursivos y la visualización, cuya atención recae en las representaciones espaciales.
Otro modelo a plantear es el de Van Hiele que surgió producto de la observación de los problemas cotidianos que se presentan en las aulas. Según Los Van Hiele eran dos esposos holandeses, profesores de secundaria, que reflexionaron sobre la problemática relacionada con la incomprensión, por parte de los estudiantes, de la materia que ellos les explicaban que los alumnos podían clasificarse en cinco niveles, 1) visualización o reconocimiento, 2) análisis, 3) ordenación y clasificación, 4) deducción formal y 5) rigor, este modelo, a pesar de la "antigüedad", representa las actuales líneas de investigación en Didáctica de las Matemáticas y constituye una teoría propia en la investigación en geometría. Este modelo incluye dos aspectos, uno descriptivo y otro prescriptivo. El primero intenta explicar cómo razonan los estudiantes a través de una secuencia de niveles de razonamiento. El propósito de exhibir los niveles de razonamiento geométrico de Duval y de Van Hiele, es para tomar conciencia de que los profesores deben tener conocimiento de que el razonamiento

geométrico sigue un proceso evolutivo; se trata de conocer los rasgos que caracterizan cada uno de estos niveles, no se trata de que, a partir de este conocimiento, el profesor etiquete a los alumnos según los niveles establecidos por la teoría de Van Hiele. La pretensión es que el profesor comprenda y tenga presente la forma de razonar de los estudiantes y este conocimiento le permita diseñar actividades que les llevan a niveles más altos de razonamiento. Debido a estos aspectos planteados es importante que los estudiantes de magisterio realicen como parte de su formación un paralelismo y comparación de los conceptos para que en su evolución en el aprendizaje logren reflexionar en los mismos, para ello se consideran diferentes textos, de diferentes niveles, abordando conceptos básicos de geometría, como por ejemplo diferentes definiciones de poliedros. Con una mirada docente crítica, que les permitirá resignificar conceptos y pensar el aprender para enseñar, se recomienda tener presente que el desarrollo de los programas de geometría se recontextualicen, mediante situaciones concretas, que sirvan de ejemplo y demostraciones, con los cuales el estudiante pueda investigar, analizar, confrontar, comparar, deducir e inferir. De lo que se trata es que en las aulas de clases, se plantee una perspectiva, con manejo y dominio del conocimiento teórico, para realizar con eficiencia la aplicabilidad en la práctica.

Definición de poliedro.

> Solido de R^3 limitado por un conjunto finito E de polígonos planos llamados caras, tales que cada lado de un polígono cualquiera de E sea común con un lado de otro polígono de E. Los vértices y las aristas de esos polígonos son los vértices y las aristas del poliedro. (Alsina, Fortuny y Pérez, 1997)

A continuación se plantea el razonamiento deductivo para llevar a una clase la discusión sobre la definición de poliedros basados en los mismos autores. En formación docente no alcanza con repetir de un libro o hacer una definición sin contextualizarla, debemos además sentir la necesidad de examinarla e intentar redescubrirla por nosotros mismos tal y como lo hicieron sus descubridores. Pensando en los motivos en la situación social y política en la cual fue aceptada. Si se considera nuevamente el razonamiento inicial, ¿es un heptaedro un poliedro?, para responder se debe ir analizando diferentes situaciones donde el estudiante acceda a realizar un recorrido que le permita avanzar en la lógica de las definiciones conocidas hasta la construcción de otras, en el continuo cuestionamiento del cumplimiento de sus afirmaciones. Por ejemplo ¿puede un poliedro tener "huecos"?, ¿el poliedro es el "sólido" o la "superficie"? para responder se observan las siguientes definiciones:

> Primera definición: Un poliedro es un sólido cuya superficie consta de caras poligonales. (Legendre, 1809).
>
> Segunda definición: Un poliedro es una superficie formada por un número finito de polígonos (definición aceptada por los topólogos, se utilizó en la Academia Francesa para refutar el monstruo de L’Huilier). (Alsina, Fortuny y Pérez, 1997)

¿Qué pasa si consideramos Siameses de Hessel? Ambos siameses están unidos, ambos construyen una superficie. ¿Forman un poliedro? La respuesta inmediata sería no, porque se trata de dos poliedros unidos. ¿Existirá otra definición que se modifique para cumplir con nuestro razonamiento?

> Tercera definición: Un poliedro es una superficie formada por polígonos colocados de forma que en cada arista se encontrasen exactamente dos

> polígonos y que fuere posible ir del interior de un poligonal interior de otro, siguiendo un camino que no cruce nunca una arista por un vértice. (Alsina, Fortuny y Pérez, 1997)

Hasta el momento se ha utilizado la idea intuitiva de que los poliedros son superficies "cerradas", es importante en esta instancia pensar en el rol del docente al moderar y guiar estas discusiones evitando la ansiedad de llegar a la definición adecuada e ir aportando herramientas de análisis y contraejemplos que les permitan a los estudiantes cuestionarse su razonamiento, para obtener la construcción del conocimiento que son tan importantes como la definición final en sí. Con esta última definición también pueden surgir discusiones tales como si el "polígono es un sólido" o tiene solo una frontera, ahora nuevamente ¿el octaedro de Bricard es un poliedro según la última definición? Observamos nuevamente que nos quedamos cortos con la definición de poliedro.

> Cuarta definición: un poliedro es el lugar geométrico formado por los puntos del espacio que pertenecen a una superficie poligonal dispuesta de tal forma que:
> 1) En cada arista se encuentran exactamente dos caras.
> 2) Es posible ir desde el interior de un polígono al interior de otro siguiendo un camino que no cruce nunca una arista a través de un vértice.
> 3) Las caras sólo se cortan a lo largo de las aristas. (Alsina, Fortuny y Pérez, 1997)

Finalmente con esta definición se logra introducir en el concepto de "superficie poliédrica" más claramente. Pero llegamos a responder ¿un poliedro puede tener huecos?, pensando en una

> Quinta definición: Un poliedro es el lugar geométrico formado por los puntos del espacio que pertenecen a una superficie poligonal dispuesta de tal forma que:
> 1) En cada arista se encuentren exactamente dos caras.
> 2) Es posible ir desde el interior de un polígono al interior de otro siguiendo un camino que no cruce nunca una arista a través de un vértice.
> 3) Las caras no pueden cortarse más que por las aristas.
> 4) no pueden tener "huecos". (Alsina, Fortuny y Pérez, 1997)

Con esta nueva definición surge un nuevo problema: los túneles no serán poliedros. ¿Se puede cambiar algo para poder solucionar esta definición?

> Sexta definición: Un poliedro convexo es el lugar geométrico formado por los puntos del espacio que pertenecen a una superficie poligonal dispuesta de tal forma que:
> 1) En cada arista se encuentren exactamente dos caras.
> 2) Es posible ir desde el interior de un polígono al interior de otro siguiendo un camino que no cruce nunca una arista a través de un vértice.
> 3) Las caras no pueden cortarse más que por las aristas.
> 4) Tiene que existir, como máximo, un sólo polígono en la intersección del poliedro con cualquiera de los planos posibles desde cualquier punto del espacio.

> Séptima definición: Un poliedro convexo es el lugar geométrico formado por los puntos del espacio que pertenecen a una superficie poligonal dispuesta de tal forma que:
> 1) En cada arista se encuentran exactamente dos caras.
> 2) Es posible ir desde el interior de un polígono al interior de otro siguiendo un camino que no cruce nunca una arista a través de un vértice.
> 3) Las caras no pueden cortarse más que por las aristas.
> 4) La proyección de la superficie poligonal, desde su interior, sobre cualquier esfera que la contenga debe ser inyectiva. (Alsina, Fortuny y Pérez, 1997)

De esa forma se podría seguir discutiendo otros detalles de la precisión del vocabulario o la relación con otras definiciones más actualizadas o la relación con otros conceptos, como por ejemplo: ¿pueden los cilindros ser poliedros con la séptima definición?, si consideramos la definición de poliedros planteada por Rodríguez (2005)

> Llamamos poliedro a la figura unión de un número finito de tetraedros tales que todos tengan al menos una cara en común con otro y que la intersección de dos cualesquiera de ellos sea una de las siguientes figuras:
> - el conjunto vacío, - una cara común, - una arista común, - el conjunto unitario formado por un vértice común. Los poliedros que sean figuras convexas, se llaman poliedros convexos.

¿Considera que es similar a las anteriores planteadas? ¿qué diferencias encuentra? ¿se aplica a los considerados poliedros mencionados anteriormente en el proceso?
Este recorrido es el que implica el enseñar y aprender geometría, fundamentalmente en formación docente, pensando en brindar a los estudiantes las herramientas necesarias para que sean capaces después de obtener su título lo suficientemente críticos a la hora de planificar sus clases y buscar materiales adecuados para sus alumnos.

Posible bibliografía básica para recomendar a los estudiantes sobre Poliedros

Alsina, C., Burgués, C. y Fortuny, J. (1997). *Invitación a la didáctica de la geometría. Matemáticas, cultura y aprendizaje*. Editorial Síntesis.

Martínez, A. y Rivaya, J. (1998). *Una metodología activa y lúdica para la enseñanza de la geometría. Matemáticas, cultura y aprendizaje*. Editorial Síntesis.

Ochoviet, C. y Olave, M. (2006). *Matemática 4*. Santillana. Montevideo.

Puig Adam, P. (1979). *Curso de Geometría Métrica. Tomo I-Fundamentos*. Gómez Puig Ediciones. Madrid.

Rodríguez, E. (2005). Geometría del Espacio. Definiciones-Propiedades (enunciados). Montevideo, Uruguay.

Conceptos previos al desarrollo de poliedros en formación docente

El alumno necesita conocer previamente las propiedades de la figura en el plano (paralelismo y perpendicularidad), los polígonos (descripción, clasificación y propiedades en especial de los triángulos) y ha de ser capaz de clasificar las figuras planas por las características que la definen. Axioma de partición del espacio. Definición de semiespacios abiertos. Consecuencias del axioma de partición del espacio.

Selección de contenidos disciplinarios involucrados en el desarrollo curricular de Poliedros
Ángulo diedro convexo, Ángulo triedro, Ángulo poliedro convexo. Conceptos básicos. Los ángulos poliedros. Definición de Poliedro. Superficie poliédrica convexa. Definición de puntos exteriores al poliedro. Poliedros convexos. Teorema de Euler. Poliedros regulares. Teorema de Existencia de los cinco poliedros regulares. Tetraedro regular. Cubo. Octaedro regular. Dodecaedro. Icosaedro. Poliedros regulares conjugados. Centro de un poliedro regular. Poliedros de Platón. Secciones planas. Poliedros regulares conjugados. Distancias de los vértices, caras y aristas de un poliedro regular a un centro. Los poliedros regulares estrellado. Prisma. El paralelepípedo. El ortoedro. Teorema de Pitágoras en el ortoedro. La pirámide. Cálculo de áreas y volúmenes de los diferentes poliedros. Secciones y desarrollos.

b.3) Posibles estrategias didácticas a emplear en la enseñanza de poliedros en formación docente

Debido a la actual heterogeneidad cultural y social que se encuentra hoy en aula de formación docente, se deben pensar como objeto de reflexión múltiples alternativas y estrategias para mejorar el aprendizaje de todos los estudiantes reconociendo que esto no es más que un reflejo de lo que los futuros maestros deberán enfrentar en sus escuelas. A continuación se enumera una serie de posibles estrategias a emplear:

- La resolución de problemas como eje transversal, permitiendo investigar dónde y cómo han surgido estos problemas, analizando que otros problemas les dieron origen o están vinculados a ellos como evolucionaron sus soluciones que usos matemáticos poseen en la actualidad y cómo influyen las herramientas tecnológicas en sus soluciones. Siempre tendiendo a lograr mejorar en el desarrollo de la metacognición matemática al pensar y analizar en los obstáculos que se encontraron en la resolución, logrando mejorar el vocabulario específico, la claridad y coherencia de la comunicación entre lo que se hace y lo que se teoriza. Es importante que los problemas seleccionados sean intra y extramatemática, abiertos y variados que le permitan a los estudiantes la resolución por diferentes estrategias y representaciones, buscando especialmente aquellos que tengan varios abordajes.
- Utilizar el juego como herramienta para generar reflexión acerca de los conceptos matemáticos y de las propiedades. Esta reflexión es la base para construir las propias ideas matemáticas, produce entusiasmo y motivación. Posibilitan el trabajo individual, adaptándose a las necesidades de cada alumno, y el trabajo en equipo ya que dan lugar al debate, al contraste de ideas y al trabajo colectivo
- Fichas de trabajo que impliquen exposiciones orales con el fin de ir convirtiéndose en curadores de información de forma reflexiva a través de la búsqueda de diversas fuentes páginas en internet, libros de texto, textos académicos, etc.
- Utilización de software matemático y diferentes recursos tecnológicos para analizar los posibles fines, ventajas y limitaciones en la enseñanza de las matemáticas, pudiendo los estudiantes vivir experiencias con ellas que les permitan reconocer potencialidades para su aprendizaje y posterior enseñanza, porque es improbable que un estudiantes incorpore estas herramientas en su desempeño futuro si no lo han logrado como alumno. Como dice Pontes (2005, en Camargo, 2014):

  > El uso educativo de las TIC fomenta el desarrollo de actitudes favorables al aprendizaje de la ciencia y la tecnología (…), el uso de programas interactivos y la búsqueda de información científica en Internet ayuda a fomentar la actividad

de los alumnos durante el proceso educativo, favoreciendo el intercambio de ideas, la motivación y el interés de los alumnos por el aprendizaje de las ciencias.

Diseño de actividades o secuencia que se pueden trabajar en el aula escolar actividades que involucre al estudiante en el análisis de su propia práctica matemática y de cómo es la didáctica que vive en el aula del instituto, con el profesor y sus pares, contrastando con sus concepciones y experiencias anteriores, para poder evolucionar en ellas y posteriormente interpretar e implementar lo que considere valioso con sus propios alumnos.

- Las actividades o tareas de investigación según López y García (2008) son aquéllas en las que el alumno indaga acerca de las características, propiedades y relaciones entre objetos geométricos con el propósito de dotarlas de significados. Permite plantear a los alumnos situaciones problemas para practicar un conocimiento o problemas para construir un conocimiento, estos últimos son los que entran dentro de las tareas de investigación. Actividades que estimulan la simbolización, como producciones escritas, si bien no debe ser una condición indispensable para la formalización, es necesario reconocer que su ausencia obstaculiza la posibilidad de generalización, de promover la síntesis, la no ambigüedad o precisión. Para mejorar en este punto se debe discutir sobre las producciones de los estudiantes en función de su pertinencia.
- Mesas de discusión, actividades de intercambio, para poder distinguir los conocimientos logrados por los estudiantes y obtener espacios de argumentación sobre el saber académico.
- Trabajo colaborativo enfocados en proyectos de investigación para promover el trabajo cooperativo y la toma de decisiones responsables, incentivando la disciplina, el esfuerzo y la constancia como integrantes necesarios del quehacer matemático productivo. Discutir, compartir resultados y posibles soluciones a problemas educativos, para potenciar aprendizajes más significativos.
- Modelización de los cuerpos o figuras en el espacio con diferentes materiales.
- Tareas o actividades de demostración como sugiere López y García (2008) tienden a desarrollar en los alumnos la capacidad para elaborar conjeturas o procedimientos de resolución de un problema que después tendrán que explicar, probar o demostrar a partir de argumentos que puedan convencer a otros de su veracidad. Es en este tipo de actividades se puede apreciar la socialización del conocimiento geométrico, ya que desde el enfoque de resolución de problemas se concibe al conocimiento como una construcción social. Estas tareas de demostración son esenciales en Geometría y deben estar presentes en la interacción del aula; la construcción de argumentos lógicos es una habilidad que forma parte esencial de la cultura geométrica y es deseable para que todos los alumnos la desarrollen. El foco está en el desarrollo de estrategias al resolver problemas que permita a los estudiantes avanzar de nivel, es importante tomar en cuenta los aportes de la teoría de Van Hiele ya que esta nos permite comprender y orientar el desarrollo del pensamiento geométrico de nuestros estudiantes tal como lo señala Gutiérrez (2001). Esta teoría nos explica cómo se produce la evolución del razonamiento geométrico de los estudiantes a través de cinco niveles de razonamiento, que van desde la visualización o reconocimiento de las figuras hasta un tratamiento abstracto y riguroso de los conceptos geométricos. Este modelo también nos propone cinco fases de aprendizaje: información, orientación dirigida, explicitación, orientación libre e integración,

que permiten organizar las secuencias de enseñanza y así ayudar a los estudiantes a avanzar de un nivel de razonamiento inferior a uno superior.

b.4) Posible secuencia que se pueden abordar dentro del tema poliedros en formación magisterial

Contenidos Matemáticos: Características y clasificación de los poliedros. Tiempo: 2 horas Objetivos: Promover en los futuros docentes el desarrollo de herramientas para ser sus propios formadores en forma continua. Investigar la construcción histórica y epistemológica de los contenidos matemáticos.

Estrategias y actividades a modo de ejemplo:

Consigna: ¿Considera que la definición de Poliedro planteada por Pitágoras puede ser adoptada en la actualidad? ¿Puede dicha definición cambiar los conceptos actuales? Justifica. ¿En qué se basó Teeteto para afirmar la existencia de cinco poliedros sólidos convexos? ¿A qué se considera el Misterio Cósmico propuesto por Kepler? ¿A qué se le denominan los poliedros de Platón? Para realizar el trabajo deberás reunirte junto con otros compañeros (un máximo de 4 personas), con las cuales formarás un equipo de trabajo. Por ser un trabajo colaborativo de corte investigativo de enfoque histórico. Profundizar la investigación en: ¿Qué preguntas incentivaron a dichos descubrimientos? ¿En qué época? ¿Quiénes? ¿Se pueden resolver de la misma forma hoy en día, esas interrogantes o se tienen otras herramientas? Justifica.

Debe recordar que para ser parte del equipo tendrá que participar activamente en todas las instancias del trabajo. La calificación del equipo contemplará los siguientes aspectos: presentación oral de la clase y el material elaborado. Para el informe final entregado (se tendrán en cuenta en este punto tanto el material elaborado como las correcciones e intercambios realizados por los compañeros luego de la defensa oral). Indicador de evaluación e instrumento Rúbrica elaborada con los estudiantes. Informe escrito (15 hojas máx.) formato ensayo, normas APA. Defensa oral de la investigación realizada.

Contenidos Matemáticos: Clasificación y propiedades. Tiempo: 3 horas. Estrategias y actividades a modo de ejemplo: Objetivo: -Fomentar la profesionalización docente a través de la reflexión del trabajo en el aula. -Centrar y aplicar el juego y la construcción de materiales didácticos como estrategia para lograr diferentes formas de aprender y enseñar matemática

Estrategias y actividades: Propuesta de construcción y diseño de un juego de caja visionando su aplicación en la práctica docente. Consigna: Construcción de un juego que involucre la clasificación de poliedros. Para elaborar el juego deberás tener en cuenta los siguientes aspectos:

1) Debe incluir una clara descripción de las instrucciones a seguir para jugar. En las mismas deberá aparecer: objetivo del juego, tiempo previsto para su desarrollo, cantidad de jugadores, procedimiento y reglas. Sugerencia: Buscar algún juego de caja y leer sus instrucciones como guía para elaborar las propias. Si usaran como base algún juego ya existente mencionarlos así como la fuente donde lo encontraron. Máximo: una carilla

2) El juego debe presentarse en formato “juego de caja” y en consecuencia debe elaborarse el empaque junto con todos los materiales necesarios para jugar (tablero, fichas, tarjetas, reloj, etc.)

Se valorarán muy positivamente el uso de materiales reciclados (botellas, tapitas, cartones, cajas, bolsas, etc.)
3) En caso de ser posible desarrollar una estrategia ganadora para el juego explicarla y fundamentarla. Máximo: una carilla.
Durante todo el proceso se espera que compartan sus avances con el docente y el resto de sus compañeros del curso quienes realizaran aportes para orientar el trabajo realizado. Indicador de evaluación e instrumentos: Rúbrica elaborada con los estudiantes. Informe (10 hojas máx.) escrito con desarrollo teórico, instrucciones y estrategias para ganar. Proyecto con materiales reciclables.

Contenidos Matemáticos: Poliedros Regulares (Problematizar la existencia de cinco poliedros regulares solamente). Tiempo: 3 horas. Objetivos: Fortalecer la construcción de conceptos que promuevan el pensar en la escuela y la enseñanza de la matemáticas evitando simplificaciones e incluyendo las TIC´s.
Estrategias y actividades a modo de ejemplo: (Es inspirada en la actividad 1, Advíncula, 2013)
Ficha 1: ¿Las caras de los poliedros son siempre polígonos regulares? ¿Esa es la única condición para ser poliedros regulares? ¿Cuántos poliedros regulares existen? Justifique su respuesta.
Ficha 2: Visualización de las características de poliedros regulares, a través de un applet de GeoGebra y el video en YouTube de "Tutorial de cómo hacer poliedros en geogebra" Construya los siguientes poliedros regulares usando los útiles de geometría en papel y luego realice las construcciones con las herramientas de GeoGebra "Poliedros regulares". Reconozca y describa las características de cada poliedro. (Se plantea una figura con los cinco poliedros regulares)
¿Qué ocurre si mueve cualquier vértice? Compruebe si las características de cada poliedro se mantienen a pesar de las modificaciones realizadas. Establezca las semejanzas y diferencias entre los poliedros regulares construidos.
Ficha 3. a- Entra a Polypro visualice el desarrollo en el plano de los poliedros regulares usando la herramienta Abrir poliedro, como el del dodecaedro regular para comprender la imagen, entra a "desarrollo en el plano del dodecaedro regular" en https://www.geogebra.org/m/t7nt7MHH#material/xbsau6PK.
b- Realiza el desarrollo en el plano del dodecaedro regular en GeoGebra. Primero visualiza https://www.geogebra.org/m/t7nt7MHH#material/z89xBuwx a modo de ejemplo. Calcule el área de una cara del dodecaedro regular y él área total del dodecaedro regular. Explica tu razonamiento. Determine cuál es la relación que existe entre el área de una cara y el área total del dodecaedro regular. Calcule el volumen de los poliedros regulares. Plantea razonamiento y herramientas utilizadas. Establezca una relación entre las longitudes de las aristas de cada poliedro regular y sus respectivos volúmenes.
c- En el rol de futuro maestro responde: ¿Cómo podría facilitar el aprendizaje de los niños con necesidades especiales el trabajo con manipulativos basados en la computadora?
¿Qué experiencias, conocimientos y vocabulario deberían tener los estudiantes con el fin de desarrollar la comprensión de las características de los poliedros?
Indicador de evaluación e instrumentos: Mesa de debate de estrategias, exposiciones orales trabajo en equipos. Nivel de criticidad y conceptualización del concepto de poliedros

mediante diferentes procedimientos, analizando las ventajas y desventajas de cada uno. Utilizar la tecnología como herramienta de reflexión.

Contenidos Matemáticos: Definición. Desarrollos planos. Secciones planas. Tiempo: 4 horas
Objetivos: Identificar figuras en el espacio y en el plano. Relacionar diferentes métodos de representación. Calcular áreas y volúmenes. Deducir propiedades y relaciones a partir de las secciones. Adquirir un manejo eficiente de los recursos y las nuevas tecnologías de la información y la comunicación.
Estrategias y actividades a modo de ejemplo: Ficha 4: Poliedros convexos
Actividad a. (Extraída de Godino y Ruíz (2002), *Geometría y su didáctica para maestros*. 520 p. Universidad de granada. http://www.ugr.es/local/jgodino/edumet_maestros.)
Se plantea una imagen representando 4 poliedros (regulares y semirregulares) y 5 patrones. Relacionar mediante una flecha cada poliedro con el patrón correspondiente. Justifica tu conexión en cada caso.
b. Construya por lo menos uno de los siguientes poliedros que se obtienen al truncar un poliedro regular, Plante un programa de construcción usando Geogebra para "seccionar los poliedros" como los analizados en el apartado anterior.
Explique el procedimiento seguido en cada caso. Identifique el nombre y características de cada poliedro obtenido.
c. Muestre el desarrollo en el plano de los poliedros construidos. Reconozca la forma de las caras de cada poliedro y relacione el área de estas caras con el área total del poliedro obtenido usando la herramienta de medida Área.
d. Calcule el volumen de los poliedros construidos usando la herramienta de medida Volumen.
e. Actividad (Extraída de Godino y Ruíz, 2002)
Se quiere construir una caja con forma de tronco de pirámide. Más abajo se plantean diferentes desarrollos. Señala las que efectivamente permiten hacer construcciones.
f. Realice la construcción de un modelo de tetraedro con sección en cartulina con diferentes longitudes de aristas 5cm y 10cm respectivamente, realiza una sección con un plano paralelo a la base ¿existe alguna relación entre polígono determinado por la sección y el de la base? Justifica tu respuesta. (Compara medidas de longitudes)
Indicador de evaluación e instrumento: Entrega de Fichas con actividades y modelos relacionados. Mesa de debate de estrategias, exposiciones orales, trabajo colaborativo, compromiso.

c) Dimensión evaluativa

c.1) ¿Qué herramientas se pueden proponer para la evaluación de formación docente?

La evaluación permite analizar el proceso de enseñanza-aprendizaje que se ha planteado con los estudiantes. Accede a obtener información sobre la comprensión del tema y la eficacia de la enseñanza para tomar futuras decisiones, que logren corregir y mejorar estrategias, además de considerar propuestas que admitan la atención a la diversidad del alumnado, valorando la opinión de los estudiantes en la construcción de rúbricas o dispositivos adecuados. Será relevante evaluar en forma periódica las innovaciones prácticas, formuladas ya sea desde el vértice teórico como desde el metodológico o técnico, considerando para las mismas una variedad de estrategias, como por ejemplo:

- Pruebas parciales, escritas u orales valorando su elocuencia en la defensa oral y reflexión del proceso de aprendizaje y su aplicación en su futura profesión. (Margalef, 2005)
- Presentación de proyectos y defensa que permitan contextualizar un posible escenario-investigador, integrando la didáctica y la educación matemática (Gary Fenstermacher).
- Creación de materiales audiovisuales para contribuir con la comunidad educativa, incentivando la reconstrucción de conocimientos, la creatividad, contextualizando y al mismo tiempo aprendiendo a distribuir tareas y formas de organización que permiten al estudiante de magisterio ser más autónomo. Considerando al docente únicamente en su rol de guía. (Don Finkel)
- Utilización de rúbricas consensuados con los estudiantes que permita evaluar sus aprendizajes, así como también implementar la autoevaluación, la coevaluación y la retroalimentación como parte se su cotidianeidad, rompiendo con modelos fuertes estructurados desde su visión de alumno. (Stone Wiske)
- Actividades que promuevan el trabajo colaborativo y la argumentación de sus ideas entre pares. Planteo de la tareas de evaluación auténtica, como por ejemplo "Creación de una secuencia innovadora sobre el tema" que permitan la auto-reflexión.
- Uso de las TIC´s como parte de la evaluación, tecnología aplicada, retos tecnológicos, que impliquen la adquisición de conceptos y el desarrollo de destrezas que debe dominar un maestro en relación con la enseñanza de las matemáticas.
- Lecciones magistrales (Clases teóricas-expositivas)

c.2) Dimensión Proyectiva de investigación. Investigación-acción

Delimitación del problema

En primer lugar, el enfoque será en la formación de maestros; en la necesidad de tener conocimientos matemáticos sólidos para poder enseñar y en la importancia sobre los contenidos que se le ha dado en relación específicamente al tema poliedros en cursos previos. En segundo lugar, desde el ámbito áulico; se plantea una posible estrategia que permita mejorar la práctica docente a nivel de formación de futuros maestros. Las matemáticas impartidas por la mayoría de los docentes, en un gran número de aulas en instituciones públicas y privadas de educación primaria y media, consisten en la memorización de definiciones y procedimientos, se sujeta al reconocimiento de conceptos con la única meta de dar respuesta a un modelo de ejercicio. Basándose generalmente en ejercicios propuestos en los libros de textos indicados en los programas actuales. En general no se tiene en cuenta que el principal objetivo de las matemáticas que es por su origen científico, el dar respuestas a preguntas como: ¿qué es? ¿en qué se fundamenta? y ¿cómo es posible?. Otra situación que obstaculiza y es una variable a tener en cuenta, las formas de aprendizajes o prácticas usuales de enseñanza de la geometría previas a la formación como describe Fripp y Varela (2012), prácticas ostensivas, nominalistas o vinculadas a la medida, pero no permitiendo al alumno el desarrollo del pensamiento geométrico. Esta situación ha generado a través de la historia de la educación y de la enseñanza un pensamiento y una actitud negativa con respecto a las matemáticas por parte de los estudiantes y en ciertos casos por parte de los futuros maestros. Para poder revertir la situación planteada es importante innovar con estrategias en el aula que finalmente den respuestas a las preguntas antes propuestas y evaluar sus resultados permitiendo reflexionar y contribuir en el quehacer matemático productivo dentro de la formación docente. Encontrar y brindar mayor prioridad a la enseñanza de la geometría mediante ambientes de aprendizaje que permitan a los estudiantes establecer relaciones geométricas de diferentes formas, potenciando el razonamiento, generando preguntas y respuestas, usando el conocimiento para explorar distintos caminos en su solución. Encontrar nuevas y variadas estrategias y herramientas que favorezcan el aprendizaje para poder así generar motivación y avances en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Una de las herramientas propuestas será el uso de software GeoGebra, debido a las características de la Geometría y su trabajo escolar ya que la misma debe servir para ayudar a describir y analizar el espacio (Climent, 2011), por lo que se considera imprescindible la realización de actividades atractivas con herramientas de forma intuitiva. Este software permitirá suplir algunas posibles carencias, posibilitando el aprendizaje autónomo y promueve la profundización en conocimientos geométricos básicos de forma interactiva, como se haría con regla y compás, pero en este caso haciendo uso de herramientas TIC's. Como indican Barrera, Infante y Liñán (2013)

> GeoGebra ayuda a comprender conceptos matemáticos que de otra manera, más tradicional –geometría estática vs dinámica– se reducirían a la mera memorización y potencialmente generarían errores de concepción. Con esta herramienta se pueden trasladar demostraciones y construcciones matemáticas de los libros de texto a una pantalla dinámica e interactiva, con la posibilidad de observar cómo varían tanto los objetos gráficos como sus respectivas representaciones algebraicas al realizar algún cambio, facilitando así la compresión de los mismos, la construcción de las relaciones entre las figuras y formas y el reconocimiento de las características críticas que pueden de finir a una figura en el plano o en el espacio.

Pregunta o problema de la investigación

¿Qué conocimientos sobre Geometría (Poliedros) precisa el maestro en formación?

Objetivo generales de la investigación

- Realizar un estudio exploratorio, sobre la comprensión y los conocimientos necesarios de Poliedros ara un futuro maestro
- Diseñar y aplicar una estrategia para promover el aprendizaje de Poliedros y su aplicación en diferentes contextos.

Objetivos específicos

- Identificar las dificultades que presentan los estudiantes en el aprendizaje de Poliedros.
- Diseñar, elaborar y aplicar instrumentos en el aula para plantear una estrategia didáctica fundamentada en la resolución de problemas utilizando Geogebra.
- Desarrollar habilidades para la comprensión, visualización, aplicación e interpretación de situaciones que requieren del uso de geometría en diferentes contextos.
- Evaluar el aprendizaje logrado por los estudiantes con el objetivo de mejorar la práctica docente a través de una reflexión crítica.

Metodología. Investigación cualitativa de corte etnográfico

Primer momento. Indagación de posibles concepciones. Diagnosticar en los futuros maestros, las posibles dificultades en la enseñanza y el aprendizaje de Poliedros. Revisión bibliográfica sobre el tema en artículos y tesis. Aplicación en un grupo de una serie de actividades en las que inicialmente se desarrolla un test con el que se pretende identificar los conocimientos que tienen los estudiantes previos, acerca de las temáticas de trabajo para descubrir las posibles dificultades. Se espera que los estudiantes se cuestionen acerca de diferentes situaciones que tienen que ver con los conceptos matemáticos a tratar.

Segundo momento. Intervención en el aula. En esta etapa se plantea la intervención de estrategias didácticas para el desarrollo de la presente propuesta está considerando el diseño y aplicación de guías o planificaciones para el trabajo de aula. Se planteara una secuencia de cuatro clases observadas y registradas diseñadas de forma que se piense el aumento de grado en cuanto a complejidad de los problemas presentados, con el fin de mejorar el proceso de abstracción y visualización de los estudiantes (construcciones de modelos y utilización de TIC´s).

Tercer momento. Socialización de los desarrollos propuestos por los estudiantes en el aula de clases. Los resultados obtenidos, así como los procedimientos empleados por los estudiantes para resolver los problemas, se socializan en el colectivo, para verificar la viabilidad de cada solución presentada y las dificultades encontradas. En la investigación se destacará la relación que debe existir entre el estudiante y el profesor; y entre él alumno y el resto de los compañeros de clase, por eso se utilizarán más de un instrumento primeramente cuestionarios "fichas", para posteriormente seleccionar estudiantes y realizar una entrevista semiestructurada en profundidad que permita enfocar la problemática desde lo afectivo centrándose no solo en aspectos metodológicos sino también afectivos, útiles para la recopilación de información personal y académica de los mismos.

Cuarto momento. Análisis retroalimentación y consensos de los conceptos. Después de analizar las soluciones y dificultades encontradas, se presentan las explicaciones necesarias, se generalizan procesos y se unifican conceptos. Se implementan las guías con las estrategias didácticas propuestas.

Quinto momento. Evaluación y análisis de la propuesta didáctica. Para verificar la viabilidad de la propuesta didáctica, se realiza una evaluación escrita consistente en solucionar problemas relacionados con los contextos trabajados en las clases previamente. Finalmente se analizan los datos respectivos a la evaluación. Comprobando si el resultado obtenido para el proyecto cumplió con el objetivo y mejoró la enseñanza del tema en los estudiantes.

Resultados esperados

Se pretenden obtener como conclusiones a lo que refiere a herramientas y estrategias de aula con respecto a la enseñanza dinámica y constructiva de las matemáticas:

- El bajo rendimiento en geometría de parte de los estudiantes de magisterio no se debe tanto al carácter abstracto de las matemáticas, sino a las prácticas de enseñanza que se han empleado en las clases.
- La apatía hacia la geometría, que se encuentra culturalmente inmersa en los futuros maestros, representa un factor que inicialmente limita cualquier estrategia pedagógica

que quiera usarse pero que puede ser puesta de lado, gracias al dinamismo y a la recursividad de los docentes.

- Se puede enseñar la curiosidad por redescubrir a cada paso lo que ya se conoce, siendo consciente de que siempre se puede descubrir más, no solo en cuanto a nuevos conocimientos, sino también a nuevas aplicaciones, nuevas formas de interpretar, nuevas motivaciones y lograr comprometer a los futuros docentes a una búsqueda constante dentro de su propio conocimiento, alcanzando una transformación activa de aquello que se quiere enseñar.
- La variedad de estrategias didácticas, la conexión con otros contenidos curriculares aplicados y la metacognición de su práctica matemática permiten al futuro docente analizar y atender el compromiso ético con su desempeño laboral.
- Incorporar en la función docente actual el sentido de compartir, comunicar y difundir para contribuir en el quehacer matemático productivo.
- El uso de las TIC´s son una parte fundamental tanto de nuestra sociedad como de nuestro sistema educativo, por lo que se debe encontrar una manera de integrarlas en las aula, como apoyo en el aprendizaje, y como parte de la construcción de nuevas Matemáticas. Es una herramienta que ayuda a los docentes para preparar estrategias de aprendizaje y sirve como recurso para ampliar los conocimientos. Por ese motivo son un elemento fundamental en el desarrollo del aprendizaje de los alumnos y son una buena herramienta para los docentes.

Bibliografía

Advíncula, E. (2013). Enseñanza de los poliedros con Cabri 3D. Actas del VII CIBEM, pp. 6820-6826. Montevideo. Disponible en http://www.cibem7.semur.edu.uy/7/actas/pdfs/1025.pdf

Alaminos, A. (2009). Las matemáticas en la educación infantil (Innovación y experiencias educativas). ISSN 1988-6047

Alsina, C., Burgués, C. y Fortuny, J. (1997). *Invitación a la didáctica de la geometría. Matemáticas, cultura y aprendizaje*. Editorial Síntesis. Madrid.

Alsina, C., Fortuny, J. y Pérez, R. (1997). *¿Por qué geometría? Propuestas didácticas para la ESO*. Editorial Síntesis. Madrid.

Barrera, V., Infante, J. y Liñán, M. (2013). Conocimiento Matemático Común en Geometría de los Estudiantes para Maestro: una propuesta de innovación. Escuela Abierta. España.

Cantoral, R., Farfán, R., Cordero, F., Alanís, J., Rodríguez, R. y Garza, A. (2005). *Desarrollo del pensamiento matemático*. México: Trillas, S. A.

Climent, N. (2011). Didáctica de la Matemática en la Educación Primaria. Huelva: Proyecto Docente y de Investigación. Universidad de Huelva no publicado.

Camargo Merchán, P. (2014). Las TIC como herramienta facilitadora en la gestión pedagógica. Boletín informativo. Coordinación Educación a Distancia Universidad 06 agosto de 2014. Disponible en https://www.utb.edu.co/newsletter/educacionadistancia/2014/boletin006/noti_apliaciones/005-lastic/index.html

D´Amore, B. (2007). El papel de la Epistemología en la formación de profesores de Matemática de la escuela secundaria. *Cuadernos del Seminario en educación*, n. 8. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia.

D´Amore, B., Díaz, J. y Fandiño, P. (2008). Competencias y matemática. Bogotá Magisterio.
Don Finkel (2008). Dar clase con la boca cerrada. Universidad Politécnica de Valencia.
Fernández, I. (2010). Matemáticas en educación primaria. Disponible en http.www.eduinnova.es/sep2010/09matemática.pdf. Consultado 18/03/2019
Fenstermacher, G. y Soltis, J. (1998). *Enfoques de la enseñanza*. Amorrortu Editores. Buenos Aires.
Fortuny, J. (1994). La educación geométrica 12-16. Sistemática para su implementación. En *La Geometría: de las ideas del espacio al espacio de las ideas en el aula*, Capítulo 7, pp. 105-114. Barcelona: Graó.
Fripp, A. (2011). La construcción metodológica de las prácticas de enseñanza de la Geometría. (Tesis Inédita de Maestría). Universidad ORT. Uruguay. Montevideo.
Fripp, A. y Varela, C. (2012). *Pensar geométricamente*. Grupo Magro. Montevideo.
Godino, J. (2011). Indicadores de idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Universidad de granada. htps://www.ugr.es/~jgodino/eos/jdgodino_indicadores_idoneidad.pdf Consultado 10/03/2018
Godino, J. y Ruíz, F. (2002). *Geometría y su didáctica para maestros*. Universidad de granada. http://www.ugr.es/local/jgodino/edumet_maestros. Consultado 10/03/2018
González, N. (2013) La epistemología de las matemáticas y su contribución al aprendizaje significativo. Tesis de Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales. Colombia
Gutiérrez, A. (2001). La investigación sobre enseñanza y aprendizaje de la Geometría. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Valencia
Itzcovich, H. (2007). Acerca de la enseñanza de la geometría. En H. Itzcovich (coord.), *La Matemática escolar. Las prácticas de enseñanza en el aula*, Cap. 6. Buenos Aires: Aique Grupo Editor. Colección: Carrera Docente. Serie: El abecé de...
López, O. y García, S. (2008). La enseñanza de la geometría. Materiales para apoyar la práctica educativa. INEE. Montevideo.
Margalef, L. (2005). La formación del Profesorado Universitario: análisis y evaluación de una experiencia. Artículo Universidad de Alcalá. Alcalá de Henares (Madrid), *Revista de Educación*, 337, pp. 389-402. Fecha de entrada: 15-03-2019.
Martínez Recio, A. y Rivaya, J. (1998). *Una metodología activa y lúdica para la enseñanza de la Geometría*. Madrid: Síntesis.
Medina Rivilla, A. y Salvador Mata, F. (2009). *Didáctica general*. España: Editorial PEARSON Prentice Hall.
Muñoz, J. y Velarde, J. (2000). *Compendio de Epistemología*. Editorial Trotta, Madrid, 2000.
Planchart, E. (2012), Guías de estudio para el curso de audiovisual geometría.MA1511. Universidad Simón Bolívar.
Ramírez, N. (2010). Importancia de incluir la enseñanza de la historia, la filosofía y la epistemología en las clases de ciencias. Asociación Colombiana para la investigación en Ciencias y Tecnología EDUCyT.
Rodríguez Ruiz, O. (2005). La Triangulación como Estrategia de Investigación en Ciencias Sociales. *Revista de Investigación en Gestión de la Innovación y Tecnología*. Accedido el 15/03/19, desde http://www.madrimasd.org/revista/revista31/tribuna/tribuna2.asp

Stone Wiske, M. (1999). *La enseñanza para la comprensión. Vinculación entre la investigación y la práctica*. Editorial Paidós. Buenos Aires. Colección Redes de Educación.

Álgebra en la Formación de Docentes

Estructuras Algebraicas

Gustavo Franco

Aspectos disciplinarios: Fundamentación epistemológica de su relevancia disciplinaria

> Un «grupo» es una estructura matemática abstracta, una de las más sencillas y de mayor capacidad de penetración en la matemática entera. La noción de grupo encuentra aplicaciones, por ejemplo, en la teoría de números, en geometría diferencial, en cristalografía, en física atómica y en física de partículas. (Davis y Hersh, 1988, p. 155)

Se pueden encontrar en la literatura diversas citas como la anterior que justifican con contundencia la importancia del concepto de *grupo* en la matemática (y no solo en la matemática). A continuación presentaré algunos datos históricos para poner en evidencia la importancia de las *estructuras* en el desarrollo del conocimiento matemático.

Niels Henrik Abel (1803-1829) y Évariste Galois (1811-1832) marcaron un nuevo rumbo para el álgebra: el foco pasó de objetos tales como números o funciones a los objetos llamados estructuras. Mientras que el álgebra de Gauss (Gauss nació en 1777, treinta y cuatro años antes que Galois y un cuarto de siglo antes que Abel; y murió en 1855, veintitrés años después que Galois y veintiséis años después que Abel) se centró en problemas particulares, el de Abel y Galois se enfocó en problemas generales que incluían los casos particulares que interesaba resolver:

> Las ecuaciones abelianas, con las que Kronecker inició su obra más personal, llevaban el nombre de Abel; fue una generalización de las ecuaciones que discutió Gauss en su problema de los polígonos regulares. Si se le ocurrió alguna vez a Gauss que hubiera una generalización, no dejó ningún indicio de que intentara enfocar el problema más amplio. Al enfrentarse con las ecuaciones binómicas, Abel penetró inmediatamente por detrás del caso especial hasta la generalidad abstracta, y elaboró la teoría general. Un contraste análogo existe entre la manera que tuvieron los dos hombres de abordar las funciones elípticas. (Bell, 2004, p. 209)

Esta forma de abordar el álgebra dejó una huella tan profunda que matemáticos posteriores, de la talla de Kronecker y Dedekind, reconocieron que se habían inspirado en los trabajos de Abel y Galois; en particular, en dos de sus conceptos básicos: el de cuerpo y el de grupo.

> Las primeras veces que aparecieron los campos [cuerpos], aunque sin definirlos explícitamente, fueron según parece, en las investigaciones de Abel (1828) y Galois (1830-1) sobre la resolución de ecuaciones por medio de radicales. Las primeras conferencias formales que se dieron sobre la teoría de Galois fueron las de Dedekind a dos estudiantes en los primeros años de la década 1850-60. Por aquella misma época, Kronecker empezó sus estudios sobre las ecuaciones abelianas. Parece que el concepto de campo se introdujo en las matemáticas a través de las obras aritméticas de Dedekind y Kronecker. Ambos, y especialmente Dedekind, admitieron en seguida la importancia fundamental de los grupos para el álgebra y la aritmética. (Bell, 2004, p. 225)

Pero, ¿cómo llegó Galois a construir la teoría de grupos? En la época de Galois se conocían fórmulas para resolver ecuaciones generales de primero a cuarto grado, y Abel había demostrado que es imposible resolver *algebraicamente* ecuaciones generales a partir del quinto grado inclusive. Por otra parte, Galois se propuso demostrar por qué estas ecuaciones no son resolubles algebraicamente y qué casos especiales son los resolubles. En el curso de su trabajo fue que creó la teoría de grupos (Kline, 2000, p. 355).

> Lo que Galois consiguió fue dar criterios definitivos para determinar si las soluciones de una ecuación polinómica podrán o no calcularse por radicales. Sin embargo, más notable quizás que los descubrimientos de Galois en teoría de ecuaciones fuesen los métodos que ideó para estudiar el problema. Sus investigaciones abrieron las puertas de una teoría cuyas aplicaciones desbordan con mucho los límites de la teoría de ecuaciones, teoría hoy conocida con el nombre de teoría de grupos. (Rothman, 1995, p.86)

Aún antes que Galois utilizara el término «grupo», Cauchy, en 1815, realizó investigaciones sobre lo que hoy día se llaman *grupos de permutaciones* y propuso alguno de los teoremas más sencillos. Volvió al asunto en 1844-1846 y le faltó poco para encontrar el teorema fundamental de Sylow. Por otra parte, Cayley (1854) enunció los primeros postulados para un grupo, definiendo con ellos los grupos en el sentido técnico aceptado.

En la primera década del siglo XX los algebristas estadounidenses produjeron numerosas proposiciones vinculadas a los grupos, y fueron muy prolíficos en la determinación de todos los grupos finitos de un orden dado (Bell, 2004, pp. 251-252). En 1981 se logró terminar por clasificar los llamados *grupos finitos simples* (un grupo es simple cuando sus únicos *subgrupos normales* son el formado por la identidad y el propio grupo): todo grupo finito simple o bien pertenece a una de las dieciocho familias identificadas o es uno de los veintiséis grupos llamados *grupos esporádicos*. La historia de los grupos esporádicos se inició con el matemático francés Émile Léonard Mathieu (1835-1890), quien encontró los primeros cinco. Un siglo más tarde, en 1965, el matemático yugoslavo Zvonimir Janko logró construir el siguiente grupo esporádico. Incluyendo el de Janko, entre 1965 y 1975 se construyeron veintiún grupos esporádicos (llevando el total a veintiséis). El objetivo a continuación fue probar que todo grupo finito simple o bien pertenece a una de las dieciocho familias o bien es uno de los veintiséis grupos esporádicos, lo que estuvo a cargo del matemático Daniel Gorenstein. Un elemento decisivo a la hora de probar el resultado anterior, fue un importante teorema demostrado en 1963 por los matemáticos Walter Feit y John Thompson. El teorema afirma que todo grupo finito simple, o bien es cíclico o bien consta de un número par de elementos. (Livio, 2013, pp. 284-286)

> La teoría de grupos es uno de los más fructíferos campos de investigación matemática; Bell tiene razón cuando escribe que mantendrá ocupados a los matemáticos durante cientos de años. Uno de los logros recientes de más importancia en teoría de grupos ha sido una demostración, anunciada en una reunión de la American Mathematical Society en enero de 1981, debida a Daniel Gorenstein, de la Universidad Rutgers. Demostró Gorenstein que una lista de 26 grupos, los llamados grupos finitos esporádicos, es una lista exhaustiva. En

> cierto sentido, este descubrimiento conlleva que los componentes, los bloques constructivos, de cualquier grupo con un número finito de elementos han quedado definitivamente clasificados (Rothman, 1995, p.89)

Me he centrado sobre todo en los grupos (para no excederme en el número de páginas), pero todas las estructuras han tenido su importancia; una importancia que queda evidenciada por los extensos períodos de tiempo que abarca su desarrollo y por el interés que han demostrado grandes matemáticos. La teoría de cuerpos, por ejemplo, fue iniciada por Galois y Abel, desarrollada por Dedekind y Kronecker a mediados del siglo XIX, refinada y ampliada a fines del XIX por Hilbert, tomando finalmente en el siglo XX una nueva dirección en la obra de Steinitz en 1910 y en la de Noether a partir de 1920. (Bell, 2004, pp. 249)

Considero que lo expuesto anteriormente muestra la relevancia que ha tenido a lo largo de la historia las estructuras para el desarrollo del conocimiento matemático. Finalizo la sección con unas palabras de Livio (2013, p. 287): "En los últimos años, el estudio de los grupos finitos está conectado de forma muy compleja con una rica variedad de otras áreas de las matemáticas, desde la topología hasta la teoría de grafos".

Aspectos didácticos: Relevancia del tema para la enseñanza en la formación de formadores

Considero que el tema es relevante para la enseñanza en la formación de formadores por tres motivos: (1) el *propedéutico*, (2) el *pragmático* y (3) el *cultural*.

El motivo propedéutico, al que hago referencia, tiene relación con la importancia que tiene el tema estructuras, tanto como eje transversal para el curso Fundamentos de la Matemática (como desarrollaré más adelante), como para la asignatura Profundización en Álgebra, correspondientes al primer y cuarto año, respectivamente, del profesorado de matemática (la información fue extraída de los programas que se encuentran en la página web del Consejo de Formación en Educación).

El motivo al que denominé pragmático tiene relación con que, estructuras, es un tema que implícitamente está presente en los programas de varios cursos de matemática de la enseñanza secundaria (por lo tanto, su conocimiento resulta imprescindible para un futuro profesor de matemática): en el programa de primer año de ciclo básico aparece *adición y multiplicación en* $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$*; definiciones y propiedades*. En el de segundo año de ciclo básico el tema ecuaciones está presente como eje transversal. En el programa de Matemática del núcleo común, de segundo de bachillerato, aparece *suma y producto de números complejos; propiedades*. En el programa de Matemática II, de segundo año de bachillerato, diversificación científica, aparece *operaciones en* $\mathbb{N}$*; definiciones y propiedades*. (La información fue extraída de los programas que se encuentran en la página web del Consejo de Educación Secundaria.)

Por último, debido a la importancia epistemológica que el tema tiene para la matemática (como justifiqué en la sección anterior), es que considero que debe formar parte del capital cultural de un futuro profesor de matemática.

Aspectos disciplinarios y didácticos: Conceptos o ideas involucrados en el tema y estrategias

Los matemáticos no estudian los objetos, sino las relaciones entre los objetos; por tanto, les es indiferente reemplazar estos objetos por otros, con tal de que no cambien las relaciones. La materia no les importa, solo les interesa la forma.

Henri Poincaré

La siguiente propuesta está pensada para el curso Fundamentos de la Matemática, correspondiente al primer año del profesorado de matemática; la cual sería desarrollada en el primer semestre del año, luego de abordar los temas: Lenguaje conjuntista, Relaciones y Funciones. El tema *Estructuras Algebraicas* se desarrollará utilizando como soporte una presentación en PowerPoint. La presentación será proyectada sobre una pizarra blanca (de este modo se pueden realizar agregados a las imágenes y al texto según lo requieran las eventuales explicaciones y comentarios que se deban hacer). Por otra parte, los estudiantes contarán con la presentación en papel de forma tal que solo deban tomar nota de alguna de las cuestiones que crean esclarecedoras para ellos.

A través de una actividad introductoria se comienza definiendo operación binaria: $*$ es una *operación binaria* definida en un conjunto *A* (no vacío) si, y solo si, $*$ es una función de $A \times A$ en *A*. Se observa que si *c* es la imagen del par ordenado (a,b) según $*$, en lugar de escribir $*(a,b) = c$ (que es como usualmente se escribiría en el contexto de la funciones), se convendrá, en el contexto de las operaciones binarias, escribir $a * b = c$.

Luego se observará que hay dos propiedades que verifica toda operación binaria que se desprenden de la definición: *unicidad* y *clausura*. Estas propiedades pueden ser expresadas en términos de función o en términos de operación binaria (creo importante considerar ambas expresiones para que los estudiantes puedan incorporar la terminología propia utilizada para las operaciones binarias pero comprendiendo sus vínculos con el concepto función ya abordado):

<u>Clausura</u>: Para cada par ordenado (a,b) perteneciente a $A \times A$ existe *c* perteneciente a *A*, que es su imagen. En el contexto de las operaciones binarias, esto se puede expresar como: el resultado de operar dos elementos de *A* es un elemento de *A*.

<u>Unicidad</u>: La imagen de todo par ordenado perteneciente a $A \times A$ es única. En el contexto de las operaciones binarias esto se puede expresar como: el resultado de operar dos elementos de *A* es único.

En este correlato entre función y operación binaria, *imagen* (correspondiente al contexto de las funciones), se corresponde con *resultado* (del contexto de las operaciones binarias).

<u>Nota</u>: Se admitirá (luego cuando se aborde el tema *Número Real* quedará justificado) que $+$ y $\times$ son operaciones binarias en $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$.

A continuación se propondrá como actividad varias relaciones de $A \times A$ en *A* para que los estudiantes determinen cuáles son operaciones binaria definidas en *A* y cuáles no. Las relaciones se presentan a través de distintas representaciones: en *forma tabular*, en *forma algebraica* y en *lenguaje coloquial*.

Un par de consideraciones didácticas en torno a la actividad anterior. En primer lugar, una vez que los estudiantes realicen la actividad estarán en posesión de una variada gama de *ejemplos* y de *no-ejemplos* de operaciones binarias: creo central en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática contar, no solo con ejemplos, sino con no-ejemplos de un cierto concepto. (La construcción de no-ejemplos implica considerar condiciones necesarias que no son verificadas por el concepto.) Para delimitar el alcance de un concepto, es importante no solo tener ejemplos de lo que un concepto es, sino también ejemplos de lo que no es. Los no-ejemplos estarían enriqueciendo la imagen conceptual que vamos formando de los distintos conceptos. Las personas aprendemos también por contrastes: mostrar las similitudes y las diferencias nos permite una comprensión más profunda y precisa. Como señala Bishop (1999, p. 40): "Como argumenta George Kelly (1955), crecemos cognitivamente manejando contrastes. Los contrastes no solo nos proporcionan diferencias: también nos hacen reconocer similitudes porque dos fenómenos deben tener alguna similitud para que sus diferencias se puedan reconocer." En segundo lugar, creo importante proponer a los estudiantes ejemplos variados para evitar que generalicen aspectos irrelevantes del concepto, que eventualmente pudieran obstaculizar o dificultar la comprensión de futuros conceptos matemáticos:

> Cada ejemplo, ineludiblemente, posee también características que son atributos no requeridos, directa ni indirectamente, por la definición (atributos irrelevantes). Aunque es innegable que los ejemplos colaboran al interpretar una definición, el problema que involucran radica en que si la gama que se presenta al alumno no es lo suficientemente rica se corre el riesgo de que generalice los atributos comunes a dichos ejemplos como si fueran todos relevantes al concepto. (Calvo, 2001, p. 39)

A continuación se enuncian algunas de las propiedades que un operación binaria puede o no cumplir (eventualmente una operación binaria puede no cumplir ninguna de ellas): *Asociativa*, *Existencia del elemento neutro* (se introduce la terminología *neutro a izquierda* y *neutro a derecha*), *Existencia del elemento simétrico* (se hace notar que para que una operación cumpla esta propiedad es necesario que tenga neutro; y se introduce la terminología *simétrico a izquierda* y *simétrico a derecha*) y *Conmutativa*. Se analizará, informalmente, cuáles de estas propiedades se cumplen para la adición y la multiplicación en $\mathbb{R}$, lo que permitirá contextualizar las definiciones anteriores y establecer conexiones con los conocimientos previos de los estudiantes. Se observará además que para el caso de la adición definida en $\mathbb{R}$, al simétrico de un número real se lo denomina *opuesto*, y que para el caso de la multiplicación definida en $\mathbb{R}^*$, al simétrico de un real distinto de cero se lo llama *inverso*. También, a medida que se van enunciando las distintas propiedades, se propone a los estudiantes, como actividad, considerar las relaciones de la actividad anterior, que son operaciones binarias, con el objetivo de determinar cuáles propiedades verifican y cuáles no.

Muchas veces ocurre que los estudiantes no utilizan el *contraejemplo* como argumento para justificar que una propiedad es falsa; la siguiente actividad tiene como propósito que los estudiantes reflexionen en torno a la importancia del contraejemplo.

Actividad: Consideremos el conjunto $A=\{-1,1\}$ y la operación binaria Δ definida en A tal que $a\Delta b=a^2-2b^2$.
Un estudiante, para analizar si Δ es conmutativa, procedió de la siguiente forma:

$$a\Delta b=b\Delta a \Leftrightarrow a^2-2b^2=b^2-2a^2$$

A continuación señaló que la igualdad no se verificaba y que por lo tanto Δ no es conmutativa. ¿Es correcta la conclusión del estudiante? ¿La operación binaria Δ es conmutativa?

Actividades como la anterior tienen también como objetivo conectar al estudiante con su futuro rol docente. Para resolverla debe poder reflexionar poniendo en juego sus conocimientos matemáticos, pero además tiene que abrirse a la forma de razonar de otro individuo, sumergirse en un pensamiento que quizás le resulte ajeno, lo cual exige una flexibilidad que considero importante en un futuro docente.

Muchas de las propiedades que eventualmente puede verificar una operación binaria pueden ser reconocidas rápidamente si la operación binaria viene definida por una tabla. A continuación se propone una actividad para que los estudiantes puedan advertir cuándo una operación binaria definida en forma tabular cumple las propiedades: existencia del elemento neutro, existencia del elemento simétrico y conmutativa. Considero relevante el trabajo con distintas representaciones debido a que algunos autores argumentan que las múltiples representaciones de un concepto, y el pasaje entre los diferentes tipos de registros, favorecen la conceptualización y el progreso cognitivo de los estudiantes. Además un cambio de registro puede ayudar a abordar un problema desde una óptica diferente.

Se define luego la propiedad *Distributiva* y se propone una actividad para que los estudiantes analicen si algunas operaciones conocidas son o no distributivas respecto a otras.

A continuación se analiza informalmente cuáles son las propiedades que, en forma tácita, permiten resolver en $\mathbb{R}$, *despejando la x*, ecuaciones de la forma $x+a=b$. De este modo las propiedades que hemos estado viendo se vuelven relevantes en un contexto que es familiar para los estudiantes: considero que establecer conexiones con el conocimiento previo de los estudiantes es clave, no solo porque brinda un anclaje a los nuevos conceptos, sino porque permite una resignificación del conocimiento matemático que ya tienen, generándoles una visión menos fragmentada y más totalizadora. Se observa que, para ecuaciones tan sencillas como las mencionadas anteriormente, es necesario que la adición en $\mathbb{R}$ cumpla cinco propiedades: ser operación binaria (unicidad), cancelativa, asociativa, existencia del opuesto y existencia del neutro. (Si bien la propiedad cancelativa todavía no fue tratada formalmente en el desarrollo del tema, como es un análisis informal, se recurre al conocimiento previo de los estudiantes.)

Para enfatizar la importancia de las propiedades en la resolución de ecuaciones, se les propone a los estudiantes una actividad en la que aparece definida una operación binaria (a través de una tabla) que no es asociativa, y se les presentan dos resoluciones de una misma ecuación realizadas por dos estudiantes distintos: el primero aplica la propiedad asociativa, llegando a un conjunto solución incorrecto, y el segundo aplica solamente la definición de la operación, llegando a un conjunto solución correcto. Luego se pregunta, si alguna de las dos resoluciones es correcta y se les solicita que justifiquen.

A continuación se invita a un estudiante a que, en forma voluntaria, demuestre el *teorema de unicidad del neutro*. Considero relevante que los estudiantes realicen demostraciones en la pizarra, por dos motivos fundamentales: (1) es necesario, como futuros docentes, que desarrollen la capacidad de comunicarse adecuadamente, desde el punto de vista oral y escrito (la comunicación escrita implica un uso adecuado de la pizarra y de la simbología matemática, pero también de la gramática y la ortografía del castellano) y (2) es importante, dadas las condiciones actuales de aprobación de la asignatura, generar ámbitos para que los estudiantes y el profesor puedan simular la situación de una prueba oral.

Podríamos preguntarnos ahora si el simétrico de un elemento, en caso de existir, será único. Para abordar esta pregunta, se propone una actividad en la que aparece una operación binaria definida en un conjunto A, no asociativa, para que observen que si bien todo elemento de A tiene simétrico, el simétrico no siempre es único (en el caso de la operación definida). Luego se solicita, como actividad, que prueben que si una operación binaria cumple asociativa entonces, si existe simétrico de un elemento, este es único.

Se definen los conceptos de estructura y de subestructura. Siguiendo la tradición de lo que se ha venido haciendo en el profesorado de matemática, se define *estructura* como el par ordenado $(A,*)$, en donde A es un conjunto no vacío y $*$ es una operación binaria definida en A. (Rojo (1991, p. 220), siguiendo a Gentile, al par $(A,*)$ lo denomina *monoide*.) Análogamente, si en A están definidas dos operaciones binarias $*$ y $\bullet$, la terna ordenada $(A,*,\bullet)$ también se llama *estructura*. Por otra parte, si $(A,*)$ es una estructura y consideramos un conjunto no vacío B, tal que B está incluido en A y $*$ es operación binaria en B, entonces se dice que $(B,*)$ es una *subestructura* de $(A,*)$. Análogamente se define *subestructura* de $(A,*,\bullet)$. Se solicitan ejemplos y no ejemplos de estructuras conocidas.

Algo interesante vinculado con las estructuras y las subestructuras es cuáles son las propiedades que se *heredan* de la *estructura madre* a la subestructura. Se observa (y luego se solicita probar), a través de distintas actividades, que la subestructura hereda siempre de la estructura las propiedades conmutativa, asociativa y distributiva, y se analiza en qué condiciones la subestructura hereda las propiedades de existencia del elemento neutro y existencia del elemento simétrico.

Hago un paréntesis en el desarrollo matemático que vengo realizando para señalar que considero importante la presentación en clase de textos vinculados con la historia de la matemática. Creo que dichos textos pueden hacer, entre otros, dos grandes aportes: (1) brindar una visión más humana de la matemática, y (2) contextualizar el conocimiento matemático. En cuanto al primero de los aportes, señalan Gil y De Guzmán (1993, p. 107):

"[…] la historia le puede proporcionar [al profesor] una visión verdaderamente humana de la ciencia y de la matemática, de lo cual suele estar también el matemático muy necesitado."
En relación al segundo de los aportes, creo que un uso adecuado de la historia puede contribuir a *unir los objetos* matemáticos, *poniéndolos en su contexto natural y situándolos respecto de un conjunto*:

> Nuestra civilización y, por consiguiente, nuestra enseñanza, privilegiaron la separación en detrimento de la unión, el análisis en detrimento de la síntesis. Unión y síntesis quedaron subdesarrollados… Como nuestro modo de conocimiento desune a los objetos, tenemos que concebir qué los une. Como aísla a los objetos de su contexto natural y del conjunto del que forman parte, constituye una necesidad cognitiva poner en su contexto un conocimiento particular y situarlo respecto de un conjunto. (Morin, 1999, p. 26)

El texto que aparece a continuación tiene como objetivo ejemplificar las consideraciones realizadas anteriormente:

> Al final de ese primer año, en el expediente escolar de Niels [Abel] escribió: «Une a su notable talento un insaciable deseo de hacer matemáticas. Si vive, será el mejor matemático del mundo.» ¿Por qué escribió «si vive»? Holmboe nunca lo supo. Niels tenía dieciséis años. Y Holmboe recordaba con orgullo que fue él quien, en ese curso, hizo que Niels descubriese las matemáticas.
>
> Hasta el momento su predicción se reveló exacta: Niels era, sin comparación posible, el mejor matemático noruego, quizás escandinavo. Solo tenía veintiún años. Asimiló con una desconcertante facilidad la gigantesca obra de Euler.
>
> De un tiempo a esta parte, en Europa se debatía de nuevo la vieja cuestión de la resolución por radicales de la ecuación de quinto grado. Euler, que tantas cosas resolvió, lo había intentado y fracasó. Pero estaba convencido de que la fórmula existía.
>
> Abel se apasionó por el tema desde que tuvo suficiente nivel en matemáticas. Y, con bastante rapidez, descubrió una fórmula que resolvía aparentemente la ecuación de quinto grado. ¡Triunfar donde Euler había fracasado! En esta época Holmboe no había detectado ningún error en la demostración de Abel. Tampoco ninguno de los matemáticos que la habían analizado. Por suerte el mismo Niels se dio cuenta, al cabo de algún tiempo, que era errónea. La fórmula no funcionaba en todos los casos […]
>
> Niels cambió radicalmente de enfoque. Si no se había encontrado la fórmula, se dijo, es que no podía encontrarse. Y no se podía encontrar porque no existía. Todo se vino abajo. Abel pasó de suponer: «Si una fórmula existe hasta el cuarto grado, debe existir para el quinto», a inquirir: «¿Por qué si existe hasta el cuarto grado no puede existir para el quinto?»
>
> De vuelta a Copenhague, tras sus vacaciones danesas, Abel trabajó sin descanso profundizando especialmente en las obras de Lagrange, muerto algunos años antes en París. Lagrange era quien había ido más lejos e indicó la dirección a seguir «a todos aquellos que quisieran ocuparse del tema». Lagrange la había seguido sin éxito. Abel tomó el testigo de las manos de Lagrange.

> El otoño estaba mediado. Empezaban a caer los primeros copos de nieve. Había para meses. Abel se puso a trabajar. De pronto, tuvo la convicción de que cuando la nieve cesara, cuando la primavera expulsara el frío, él llegaría al final del problema. En esos momentos tenía los medios para triunfar. Las fiestas se aproximaban.
> Poco antes de Navidad la demostración estaba acabada. Era densa pero clara. La releyó. No había ningún error esta vez. Después de la primera tentativa, Abel tenía más oficio. Se había convertido en un matemático. El resultado era luminoso. Una simple frase, una frase simple —pero ¡qué frase!— presidía su hoja de cálculo:
>
> **«¡Las ecuaciones algebraicas de quinto grado no se pueden resolver por radicales!»**
>
> Largo viaje que había durado tres siglos. ¿Cuántos viajeros se habían pasado el relevo? Con rudeza a veces, otras con placer. Del Ferro, Tartaglia, Cardano, Ferrari, Bombelli, Tschirnhaus, Euler, Vandermonde, Lagrange, Ruffini, y ahora... Niels Henrik Abel llegaba al final, acababa el viaje.
> Abel escribió una *Memoria sobre las ecuaciones algebraicas donde se demuestra la imposibilidad de resolución de la ecuación general de quinto grado.* El artículo, escrito en francés, tenía seis páginas que Abel imprimió a su costa. Por motivos económicos hizo un resumen de media página. Era más barato, pero de comprensión más compleja. (Guedj, 2013, pp. 326-327)

Por otra parte, algunos productos audio visuales pueden colaborar en el mismo sentido que los textos literarios vinculados con la historia de la matemática. A continuación se presenta una estupenda animación que narra, en forma sucinta, algunos de los aspectos más relevantes de la vida de Évariste Galois (a través del código QR, o del enlace, se puede acceder al video).

La insólita historia de Évariste Galois.
www.youtube.com/watch?v=-9PtSLv2X5g

Retomando el hilo del desarrollo matemático, a continuación se define *grupo* y *grupo conmutativo* o *abeliano*, y se propone como actividad analizar distintas estructuras, algunas convencionales y otras no, con el fin de determinar cuáles de ellas son grupos. Entre las estructuras convencionales, algunos ejemplos de grupos serán: $(\mathbb{Z},+)$, $(\mathbb{Q},+)$, $(\mathbb{R},+)$ y $(\mathbb{R}^*,\times)$. En este momento del curso no se justificará formalmente que estas estructuras son grupos; esto se hará cuando se aborde la definición axiomática de *Número Real*: $(\mathbb{R},+)$ es grupo ya que el Axioma de Cuerpo establece que $(\mathbb{R},+,\times)$ es cuerpo. Por otra parte, $(\mathbb{Z},+)$ es grupo porque $(\mathbb{Z},+)$ es subestructura de $(\mathbb{R},+)$, entonces hereda directamente la propiedad asociativa; la propiedad de existencia del elemento neutro la hereda porque el neutro de $(\mathbb{R},+)$ pertenece a $\mathbb{Z}$, y la del simétrico también la hereda porque, además de que 0 pertenece a $\mathbb{Z}$, el opuesto de todo número entero es un entero. Análogamente se probará que $(\mathbb{Q},+)$ y $\left(\mathbb{R}^{*},\times\right)$ son grupos.

Se define a continuación la propiedad *cancelativa de* $*$ *en una estructura* $(B,*)$. Se presentan distintas propiedades que se verifican en todo grupo (entre las que se encuentra la propiedad cancelativa) y se solicita en forma voluntaria que varios estudiantes las demuestren en la pizarra.

Una de las propiedades que se cumple en todo grupo $(G,*)$ es que las ecuaciones de la forma $a*x=b$ tienen una única raíz. A partir de esta propiedad se puede realizar la siguiente observación (que conecta los conceptos que estamos abordando con conocimientos previos de los estudiantes): Como $(\mathbb{R},+)$ es un grupo, por la propiedad mencionada anteriormente, podemos afirmar que cualquier ecuación de la forma $a+x=b$ tiene una única raíz (que como se sabe es $b-a$). Ahora bien, como $(\mathbb{R},\times)$ no es grupo, no podemos asegurar la existencia y unicidad de la raíz de toda ecuación de la forma $ax=b$: esta ecuación, dependiendo de *a* y *b*, puede tener una única raíz, infinitas raíces o no tener raíz. Creo que este tipo de consideraciones no solo sirve para ejemplificar, sino que permite comenzar a advertir el valor y el potencial que tienen las estructuras (particularmente los grupos): no importa cuál es el conjunto que se está considerando, ni tampoco la operación binaria definida en él, es suficiente estar trabajando en un grupo para poder asegurar que se cumplen ciertas propiedades.

Se sigue con la definición de *anillo* $(A,*,\bullet)$ (y se conviene en llamar *opuesto de a* al simétrico de *a* según $*$; al cual se nota $op(a)$) y se propone como actividad analizar distintas estructuras, algunas convencionales y otras no, con el fin de determinar cuáles de ellas son anillos. Entre las estructuras convencionales, ejemplos de anillos son: $(\mathbb{Z},+,\times)$, $(\mathbb{Q},+,\times)$ y $(\mathbb{R},+,\times)$. Nuevamente vale recordar que en este momento del curso simplemente se examinan las propiedades que verifican estas estructuras a partir de los conocimientos previos de los estudiantes, pero no se justifican. Es recién cuando se aborda el tema Número Real que se justifican las observaciones realizadas anteriormente.

A continuación se define la propiedad de *absorción* en una estructura $(B,*,\bullet)$ en la que *e* es el neutro para la operación binaria $*$. Luego se propone, como actividad, analizar entre dos estructuras, una que es anillo y otra que no, si se verifica la propiedad de absorción, para que los estudiantes observen que en el anillo se cumple y que, para la estructura propuesta que no es anillo, no se cumple. A continuación se presenta otra actividad en donde aparece una posible demostración de que en todo anillo se verifica la propiedad de absorción con el objetivo de que los estudiantes justifiquen cada paso. Ahora bien, en todo anillo se cumple la propiedad de absorción, pero cabe preguntarse, si la estructura no es anillo, ¿necesariamente no se cumple la propiedad de absorción? Para responder a esta pregunta se les propone considerar la estructura $(\mathbb{N},+,\times)$. Creo importante enfrentar a los estudiantes a preguntas como la anterior ya que muestran la sutiliza del pensamiento lógico-matemático y modelan una forma de pensar que es propia del trabajo en matemática: que la propiedad de absorción se verifique en todo anillo, no implica que dicha propiedad no se cumpla en las estructuras que no son anillos.

Se solicita a continuación que algunos estudiantes, en forma voluntaria, demuestren algunas propiedades que se verifican en todo anillo. Para ejemplificar el trabajo, el profesor presenta en la pizarra los aspectos cruciales de la demostración de la propiedad que aparece a continuación (luego, como actividad, los estudiantes deberán escribir la demostración en forma ordenada).

<u>Propiedad</u>: Si $(A,*,\bullet)$ es anillo y e es el neutro para $*$, entonces $\forall a,b \in A, op(a)\bullet b = op(a\bullet b)$.

Para probar la igualdad $op(a)\bullet b = op(a\bullet b)$, podríamos partir de ella y analizar si podemos llegar a una igualdad que sepamos que se cumple, para luego intentar ver si es posible emprender el camino inverso.
Veamos entonces. Si operamos a derecha, a ambos miembros de la igualdad, con $a\bullet b$ según $*$, tendríamos $(op(a)\bullet b)*(a\bullet b) = op(a\bullet b)*(a\bullet b)$. En el primer miembro podríamos aplicar la propiedad distributiva de $\bullet$ respecto a $*$ (que se cumple por ser $(A,*,\bullet)$ un anillo) y en el segundo miembro, como se están operando según $*$ un elemento y su opuesto, el resultado es el neutro para $*$: $(op(a)*a)\bullet b = e$. Por último, como $op(a)*a = e$, llegaríamos a la igualdad $e\bullet b = e$, que sabemos que se cumple, ya que en todo anillo se verifica la propiedad de absorción.

El relato anterior no prueba necesariamente lo que se pedía, puesto que parte de lo que se quería probar. Lo que hay que analizar es si cada paso dado está garantizado con un bicondicional o si, partiendo de $e\bullet b = e$, podemos llegar, siguiendo el camino inverso, a probar la igualdad $op(a)\bullet b = op(a\bullet b)$; lo cual, en este caso, es efectivamente posible.

Considero que la forma en que muchas veces se presentan las demostraciones en la clase de matemática genera, en los estudiantes, la idea errónea de que los matemáticos cuando realizan una prueba razonan de un modo secuencial, ordenado y conciso. Tradicionalmente las demostraciones se presentan en la enseñanza en su forma acabada, desconociéndose que un matemático no llega de un modo lineal a demostrar por primera vez un cierto resultado, más bien lo consigue luego de realizar una serie de conjeturas, de ensayar y errar, etc. Esta forma tradicional de presentar las demostraciones, creo que genera una idea inadecuada en los estudiantes, que no contribuye a que ellos sean partícipes en la construcción del conocimiento matemático, ya que estas presentaciones no guardan relación con lo que les sucede al momento de enfrentarse a la hoja en blanco para realizar una prueba. Ahora bien, y para matizar la consideración anterior, según de Villiers (1993), una de las funciones de la demostración es la de *comunicación*. El autor señala que la demostración es una manera única de comunicar resultados matemáticos entre profesionales, entre profesores y alumnos y entre los propios alumnos. La demostración como forma de interacción social, indica de Villiers (1993), permite la negociación subjetiva, no solo del significado de los conceptos concernidos en la demostración, sino también, y de forma implícita, de los criterios para aceptar una demostración como válida. Por lo tanto, considero que es importante presentar también demostraciones en su forma acabada, porque permite establecer implícitamente, en la comunidad matemática del aula, cuáles son las demostraciones que serán aceptadas como válidas; pero seguramente sea conveniente que, en general, aparezcan a posteriori de una presentación menos rígida.

Por otra parte, considero que la presentación de la demostración anterior permite ver desde dentro cómo funciona la demostración. En otras palabras, muestra los engranajes que iluminan el resultado, por lo cual puede considerarse como una prueba que explica. Hanna (1989) propone una distinción entre pruebas matemáticas que *prueban* y pruebas matemáticas que *explican*. Según la autora, si bien ambas sirven para establecer la validez de una proposición matemática, las últimas no solo muestran que una proposición es verdadera, sino también por qué lo es. Hanna (1989), siguiendo a Steiner (1978), prefiere decir que una prueba *explica* cuando muestra cuáles son las «propiedades características» vinculadas con lo que se desea probar. En este artículo, la autora concluye que las pruebas que explican deben ser favorecidas en la enseñanza de la matemática sobre las pruebas que prueban. Por su parte, de Villiers (1993) indica que para la mayoría de los matemáticos es seguramente más importante el aspecto explicativo de la demostración, que el de verificación: importa más «explicar el porqué» que «asegurarse».

Se propone a continuación una actividad en donde aparece definido, a través de tablas, un anillo con divisores de cero (aunque los estudiantes no lo saben aún, el anillo que se presenta es $(\mathbb{Z}_6,+,\times)$). Esta actividad dará lugar a la definición de *anillo sin divisores de cero* y *anillo con divisores de cero*. A continuación se solicita a los estudiantes que brinden ejemplos de anillos con y sin divisores de cero (el único ejemplo de anillos con divisores de cero que poseen es el de la actividad).

Se sigue con la definición de la propiedad *cancelativa de* $\bullet$ *en una estructura* $(B,*,\bullet)$.

Se solicita a dos estudiantes que, en forma voluntaria, demuestren el siguiente teorema (uno la proposición directa y otro la recíproca).

<u>Teorema</u>: Consideremos el anillo $(A,*,\bullet)$.

$(A,*,\bullet)$ no tiene divisores de cero si, y solo si, se cumple la propiedad cancelativa de $\bullet$.

A continuación se define *anillo conmutativo*, *anillo con unidad* y *dominio de integridad*. Se propone como actividad analizar distintas estructuras, algunas convencionales y otras no, con el fin de determinar cuáles de ellas son dominios de integridad. En particular se propone la siguiente actividad:

Actividad (*)
Consideremos el conjunto $\mathscr{F}$ formado por todas las funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, y las funciones suma y producto:

$f \oplus g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,/\, (f \oplus g)(x) = f(x) + g(x)$

$f \otimes g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,/\, (f \otimes g)(x) = f(x) \times g(x)$

Consideremos además las operaciones binarias $\oplus$ y $\otimes$ definidas en $\mathscr{F}$ que a cada par ordenado (f,g) de funciones de $\mathscr{F}$ le hacen corresponder las funciones $f \oplus g$ y $f \otimes g$ respectivamente.
Investiga si $(\mathscr{F},\oplus,\otimes)$ es dominio de integridad.

Más abajo, cuando desarrolle la proyección en líneas de investigación, haré mención a esta actividad.

A continuación se define *cuerpo* (y se conviene en llamar *inverso de a* al simétrico de *a* respecto a la operación binaria $\bullet$; al cual se nota $inv(a)$) y se propone como actividad analizar distintas estructuras, algunas convencionales y otras no, con el fin de determinar cuáles de ellas son cuerpos. Por último, se analizan (y se prueban) algunas propiedades que se verifican en todo cuerpo.

Acorde a la fundamentación epistemológica de la relevancia disciplinaria del tema y de su relevancia para la enseñanza en la formación de formadores, presentadas en secciones anteriores, considero que Estructuras es un tema clave en el curso de Fundamentos y que puede ser, de alguna manera, un eje transversal del mismo. Cuando se aborda la definición axiomática de Número Real, el tema Estructuras puede ser revisitado y resignificado: el Axioma de Cuerpo establece que $(\mathbb{R},+,\times)$ es un cuerpo, por lo tanto, debido a las propiedades que se cumplen en todo cuerpo, podemos afirmar que $(\mathbb{R},+,\times)$ no tiene divisores de cero o, en forma equivalente, que se cumple la cancelativa de $\times$. Por otra parte, en el desarrollo de Número Real se define $\mathbb{Z}$ como un subconjunto particular de $\mathbb{R}$ y se demuestra que la suma y el producto de enteros es un entero, lo cual justifica que la adición y la multiplicación en $\mathbb{Z}$ verifican la clausura; la unicidad es una consecuencia de que $+$ y $\times$ son operaciones binarias en $\mathbb{R}$ y de que $\mathbb{Z}$ está incluido en $\mathbb{R}$. Las consideraciones anteriores permiten afirmar que $(\mathbb{Z},+,\times)$ es una subestructura de $(\mathbb{R},+,\times)$. Por lo tanto, $(\mathbb{Z},+,\times)$ hereda de $(\mathbb{R},+,\times)$ la siguientes propiedades: asociativa y conmutativa de $+$ y $\times$, distributiva de $\times$ respecto de $+$, existencia del elemento neutro para $+$ y $\times$ (dado que 0 y 1 pertenecen a $\mathbb{Z}$) y existencia de elemento opuesto (dado que el opuesto de todo entero es un entero). Todo lo anterior permite afirmar que $(\mathbb{Z},+,\times)$ es anillo conmutativo y con unidad. Alcanza con ver que el entero 2 no tiene inverso en $(\mathbb{Z},+,\times)$, para justificar que esta estructura no es cuerpo. Análogamente se puede probar que $(\mathbb{Q},+,\times)$ es anillo conmutativo con unidad, pero además, como todo racional distinto de cero tiene inverso, es posible afirmar que $(\mathbb{Q},+,\times)$ es cuerpo.

Por otra parte, el tema Número Complejo permite analizar una nueva estructura que es cuerpo. En este tema es posible trabajar el concepto de *isomorfismo* ($(\mathbb{C}_0,\oplus,\otimes)$ y $(\mathbb{R},+,\times)$ son estructuras isomorfas, siendo $\mathbb{C}_0=\{z / z\in\mathbb{C}\wedge z=(a,0)\wedge a\in\mathbb{R}\}$), que si bien puede ser abordado en Estructuras, prefiero trabajarlo en el contexto concreto de Número Complejo. Esto debido a no querer sobrecargar de conceptos el tema Estructuras, propuesto para el primer semestre, ya que los estudiantes recién están comenzando a familiarizarse con las exigencias (en términos de grado de abstracción y de rigor, pero también en términos de dedicación) de estudiar matemática a nivel terciario.

En Divisibilidad se puede trabajar con el *conjunto de las clases residuales módulo m*, y analizar la estructura $(\mathbb{Z}_m,\oplus,\otimes)$, llegando a la conclusión de que es cuerpo si, y solo si, m es primo. El trabajo con esta estructura permite posteriormente, cuando se aborde Polinomios y Funciones Polinómicas, un trabajo más profundo y enriquecedor vinculado a dicho tema. Polinomios y Funciones Polinómicas es un campo muy fértil para retomar lo trabajado en Estructuras. Se puede probar que $(\mathbb{R}[X],+,\times)$ es dominio de integridad (pero no es cuerpo), al igual que $(\mathbb{K}[X],+,\times)$, siendo $\mathbb{K}[X]$ el conjunto de todos los polinomios con coeficientes en un cuerpo $\mathbb{K}$. Por otra parte, $(\mathscr{P}_{\mathbb{R}},+,\times)$ es anillo conmutativo y con unidad, al igual que $(\mathscr{P}_{\mathbb{K}},+,\times)$, siendo $\mathscr{P}_{\mathbb{K}}$ el conjunto de todas las funciones polinómicas asociadas a los polinomios de $\mathbb{K}[X]$. Aunque si $\mathbb{K}$ es un cuerpo infinito, es posible decir, no solo que $(\mathscr{P}_{\mathbb{K}},+,\times)$ es anillo conmutativo con unidad, sino que es dominio de integridad. Más precisamente, si el cuerpo $\mathbb{K}$ es infinito las estructuras $(\mathbb{K}[X],+,\times)$ y $(\mathscr{P}_{\mathbb{K}},+,\times)$ son isomorfas; así, por ejemplo, son isomorfas las estructuras $(\mathbb{R}[X],+,\times)$ y $(\mathscr{P}_{\mathbb{R}},+,\times)$. Por otra parte, mientras que $(\mathbb{Z}_3[X],+,\times)$ no tiene divisores de cero, $(\mathscr{P}_{\mathbb{Z}_3},+,\times)$ sí tiene divisores de cero, por lo tanto es posible considerar dos polinomios no nulos (cuyo producto será un polinomio no nulo) que verifiquen que el producto de sus funciones polinómicas asociadas sea la función polinómica nula.

Aspectos didácticos: evaluación

Para la evaluación se tendrá en cuenta el desempeño de los estudiantes que hayan realizado demostraciones en la pizarra, el grado de avance de las actividades que se propusieron a lo largo de la unidad y el desempeño en la prueba parcial.

Una vez culminada la unidad, los estudiantes deberán:

- Conocer la definición de operación binaria y poder establecer cuándo una relación definida de $A\times A$ en A es operación binaria.
- Poder indicar cuáles son las propiedades que se utilizan en la resolución de una ecuación en la forma habitual (despejando la x).

- Conocer los conceptos de estructura y subestructura, y saber cuáles son las propiedades que se heredan de la estructura a la subestructura.
- (1) Saber la definición de grupo y de grupo conmutativo, (2) conocer ejemplos, y (3) tener presente cuáles son las propiedades que se cumplen en todo grupo.
- (1) Saber la definición de anillo, de anillo sin y con divisores de cero, de anillo conmutativo, de anillo con unidad, y de dominio de integridad, (2) conocer ejemplos, y (3) tener presente cuáles son las propiedades que se cumplen en todo anillo.
- (1) Saber la definición de cuerpo, (2) conocer ejemplos, y (3) tener presente cuáles son las propiedades que se cumplen en todo cuerpo.

Proyección en líneas de investigación

En mi actividad docente, he observado que muchos estudiantes del profesorado de matemática muestran dificultades para vincular e integrar los conceptos función y operación binaria a la hora de realizar actividades (como por ejemplo, la actividad (*) propuesta más arriba) vinculadas con la operación binaria adición definida en el conjunto de las funciones de dominio y codomnio real (de aquí en más, para abreviar, la denominé *adición de funciones*).

Por otra parte, Trigueros (2005, p. 14) señala que, muchas veces, los investigadores y los profesores centran la atención en cómo los estudiantes aprenden diferentes conceptos matemáticos y tienen la idea de que la construcción de relaciones entre los mismos se dará sin que se busque explícitamente; la autora señala que es un problema abierto a la investigación establecer si esto ocurre así en realidad.

Dada la constatación señalada anteriormente y la observación realizada por Trigueros (2005), es que surge la siguiente pregunta de investigación: ¿Cuáles son los requisitos, desde el punto de vista cognitivo, para que un estudiante pueda sintetizar los conceptos función y operación binaria para realizar actividades vinculadas con la adición de funciones?

Por otra parte, considero que la teoría APOE puede brindar un marco de referencia idóneo para llevar adelante el estudio.

La teoría APOE se desarrolla a partir del trabajo de Jean Piaget y sus ideas fundamentales fueron introducidas por Ed Dubinsky a principios de los años ochenta. La teoría establece modelos que permiten comprender lo que podría estar ocurriendo en la mente de un individuo cuando está tratando de aprender ciertos conceptos matemáticos, particularmente los correspondientes a la matemática de la educación superior.

Existen tres etapas básicas involucradas en la construcción de conceptos matemáticos: *acción*, *proceso* y *objeto*. Las acciones, los procesos y los objetos son organizados en estructuras llamadas esquemas (el acrónimo APOE está formado por las iniciales de las palabras: acción, proceso, objeto y esquema).

De acuerdo a Piaget, y adoptado luego por la teoría APOE, un concepto se concibe primero como una acción, es decir, como una manipulación, repetible, física o mental, de objetos concebidos previamente, para obtener otros objetos. Una acción es una reacción a estímulos que el individuo percibe como externos, en el sentido de que cada paso de la transformación necesita, para ser realizada por el individuo, instrucciones externas explícitas y guiadas; además cada paso estimula al siguiente, esto es, los pasos de la acción no

pueden aún ser imaginados y no pueden ser salteados por el individuo. Por ejemplo, una persona que requiere una expresión algebraica para trabajar con el concepto función, y puede hacer poco más que sustituir la variable en la expresión, se considera que tiene una concepción acción de función (la expresión algebraica actúa, en este caso, como una señal externa que le indica al individuo cómo se debe realizar la acción, paso a paso, mediante la sustitución de valores específicos).
Cuando un individuo repite y reflexiona en torno a una acción, esta puede *interiorizarse* en un proceso mental: una acción interiorizada es un proceso. El proceso se caracteriza por la capacidad del individuo de: (1) imaginar la realización de los pasos sin tener necesariamente que realizarlos uno por uno, (2) omitir pasos y (3) invertir los pasos. (El individuo pasa de depender de señales externas a tener control interno sobre las acciones.) Así, por ejemplo, un individuo con una comprensión proceso de función pensará en términos de entradas, posiblemente no específicas, y transformaciones de esas entradas para producir salidas.
Cuando un individuo puede concebir al proceso como una totalidad y se da cuenta que las transformaciones pueden actuar sobre esa totalidad, entonces se dice que ha *encapsulado* el proceso en un objeto cognitivo. Como lo reportan varios estudios basados en le teoría APOE, el mecanismo de encapsulación es el más difícil. Para el concepto función, la encapsulación permite al individuo aplicar transformaciones a las funciones y concebir, por ejemplo, un conjunto de funciones, definir operaciones en dicho conjunto, equiparlo con una topología, etc.

Por otra parte, en la teoría APOE existe un concepto clave que es el de *descomposición genética*. Una descomposición genética es un modelo hipotético que describe las estructuras y los mecanismos mentales que un individuo necesitaría construir para aprender un concepto matemático específico. Una descomposición genética es un modelo epistemológico y cognitivo de un concepto matemático (Arnon et al., 2014). En Arnon et al. (2014) por ejemplo, se reportan descomposiciones genéticas para los conceptos función y operación binaria.

Para intentar responder la pregunta de investigación antes planteada, en cuanto a los aspectos metodológicos, se seguirán los siguientes pasos:

- Diseño e implementación de un cuestionario vinculado con la adición de funciones que será propuesto a un grupo de estudiantes de primer año del profesorado de matemática del curso Fundamentos de la Matemática, luego de abordados los temas Funciones y Estructuras. Para el diseño de las actividades se tendrán en cuenta las descomposiciones genéticas existentes en la literatura de función y de operación binaria.
- Análisis a priori de las actividades en el que se describirán las estructuras mentales (acciones, procesos y objetos) que un estudiante podría poner en juego al resolverlas; para lo cual, nuevamente, se utilizará como marco de referencia las descomposiciones genéticas de función y de operación binaria.
- Análisis de las respuestas de los estudiantes al cuestionario propuesto.
- Selección de algunos estudiantes para realizarles entrevistas —que serán grabadas en audio— para profundizar en sus respuestas. La selección de los estudiantes se hará de modo que sean representativos del grupo en lo referente a: (1) las estructuras mentales que evidencien respecto a los conceptos función y operación binaria, y (2) el nivel de rendimiento en el cuestionario.

- A partir de la información emergente del trabajo de los estudiantes y de las entrevistas, y teniendo como referencia: (1) el análisis a priori de las actividades y (2) las descomposiciones genéticas de función y de operación binaria, se buscará establecer cuáles son los requisitos, desde el punto de vista cognitivo, para que los estudiantes puedan realizar una síntesis entre los conceptos función y operación binaria para abordar actividades vinculadas a la adición de funciones.

Referencias bibliográficas

Arnon, I., Dubinsky, E., Cottrill, J., Oktaç, A., Roa-Fuentes, S., Trigueros, M., & Weller, K. (2014). *Apos Theory. A Framework for Research and Curriculum Development in Mathematics Education.* New York: Springer.

Bell, E. T. (2004). *Historia de las matemáticas* (2da. ed.). México D.F.: Fondo de Cultura Económica.

Bishop, A. (1999). *Enculturación matemática. La educación matemática desde una perspectiva cultural*. Buenos Aires: Paidós.

Calvo, C. (2001). *Un estudio sobre el papel de las definiciones y las demostraciones en cursos preuniversitarios de Cálculo Diferencial e Integral*. (Tesis de doctorado no publicada). Universitat Autònoma de Barcelona. España.

Consejo de Educación Secundaria. (s.f.). Programas de asignaturas. Recuperado de https://www.ces.edu.uy/index.php/propuesta-educativa/20234

Consejo de Formación en Educación. (s.f.). Planes de Estudio y Programas. Recuperado de http://www.cfe.edu.uy/index.php/planes-y-programas/planes-vigentes-para-profesorado/44-planes-y-programas/profesorado-2008/380-matematica

Davis, P y Hersh, R. (1988). *Experiencia Matemática*. Barcelona: Labor.

De Villiers, M. (1993). El papel y la función de la demostración en matemáticas. *Epsilon*, 26, pp. 15-30.

Gil Pérez, D. y De Guzmán, M. (1993). *Enseñanza de las ciencias y la matemática. Tendencias e innovaciones*. España: Popular S.A.

Guedj, D. (2013). *El teorema del loro. Novela para aprender matemáticas* (8va. ed.). Barcelona: Anagrama.

Hanna, G. (1989). Proofs That Prove and Proofs That Explain. En G. Vergnaud, J. Rogalski, & M. Artigue (Eds.), *Proceedings of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. II, pp. 45-51.

Kline, M. (2000). *Matemáticas. La pérdida de la certidumbre* (5a. ed.). México D.F.: siglo veintiuno editores.

Livio, M. (2013). *La ecuación jamás resuelta. Cómo dos genios matemáticos descubrieron el lenguaje de la simetría*. España: Editorial Planeta, S.A.

Moreno, J. (2011, junio 6). La Insólita historia de Évariste Galois. [Archivo de video]. Descargado de https://www.youtube.com/watch?v=-9PtSLv2X5g

Morin, E. (1999). *La cabeza bien puesta. Repensar la reforma. Reformar el pensamiento.* Buenos Aires: Nueva visión.

Rojo, A. (1991). *Álgebra I* (15a. ed.). Buenos Aires: El Ateneo.

Rothman, T. (1995). Évariste Galois. *Temas. Investigación y Ciencia*, *1*, 82-93.

Trigueros, M. (2005). La noción de esquema en la investigación en matemática educativa a nivel superior. *Educación Matemática*, abril, 5-31.

Divisibilidad

Leticia Medina

Introducción

Organizamos este proyecto según las pautas del concurso en torno a tres ejes. En primer lugar presentamos los aspectos disciplinarios vinculados al álgebra, particularizando en el estudio de la divisibilidad. Posteriormente exponemos los aspectos didácticos de nuestra propuesta de enseñanza. Finalmente formulamos nuestra proyección en una línea de investigación. Las referencias bibliográficas de las tres secciones se presentan al final del documento.

Aspectos disciplinarios

Esta sección comienza con un análisis histórico epistemológico del álgebra y de las nociones vinculadas a la *divisibilidad*. Posteriormente desarrolla algunos conceptos matemáticos vinculados al tema divisibilidad. Por la extensión de este trabajo y teniendo en cuenta que nuestra propuesta didáctica aborda la enseñanza del *teorema fundamental de la aritmética* con futuros maestros, nuestro desarrollo se focaliza en aquellos conceptos matemáticos que se movilizan al abordar este tema. Esta sección finaliza con una breve reflexión sobre la importancia de la enseñanza del álgebra y la divisibilidad.

Análisis histórico epistemológico

Luis Puig (2003, citando a Filloy y Puig, 1993) señalan que “la historia de las ideas algebraicas se ha revelado como un elemento indispensable para adentrarse en el conocimiento de ciertos aspectos del devenir de los sistemas simbólicos dentro del conocimiento” (p. 1). En este sentido entendemos que un análisis histórico-epistemológico del álgebra y de la divisibilidad, contribuirá a evidenciar las principales ideas que han dado lugar al desarrollo de la matemática como elemento de nuestra cultura.

La resolución de problemas astronómicos, físicos o económicos inmersos en un entorno específico, fue un importante motor para el desarrollo del álgebra y de la matemática en general. Los babilonios y los egipcios dieron muestras de interesarse por encontrar cantidades desconocidas; en torno a este problema desarrollaron métodos que implicaron el trabajo con raíces cuadradas, ternas pitagóricas, ecuaciones cuadráticas y cúbicas que surgían al abordar problemas concretos como el cálculo de áreas. Aunque estos problemas fueron enunciados exclusivamente en lenguaje natural, dan cuenta de involucrar de forma implícita la noción de incógnita. Ante algunas miradas parcializadas que limitan la visión del álgebra a una generalización de la aritmética, un análisis más profundo de la historia permite apreciar que los orígenes del álgebra no se limitan a una evolución de la aritmética. Charbonneau (1996) señala que el razonamiento algebraico estuvo presente también en la geometría griega. A través de sus problemas los griegos sustituyeron medidas desconocidas por abreviaciones o síncopas, dando un paso más en el desarrollo histórico de la noción de variable. Finalmente en Francia, de la mano de François Viète, surge a finales del siglo XVI el uso de símbolos para representar la incógnita y también cantidades conocidas. Hasta la revolución algebraica de Viète, la geometría era un medio para probar reglas algebraicas y del mismo modo, el álgebra era un medio para resolver algunos problemas geométricos (Charbonneau, 1996).

El uso de la variable permitió el trabajo con ecuaciones de una forma mucho más general e impulsó un cambio fundamental en el lenguaje simbólico (Stewart, 2008). El trabajo de Viète se considera un hito en la historia del álgebra, da inicio al álgebra simbólica y contribuyó de manera fundamental al proceso de desontologización que inician las matemáticas en este siglo. Progresivamente la naturaleza de los objetos matemáticos dejan de ser el foco de interés y el trabajo matemático se orienta a estudiar las relaciones entre objetos indefinidos y las reglas que rigen las operaciones entre ellos. Según Ortega (2011) esto viabilizó el desarrollo de las estructuras como nuevos objetos de la matemática moderna.

La divisibilidad surge de la misma forma en que han surgido gran parte de las ideas matemáticas más antiguas, como resultado del interés del hombre por dar solución a los problemas que lo ocupan y por comprender o explicar su entorno. La observación de regularidades, el uso de representaciones que faciliten la comprensión de los objetos analizados y el interés por modelizar la realidad, llevó a las civilizaciones que habitaron Egipto, Mesopotamia y Grecia a desarrollar un conjunto importante de conocimientos que sentaron las bases para el desarrollo de la teoría de números. Los babilonios, en su interés por resolver ecuaciones particulares asociadas a la solución de problemas propios de su desarrollo cultural, desarrollaron la idea de completar cuadrados utilizando figuras, logrando así un primer acercamiento a la factorización de un polinomio. Euclides también contribuyó en este avance, a través de su libro Elementos, reúne los conocimientos de su época y da un impulso al desarrollo de definiciones, propiedades y técnicas vinculadas a la divisibilidad, muchas de las cuales perduran hasta nuestros días. A partir del siglo XVI el estudio de la teoría de números acompaña al proceso de desontologización que transita la matemática en los próximos tres siglos y surgen importantes avances que la posicionan como un pilar en el edificio matemático. Stevin extiende el algoritmo de Euclides al cálculo del máximo común divisor de dos polinomios y amplía así el campo de aplicación de la teoría de la divisibilidad. Euler intenta ampliar el concepto de divisor más allá del conjunto de los enteros o de los polinomios y observa que no es posible conservar todas las propiedades en esa extensión, en especial la existencia del máximo común divisor y la unicidad de la descomposición en factores primos. Hacia el siglo XVIII, el álgebra trasciende la resolución de ecuaciones y se ocupa del estudio de estructuras como *grupos*, *anillos* y *campos*. En el siglo XIX Gauss propone el teorema fundamental de la aritmética para el dominio de integridad de los números enteros y los enteros *módulo m* como un nuevo sistema de números. Muestra el potencial de esta nueva teoría al demostrar que el heptadecágono regular es constructible con regla y compás, logrando responder un viejo problema geométrico desde un enfoque algebraico; este aporte dio lugar a la aritmética modular y a la teoría de las congruencias y contribuyó al desarrollo de la teoría de grupos. También Kummer, Kronecker y Dedekind generalizan las propiedades de los números enteros a otros dominios, ampliando extraordinariamente el alcance de la aritmética y dando lugar al surgimiento del álgebra abstracta. La introducción del concepto de *ideal* y el desarrollo de la *teoría de los ideales* generaliza aún más la divisibilidad en un anillo y da inicio al álgebra conmutativa moderna. Se observa que al igual que otras ramas de la matemática, la divisibilidad paulatinamente se separa de los problemas que le dieron origen, sufre un proceso de abstracción y generalización desde el que se plantea sus propios desafíos.

Si bien actualmente no hay un acuerdo en la comunidad matemática o en la comunidad educativa sobre qué es el álgebra, Puig (2003) señala algunas características de lo algebraico que surgen como resultado del proceso histórico que hemos descrito. Como primer aspecto indica que el uso de un sistema de signos para resolver problemas, permite separar “lo preciso” de aquello que no lo es y operar en el terreno de la expresión sin recurrir al terreno del contenido. Vincula lo algebraico con una búsqueda sistemática de tipos de estructuras o formas canónicas, con el desarrollo de reglas de cálculo que permitan reducir cualquier expresión a estas formas canónicas y con la búsqueda de reglas que permitan resolver todos los tipos de estructuras. Finalmente señala que existe una ausencia de “compromiso ontológico” (p. 106) del sistema de signos que permite expresar y operar con cualquier tipo de objetos matemáticos.

En esta síntesis hemos dejado en evidencia algunos hitos que dan cuenta de los giros que ha tenido el álgebra y el estudio de la divisibilidad a lo largo de la historia. Entendemos que comprender la génesis de estos conceptos permite apreciar que el ser humano ha construido la mayor parte de los objetos matemáticos como modelos para representar una realidad concreta, y que paulatinamente estos objetos han ido transformándose desde una concepción operacional hacia una concepción más estructural, fortaleciéndose y despegándose de su contexto. Estas ideas nos ayudan a comprender y a anticipar algunas de las dificultades que se presentan cuando un estudiante se acerca a objetos matemáticos que han sido despojados de su significado y que forman parte de los resultados de un proceso evolutivo no lineal como el que describimos anteriormente.

Actualmente la producción matemática en álgebra ha alcanzado una profundidad y un grado de abstracción tal, que una mínima parte de la sociedad es capaz de comprender los alcances de un nuevo resultado o juzgar su validez. Contrariamente a lo que ocurría hace miles de años, muchos de estos descubrimientos están alejados de los problemas que preocupan a la sociedad, sin embargo, el surgimiento de cada nueva teoría o cada nuevo resultado abre nuevas puertas. El teorema de Perron-Frobenius constituye un ejemplo de un resultado del álgebra lineal que revolucionó el mundo tecnológico. Un par de estudiantes utilizan un producto teórico y abstracto del álgebra para desarrollar un algoritmo de ordenación que posicionó a Google como líder indiscutible entre los motores de búsqueda en internet. Por otro lado, el hecho de que nuestro sistema financiero dependa de la dificultad actual de factorizar números grandes, es tan solo una muestra del potencial que eventualmente puede tener la producción de conocimientos en el campo del álgebra y nos hace apreciar la importancia de que todos los individuos tengan acceso a aprender álgebra.

En los últimos cien años nuestro sistema educativo ha abordado la enseñanza del álgebra desde los primeros años del nivel secundario; sin embargo, en los últimos veinte años han surgido propuestas que impulsan la promoción del pensamiento algebraico desde los primeros años de la enseñanza primaria. En el año 2008 el sistema educativo uruguayo incorpora la enseñanza del álgebra al ciclo escolar, lo que lleva a cuestionarnos qué aspectos del álgebra resultan de interés para ser abordados en cada etapa.

Entendemos que la reflexión de qué es el álgebra escolar trasciende al hecho de qué es el álgebra actualmente o qué fue el álgebra en alguna de sus etapas y que esta reflexión es sustantiva. En este sentido nuestra posición queda reflejada por las siguientes posturas que apreciamos complementarias.

Godino, Aké, Gonzato y Wilhelmi (2014) señalan que el álgebra escolar ha de incluir el desarrollo de la capacidad de analizar situaciones con la ayuda de símbolos, el estudio de patrones numéricos y geométricos, la formulación de reglas generales y el estudio de funciones, así como el reconocimiento de estructuras isomorfas. Por otra parte, el National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2014) recomienda el trabajo en álgebra desde la etapa preescolar como forma de “generalizar, modelar y analizar situaciones que son puramente matemáticas y que surgen en los fenómenos del mundo real”, agregando que “las ideas algebraicas deben evolucionar a través de los grados como una forma de pensar y valorar la estructura con conjuntos integrados de conceptos, procedimientos y aplicaciones”. (p. 1)

Conceptos matemáticos

Teniendo en cuenta las limitaciones de espacio de este proyecto y que desarrollaremos una propuesta didáctica de trabajo con estudiantes de magisterio, en la que nos centraremos en la enseñanza del *teorema fundamental de la aritmética* (TFA), nos concentraremos en el desarrollo del tema factorización y las nociones necesarias para abordarlo. Por otra parte, entendemos apropiado presentar un desarrollo disciplinar del tema desde una mirada más amplia que la que se pretende trabajar con los futuros docentes, lo que nos lleva a formular la divisibilidad como una teoría general que se desarrolla en un anillo íntegro, permitiendo extender las ideas que los estudiantes manejan para los naturales a los enteros y otros anillos. También entendemos pertinente hacer explícitas algunas de las transformaciones necesarias para trabajar estos contenidos en la formación de maestros y en la formación de profesores de matemática; esto nos lleva a acompañar el desarrollo con acotaciones sobre el trabajo en Matemática I de la carrera de magisterio y en Fundamentos de la Matemática de la formación de profesores. Particularmente al trabajar en magisterio no se hará referencia a la idea de dominio íntegro, trabajando las nociones en el conjunto de los números naturales. Por otra parte, entendemos que en el profesorado es posible y deseable brindar a los estudiantes las oportunidades de recuperar y revisar los saberes construidos respecto a los números naturales, para luego extender estas ideas a los enteros, los polinomios u otros anillos. Esto sustenta nuestra propuesta, que busca recuperar los saberes de los estudiantes y a partir de ellos desarrollar ideas firmes sobre las seguir construyendo el edificio matemático.

Comenzaremos por definir conjuntamente las relaciones binarias “divide a” y “múltiplo de” en un dominio íntegro $(A,+,\times)$. Si a, b son dos elementos de A, diremos que a *divide a* b, que a es un *divisor* de b o simplemente que b es un *múltiplo* de a (anotaremos $a|b$ o también a es $\dot{b}$) si existe un elemento c de A tal que $b = a \times c$. En contraposición con la noción que habitualmente se trabaja a nivel escolar vinculada a la división exacta, la definición anterior enfatiza la estructura multiplicativa que soporta esta idea e independiza la definición de múltiplo de la definición de división. La definición $a|b$ si y solo a dividido b arroja resto cero, es particularmente cierta en muchos casos, pero no permite justificar que $0|0$. Entendemos pertinente analizar la posible equivalencia entre distintas definiciones, pues esto promueve que los futuros docentes sean críticos respecto a las definiciones y los materiales que utilizan en la preparación de sus clases. Interesa observar que la divisibilidad es una relación binaria, analizar su significado y los ejemplos conocidos de este tipo de relaciones (igualdad, relación de orden, paralelismo, perpendicularidad), lo que permitirá apreciar que no todas estas cumplen las mismas propiedades y problematizar aquellas propiedades que son válidas para esta relación en particular. Esto permitirá concluir que la relación de divisibilidad en $\mathbb{N}$ es una relación de orden parcial, mientras que en $(\mathbb{Z},+,\times)$ o en un dominio íntegro arbitrario la divisibilidad es una relación de preorden. El trabajo en $\mathbb{Z}$ enriquece la mirada sobre las propiedades en $\mathbb{N}$, por lo que en magisterio también se entiende pertinente analizar la divisibilidad en $\mathbb{Z}$. Resulta interesante observar cómo se relacionan elementos particulares en distintas estructuras; observar que en $\mathbb{N}$ y en $\mathbb{Z}$ el 0 no divide a ningún elemento salvo a sí mismo y que todo elemento divide a cero; que en $\mathbb{N}$ hay un solo elemento unidad y que este divide a todo natural, mientras que en $\mathbb{Z}$ hay dos unidades que dividen a cualquier entero; finalmente interesa observar que en $\mathbb{N}$ el 1 tiene un solo divisor mientras que existen dos enteros divisores de 1. También resulta relevante trabajar con los futuros docentes que si un elemento divide a otros dos elementos de A dividirá a cualquier combinación lineal de ellos, pues esto permite trabajar la noción de combinación lineal y obtener un resultado útil para justificar otras propiedades. Esta propiedad, planteada en términos literales, resulta una oportunidad valiosa para trabajar ideas metamatemáticas: utilizar el lenguaje algebraico como forma de expresar las relaciones enunciadas, identificar la necesidad de incorporar parámetros no explícitos para expresar una combinación lineal, aplicar definiciones, apreciar la necesidad de justificar propiedades y seguir un razonamiento lógico.

Otra propiedad rica para analizar junto a los futuros docentes y necesaria para justificar la existencia de la descomposición factorial es la de *comparación*: $a|b,\ b \neq 0 \Rightarrow a \leq b$. Su validez en $\mathbb{N}$ lleva a afirmar que los divisores de un natural son menores o iguales que dicho número y que sus múltiplos no nulos son mayores o iguales que este. Por otra parte, observar su invalidez en $\mathbb{Z}$ puede llevar a problematizar cómo extender esta propiedad al trabajo con enteros o polinomios y permite valorar el uso de algunas nociones (valor absoluto, grado de un polinomio) que viabilizan la réplica de estas ideas a otras estructuras.

El trabajo con estructuras que tengan más de un elemento unidad, permite analizar las nociones de *unidades* y *asociados*. Estos conceptos pierden mucho de su sentido si nos restringimos al conjunto de los naturales y aunque resultan fundamentales para el trabajo con el profesorado también se considera que son importantes para los estudiantes magisteriales. Resultará de interés apreciar que los opuestos de $\mathbb{Z}$ tienen el mismo conjunto de divisores, lo que permite definir elementos asociados y elemento unidad (adaptando estas definiciones para magisterio): u es una *unidad* de un dominio de integridad $(A,+,\times)$ si y solo si u es un divisor de la identidad respecto a la segunda operación. Dos elementos a y b de A son *asociados* (y lo anotaremos $a \sim b$) $\Leftrightarrow$ $a|b$ y $b|a$. Se podrá justificar que un elemento se obtiene multiplicando un asociado por alguna de las unidades del anillo, esto constituye una oportunidad para poner en juego argumentos deductivos sencillos a la vez que promueve el vínculo entre ambos conceptos.

Con el profesorado se considera interesante caracterizar las unidades y los elementos asociados en variados dominios de integridad. Se observa por ejemplo que en $(\mathbb{Z},+,\times)$ y en $(\mathbb{Z}[X],+,\times)$ el conjunto de las unidades tiene dos elementos y que los asociados (a excepción del elemento nulo) vienen en parejas. Analizando $(Q,+,\times),(R,+,\times),(C,+,\times)$ se podrá observar que estas estructuras tienen infinitas unidades y que cada elemento no nulo tiene infinitos asociados. La caracterización de unidades y elementos asociados en estructuras como los enteros gaussianos permiten profundizar el análisis de estos conceptos y promueven su vínculo con otros conceptos como el de número complejo, plano complejo, norma, ecuación de la circunferencia y divisibilidad. Se entiende pertinente observar que la relación "ser asociado" es una *relación binaria de equivalencia*, se considera oportuno aprovechar esta instancia para revisar las propiedades que definen este tipo de relaciones. Se entiende conveniente hacer explícitas las similitudes entre esta relación y otras relaciones de equivalencia ya conocidas por los estudiantes (paralelismo entre rectas, paralelismo entre planos, igualdad) y analizar cómo se configuran las clases de equivalencia definidas por esta relación. En particular interesa observar que los elementos asociados tienen los mismos múltiplos y los mismos divisores, que $(\mathbb{Z}, +, \times)$ es un dominio de integridad con dos elementos unidad; que los elementos asociados en $\mathbb{Z}$, a excepción del cero, son las parejas de números opuestos y que estos tienen el mismo conjunto de múltiplos y el mismo conjunto de divisores. En particular, se podrá observar que el *conjunto cociente* $(\mathbb{Z}/\sim)$ con las operaciones inducidas por la relación de equivalencia en $[+]$ y $[\times]$ es isomorfo a $(\mathbb{N}, +, \times)$.

Luego de trabajar estas nociones y de apreciar que todo elemento a de un dominio íntegro tiene por divisores a las unidades del anillo y a sus propios asociados, surgirá naturalmente la distinción entre *divisores propios* e *impropios*.

En relación a los elementos *primos* e *irreducibles*, el trabajo en $\mathbb{N}$ no permite distinguirlos. Algunos textos definen número primo como aquel que tiene exactamente dos divisores; otros (como Apostol, 1980) lo señalan como un entero mayor que uno, cuyos únicos divisores positivos son el propio número y la unidad. Se observa que estas definiciones se vinculan a la idea de elemento irreducible en un dominio íntegro A más que a la noción de elemento primo. Recordemos que un elemento a (no nulo ni unidad) es irreducible en A si toda descomposición como producto de dos elementos de A cumple que uno de los factores es una unidad. Equivalentemente, a es irreducible si y solo si los únicos divisores de a son sus asociados y las unidades de A. Por otra parte un elemento a (no nulo ni unidad) es primo si $a|bc \Rightarrow a|b \veebar a|c$. Por lo expuesto, se entiende pertinente trabajar en magisterio estas dos definiciones (adaptadas a $\mathbb{N}$) e identificar que particularmente en los naturales y en los enteros ambos conceptos resultan equivalentes, abordando así la idea de condición necesaria y suficiente y reflexionando sobre el hecho de que los enunciados del teorema de descomposición factorial en $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Z}$ incluyen el término primo en lugar de irreducible sin que esto afecte su validez. También se entiende relevante observar que estas definiciones se corresponden con señalar que los primos/irreducibles en $\mathbb{N}$ son aquellos que tienen exactamente dos divisores, mientras que en $\mathbb{Z}$ son aquellos que tienen exactamente cuatro divisores. Se podrá observar que estas definiciones excluyen al 0 y al 1 como candidatos para ser elementos primos o irreducibles y se entiende oportuno caracterizar los elementos irreducibles y los primos en otros conjuntos conocidos.

En el profesorado cabe justificar que en cualquier dominio de integridad la condición "ser primo" implica "ser irreducible" y observar la invalidez del recíproco. Para esto se recurrirá a ejemplificar en un dominio íntegro que no sea un dominio de factorización única, por ejemplo $\mathbb{Z}\left[\sqrt{-19}\right]$, pudiendo observar que el elemento 35 se factoriza (no de forma única) como 5×7 y que estos factores son irreducibles y no primos en $\mathbb{Z}\left[\sqrt{-19}\right]$. También es importante identificar que *ser primo* o *ser irreducible* es una propiedad común a todos los elementos de una clase de asociados.

A partir de considerar algunos ejemplos de números primos, surgen preguntas como las siguientes: ¿Hay una cantidad finita de números primos? Dado un número mayor que 1, ¿cómo identificar si es primo? La primera de estas preguntas llevará a explorar y elaborar justificaciones que sustenten la infinitud del conjunto de elementos primos; en particular resulta interesante la demostración de Euclides sobre la infinitud de los números primos. Además de su importancia histórica esta destaca por su sencillez y resulta una oportunidad para trabajar sobre la idea de una demostración por absurdo. La segunda pregunta lleva a revisar el método de Eratóstenes para encontrar los números primos menores a un número y analizar por qué funciona. Se observará en particular que los elementos "tachados" (el 1 queda fuera de la tabla realizada) no son primos pues admiten al menos un divisor propio y finalmente se analizará por qué este proceso puede darse por concluido cuando el primo considerado en el proceso supera la raíz cuadrada del número. También resulta pertinente que los estudiantes se acerquen al problema de *descomponer factorialmente* un número grande; esto permitirá al futuro docente apreciar que este problema resulta cada vez más difícil conforme se toman números mayores, incluso para un computador y constituye una oportunidad para explorar los métodos de codificación de información que utilizan este hecho.

Dada la importancia que tienen las nociones de *máximo común divisor* y *mínimo común múltiplo* de dos naturales en el contexto escolar, se realizará un análisis del primero de estos conceptos aunque estas ideas no resultan imprescindibles para abordar el TFA. En el contexto escolar, el máximo común divisor de dos naturales es definido habitualmente como el mayor divisor común a estos números. Esta definición no hace visible la idea de que este elemento "contiene" como divisores a todos los divisores comunes a esos dos números. Por otra parte, cuando se pretende extender esta noción a otros dominios, nos encontramos con dificultades como evaluar la pertinencia de considerar el "mayor", lo que nos lleva a analizar si existe una relación de orden en el dominio íntegro o decidir qué papel juegan los asociados de este elemento. Observando que cualquier divisor común a dos naturales también divide a su máximo común divisor, los futuros docentes (maestros y profesores) podrán evaluar la siguiente definición alternativa para esta noción observando que prescinde de la relación "mayor que": Si a, b son dos elementos no simultáneamente nulos de un dominio de integridad A, decimos que $d \in A$ es un máximo común divisor de a y b si el elemento d verifica $d|a$, $d|b$ y $\forall \ c \in A, c|a, c|b \Rightarrow c|d$. Resulta interesante observar la equivalencia entre estas dos definiciones del concepto de máximo común divisor en el conjunto de los números naturales; analizar por qué la definición exige que a y b no sean simultáneamente nulos y explorar si está garantizada su existencia y unicidad en el conjunto de los naturales, extendiendo luego el análisis a otras estructuras. Se observará por ejemplo que mientras el $mcd\,\{4, 6\}$ en $\mathbb{N}$ es 2, en $(\mathbb{Z}, +, \times)$ esta definición indica que dos elementos asociados cumplen esta condición. Si bien al trabajar con enteros sería posible convenir que se llama máximo común divisor al elemento positivo, se entiende conveniente destacar que la existencia y la unicidad del máximo común divisor depende del anillo en el que se trabaja y observar que es posible afirmar que en $\mathbb{Z}$ el $mcd\,\{a, b\}$ es único salvo producto por unidades. El trabajo con estructuras como el dominio $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ permite observar que, dados dos elementos no simultáneamente nulos en un dominio íntegro arbitrario no está asegurada la existencia del máximo común divisor o del mínimo común múltiplo de estos elementos. Bastará considerar por ejemplo $a = 2(1 + \sqrt{-5})$ y $b = 6 = (1 + \sqrt{-5})(1 - \sqrt{-5})$ como elementos de $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ y observar que 2 y $(1 + \sqrt{-5})$ son divisores comunes de a y b pero ninguno de ellos divide al otro.

El problema de descomponer un elemento en otros elementos canónicos o "bloques de construcción" es una práctica usual en múltiples contextos y tal actividad resulta familiar para los estudiantes pues aprenden a descomponer aditivamente, multiplicativamente (no necesariamente en factores primos) y polinómicamente (al trabajar el sistema numérico decimal) desde la etapa escolar, siendo esto parte fundamental del proceso de construcción del concepto de número. Al observar entre distintas representaciones de un natural aquella expresión factorizada en la que, a diferencia de otras, todos sus factores son primos/irreducibles y que esta expresión es única salvo el orden de los factores (o la sustitución por asociados si se trabaja en $\mathbb{Z}$), se podrá trabajar en la formulación del teorema fundamental de la aritmética, observando además que si hubiésemos admitido que el 1 fuese primo la condición de unicidad se perdería. Considerando que los estudiantes conocen de su etapa escolar el método tradicional para encontrar la descomposición factorial de un número en sus factores primos (a partir de las divisiones sucesivas entre primos), se considera importante resignificar este algoritmo al vincularlo con la descomposición sucesiva de factores, problematizando y justificando la unicidad de esta descomposición salvo el orden de los factores. Un teorema que resulta de interés abordar en la formación de maestros y profesores es el siguiente (para magisterio se adaptará a $\mathbb{N}$): Si a y b son elementos de un dominio de factorización única se verifica: $a|b$ si y solo si la factorización de a está contenida en la factorización de b.

En profesorado, partiendo del análisis de la descomposición en factores primos de un natural, se propone avanzar sobre el análisis de la descomposición de cualquier entero como producto de elementos primos/irreducibles de $\mathbb{Z}$ y observar su unicidad salvo asociados, para luego problematizar la existencia y unicidad de la descomposición en irreducibles de un elemento de un dominio íntegro. Esto permitirá apreciar que no todo dominio íntegro garantiza la factorización única de sus elementos y brinda la oportunidad de definir *dominio de factorización única* (DFU) como forma de extender ciertas propiedades especiales observadas en $\mathbb{Z}$. Si bien es posible vincular la unicidad en un dominio íntegro A con la condición de que todo elemento irreducible de A sea primo, o con el cumplimiento de la condición de *cadena ascendente de divisores* o incluso con la condición de *cadena ascendente de ideales*, se podrá probar directamente que $(\mathbb{Z}, +, \times)$ es un DFU. Esta demostración garantiza no solo que todo entero puede expresarse de forma única como producto de factores irreducibles (salvo el orden de los factores y el empleo de asociados), sino que además garantiza la existencia del máximo común divisor de dos enteros no simultáneamente nulos y que los irreducibles en $\mathbb{Z}$ coinciden con los primos, como propiedades inherentes a todo DFU.

Sin lugar a dudas existen múltiples abordajes posibles para trabajar esta temática. En el desarrollo propuesto hemos enfatizado la descomposición factorial por lo que el trabajo en el contexto de un dominio de factorización única (como caso particular de dominio íntegro) resulta suficiente para garantizar el cumplimiento de las propiedades que buscamos, esto es, existencia y unicidad de la descomposición factorial, obteniendo también la existencia (no la unicidad) del mínimo común múltiplo y del máximo común divisor entre dos de sus elementos no simultáneamente nulos. Actualmente el álgebra moderna conceptualiza las nociones vinculadas a la divisibilidad desde el concepto de *ideal*. El estudio de la divisibilidad en un *dominio de ideales principales* (DIP) como un estructura especial dentro de los DFU provee un entorno de trabajo apropiado para el desarrollo de algunos aspectos de la teoría, a la vez que promueve la construcción y el uso de ideas fundamentales en el edificio matemático como es la noción de *ideal de un anillo*. Partiendo del conocimiento de la relación de divisibilidad en $\mathbb{Z}$ y de nociones básicas de ideales, es posible definir los conceptos vinculados a esta relación en término de los ideales de un anillo. Reconocemos sin embargo que el abordaje del tema divisibilidad no se limita a las nociones acá desarrolladas y que algunas de estas requieren estructuras que les den soporte. Para trabajar con la *división euclídea* debemos garantizar la existencia y la unicidad del cociente y el resto, lo que requiere que recurramos a trabajar en un contexto particular dentro de los DIP en el que sea posible dar estas garantías, debiendo considerar los *dominios euclidianos*.

Síntesis

La historia nos muestra que los resultados obtenidos por los griegos para las nociones de divisibilidad que se desarrollaron en torno a los números naturales fueron tomadas como base para adaptarlas a los enteros, los polinomios y de forma más general, a los dominios de integridad. En busca de amplitud en nuestro desarrollo hemos presentado las nociones de forma general, en un dominio íntegro cuando fue posible, o en un dominio de factorización única cuando esto fue requerido. Sin embargo, no perdemos de vista que en el desarrollo histórico, las ideas emergen de lo particular a lo general y entendemos que este es el proceso óptimo para recrear su reconstrucción. El eje temático divisibilidad ha sido un pilar en el edificio matemático justamente porque sus problemas resultaron excelentes escenarios para hacer matemática. Entendemos que su valor reside no solo en los productos finales o resultados que ha sabido producir, su mayor valor resulta en los proceso de pensamiento que permite desarrollar, en las motivación y curiosidad que despiertan sus problemas, y esto debe recuperarse con vistas a su enseñanza. En este sentido, entendemos que vivenciar el proceso de abstracción que vivió el Álgebra, transitar desde lo concreto a ideas más generales y abstractas contribuye a construir el conocimiento matemático para la enseñanza (Ball, Thames y Phelps, 2008) que los futuros docentes necesitan para repensar la enseñanza del álgebra en la escuela.

Aspectos didácticos

Introducción

En esta sección abordaremos la enseñanza de la divisibilidad en un curso de Matemática I en la formación de maestros, tomando como eje el contenido teorema fundamental de la aritmética. Inicialmente fundamentaremos la relevancia del estudio de la divisibilidad en general y del TFA en particular en la formación matemática de futuros maestros, presentaremos algunos aportes de la investigación en Matemática Educativa y definiremos los objetivos que nos planteamos al abordar este tema. Luego fundamentaremos la propuesta y presentamos algunas consideraciones generales sobre la metodología de trabajo. Seguidamente presentamos algunas actividades que se consideran potentes para el logro de nuestros objetivos, fundamentando su elección y las posibilidades de trabajo que brindan. Finalmente haremos explícito nuestro enfoque sobre la evaluación en la formación de docentes y dejaremos un listado con parte de la bibliografía recomendada a los estudiantes magisteriales.

Relevancia del tema en la formación docente

La formación docente debe promover la construcción de los conocimientos que los futuros educadores necesitan para desarrollar su profesión con solvencia y dignidad. Por otra parte, Ball, Thames y Phelps (2008) categorizan el *conocimiento matemático requerido para la enseñanza* (MKT) en seis subdominios, tres de ellos vinculados al dominio del *conocimiento del contenido* y otros tres vinculados al *conocimiento didáctico del contenido*. Entendemos que los cursos de Matemática en la formación de docentes deben, al menos, promover el desarrollo de conocimientos en los tres subdominios vinculados al *conocimiento del contenido,* estos son: *conocimiento común del contenido (CCK), conocimiento especializado del contenido (SCK) y conocimiento del horizonte matemático (HCK)*.

El curso de Matemática I deberá hacerse cargo, no solo de revisar y resignificar los principales conceptos, estructuras y procedimientos vinculados a la enseñanza del tema divisibilidad que conforman el currículo escolar, también deberá promover el desarrollo de saberes específicos que solo resultan de interés de un docente cuando se propone desarrollar tareas vinculadas a su enseñanza. El estudio de la divisibilidad permite revisar propiedades de los números y las operaciones, explorar relaciones en busca de patrones, elaborar conjeturas y buscar argumentos que las sustenten, invita a utilizar diferentes representaciones del número y a construir el significado numérico. Brinda una oportunidad para reencontrarse con objetos matemáticos ya conocidos, "desarmarlos" y reconstruirlos, a la vez que permite acercarse de forma natural al uso de la variable, apreciar las ventajas de incorporar el lenguaje algebraico, trabajar los significados del signo igual, desarrollar la capacidad de abstracción y promover el desarrollo del pensamiento algebraico. Resulta oportuno para problematizar ciertas cuestiones: ¿Qué sustentan los algoritmos tradicionales para hallar el mínimo común múltiplo, el máximo común divisor o el algoritmo de Euclides? Estos conocimientos serán imprescindibles para proporcionar explicaciones matemáticas pertinentes, elegir y adaptar material didáctico y comprender procedimientos no estándares de resolución en las producciones escolares. El estudio de la divisibilidad provee de múltiples situaciones que invitan a ser curioso y creativo, a explorar el mundo en busca de patrones y relaciones, a formular conjeturas y buscar formas de justificarlas, desarrollando en los futuros docentes actitudes y competencias propias del hacer matemática y contribuyendo a que estos adopten sus valores fundamentales. Resulta una oportunidad para apreciar el poder del álgebra para modelar situaciones, para expresar generalidades y resolver problemas y apreciar así su potencia e interés dentro y fuera de la matemática. Por otra parte, el estudio de la divisibilidad favorece la comprensión conceptual de la aritmética (Zazkis y Campbell, 1996) y resulta una oportunidad para trabajar sobre nociones fundamentales para el aprendizaje del álgebra como por ejemplo la noción de *igualdad* y el *uso de la variable*. Asimismo permite desarrollar una comprensión más profunda de las propiedades y las estructuras numéricas, promoviendo un entendimiento relacional de las matemáticas (en el sentido dado por Skemp, 1978) pues facilita pensar en términos generales y permite descubrir principios algebraicos unificadores que priorizan los conceptos sobre los cálculos; contribuye también así al desarrollo de una visión periférica de la matemática. Desde una visión de matemática como construcción social, el abordaje de este tema y sus problemas resulta una oportunidad para generar nuevas experiencias de producción y validación del conocimiento, fundamentales para renovar las prácticas docentes, tomando la experimentación y el error como parte fundamental del proceso de aprendizaje.

Aportes de la investigación en Educación Matemática

Múltiples investigadores en Educación Matemática han estudiado la problemática del aprendizaje de la divisibilidad en la formación inicial docente. Zazkis y Campbell (1996) señalan dificultades en identificar las diferencias entre la descomposición en factores y la descomposición en factores primos, lo que promueve confusión sobre la unicidad del teorema fundamental de la aritmética. Zazkis (2000) reporta baja percepción de la

divisibilidad como relación, señala que se asocia el concepto de divisor con la operación de dividir y el concepto de múltiplo con la operación de multiplicar; concluye que la multiplicidad de significados atribuidos a los términos divisor y factor acentúa esta confusión. López (2016) observa una priorización de los procedimientos vinculados a la descomposición en factores primos y bajo entendimiento conceptual en especial de la unicidad de dicha descomposición. También señala dificultades para identificar el conjunto de divisores no explícitos, que resultan de combinar factores primos, a partir de un número expresado como producto de factores primos (López, 2016).
Finalmente se destaca que múltiples investigadores señalan que una adecuada comprensión del concepto de descomposición factorial es central para la comprensión de la divisibilidad y para la comprensión de la estructura de los números enteros (Zazkis y Campbell, 1996; Bodí, 2006). Considerando además que el concepto de descomponer en factores primos constituye una noción fundamental para la matemática, hemos seleccionado este tema como eje de nuestra propuesta didáctica.

Objetivos y competencias a desarrollar

Teniendo en cuenta las dificultades identificadas por las investigaciones, los conocimientos necesarios para enseñar divisibilidad en la escuela y el recorte que debemos realizar en la presentación de este proyecto, nos planteamos desarrollar una secuencia didáctica que permita guiar a los estudiantes magisteriales a alcanzar los siguientes objetivos de aprendizaje:

- Profundizar la comprensión del TFA apreciando los alcances de la condición de unicidad.
- Transitar de forma flexible entre diferentes representaciones de un número (descomposición en factores, descomposición en factores primos con y sin uso de potencias, descomposición como suma de potencias de 10) y apreciar que la utilidad de las representaciones dependen del contexto.

Fundamentación y contexto de la propuesta

Planteamos el estudio de la divisibilidad como una oportunidad para que el futuro maestro se apropie de los valores de la matemática, desarrolle el pensamiento algebraico, construya y reconstruya saberes matemáticos fundamentales para desempeñar su profesión y finalmente, para que produzca modos renovados de pensar y entender la enseñanza de la matemática.
A través de una secuencia de cuatro actividades nos disponemos a abordar el TFA en la formación de maestros. Se entiende que previamente se habrán definido las nociones de múltiplo y divisor como relaciones de orden parcial entre dos números, a través de definiciones como las trabajadas en la primera parte de este trabajo adaptadas a los naturales. También se entiende trabajados los conceptos de elemento primo, irreducible y número compuesto; en particular se habrá explicitado que los elementos primos de $\mathbb{N}$ coinciden con los irreducibles.

Estrategias metodológicas

Teniendo en cuenta que lo que los estudiantes aprenden está fundamentalmente conectado con el cómo lo aprenden (NCTM, 1991), esta propuesta sostiene que el trabajo sobre divisibilidad no puede limitarse a visitar “monumentos matemáticos” (Chevallard, 2013), el aula debe concebirse como una comunidad de práctica, un espacio de creación, discusión y

validación del conocimiento que favorezca la interacción entre los estudiantes, el desarrollo de habilidades comunicativas y el respeto por la diversidad de opiniones. La metodología de trabajo debe permitir al futuro docente "hacer matemática" y vivenciar experiencias de aprendizaje coherentes con las recomendaciones actuales de la investigación en didáctica de la matemática; estas experiencias son necesarias para desarrollar una actitud positiva hacia las matemáticas y confianza en sí mismo como productor de conocimiento. Resulta fundamental la variedad en el tipo de tareas propuestas; las actividades de final abierto (Zaslavsky, 1995) permiten que el estudiante aporte al grupo desde sus posibilidades, que aprecie la matemática como construcción humana y vivencie las ventajas del trabajo colaborativo. Las situaciones de cuestionamiento invitan a contraponer ideas, a generar respuestas argumentadas y a formular nuevas preguntas que resulten un motor para explorar nuevas cuestiones; las actividades que promueven el debate científico (Legrand, 1993) permiten evaluar distintos puntos de vista y vivenciar auténticas experiencias científicas en el aula. El uso de recursos didácticos variados (juegos, material manipulativo, tecnología) permite que los futuros docentes aprecien su potencial para facilitar y profundizar el aprendizaje de las matemáticas y forja experiencias positivas que promueven que estos materiales sean integrados a sus futuras prácticas profesionales.
Para promover que los futuros docentes se responsabilicen como estudiantes y para favorecer su inculturación en las tareas propias de su profesión, cada clase dará inicio con una síntesis de los contenidos matemáticos tratados en la clase anterior a cargo de los propios estudiantes. Luego de abordadas las dudas que pudieran surgir, el docente explicitará los objetivos de la clase y los logros de aprendizaje esperados para ella, promoviendo que el estudiante monitoree sus propios aprendizajes y juegue un papel activo también en la evaluación del proceso de enseñanza-aprendizaje. El docente propondrá las actividades para ser realizadas principalmente en pequeños grupos, monitoreando su organización y producciones, proponiendo nuevas preguntas para reorientar el trabajo en caso de ser necesario, invitando a realizar acuerdos dirigidos a mejorar el lenguaje o construir definiciones compartidas de los objetos matemáticos y dirigiendo la puesta en común de las actividades grupales. En la puesta en común se comparten procedimientos, obstáculos, dilemas y resultados, el error es tomado como alimento para nutrir el proceso de aprendizaje y el profesor solo actuará como experto para orientar al grupo en la búsqueda de soluciones o enriquecer los aportes de los estudiantes en aspectos que se consideren sustantivos para su futura práctica profesional y cuya resolución no esté al alcance del grupo. El estudiante es visto como sujeto pensante y será impulsado a participar de forma comprometida y reflexiva en las actividades propuestas, atendiendo a profundizar no solo su conocimiento disciplinar, sino también a apropiarse de los valores de la matemática y su enseñanza. Se espera que el estudiante sea quien formule las preguntas, se comunique matemáticamente y con argumentos y tome una actitud cuestionadora sobre los contenidos, procedimientos y técnicas que siempre utilizó y asumió como válidos. También se espera que el estudiante cobre autonomía en el monitoreo crítico de su propio proceso de aprendizaje y solicite ayuda personalizada del docente en caso de entenderlo necesario. Para promover la metacognición y el involucramiento de los estudiantes en su papel como futuros enseñantes, en los últimos minutos de cada clase el grupo deberá reflexionar sobre los objetivos de aprendizaje de esa clase y hacer un breve análisis sobre ella que incluya: hacer explícitos los vínculos que pudieron establecer entre los contenidos trabajados y los contenidos del currículo escolar, los errores o dificultades que surgieron en la clase y el

aprovechamiento que se hizo de ellos, las dificultades y errores que pueden anticipar respecto a la temática abordada en los escolares, las creencias e ideas metamatemáticas que los futuros maestros pudieron modificar en esta clase. En caso de existir, la formadora compartirá los dilemas que enfrentó en esta clase y se realizará un breve análisis de cómo lo hizo y por qué lo hizo.

Las actividades, sus objetivos, fundamentos y metodología específica

Actividad 1

La secuencia inicia con una tarea de atención a las similitudes y diferencias entre los objetos matemáticos (Zaslavsky, 1995 y 2008) que permitirá: diagnosticar qué saberes son capaces de movilizar los estudiantes, revisar algunos conceptos (concepto de divisores de un número, noción de elemento irreducible/primo) y promover la atención a las diferentes representaciones de un número. Los estudiantes reunidos en pequeños grupos recibirán 20 tarjetas, cada una de ellas con uno de los siguientes números:

$$0;\ 1;\ 7;\ 2\times 5;\ 12;\ 3\times 5;\ 16;\ 17;\ 3\times 6;\ 19;\ 2\times 10;\ 21;\ 2+2\times 10;\ 24;\ 5^2;\ 3\times 10;\ 36;\ 2\times 3\times 7;\ 45;\ 2^2\times 3\times 7$$

Consigna de trabajo: Clasificar las tarjetas según los criterios que consideren posible, registrando por escrito los criterios seguidos y las categorías obtenidas en el orden en que se los clasificó.

Trabajar las clasificaciones que resulten de observar el tipo de representación, si el número es divisible por cierto natural, la cantidad de divisores y si esta cantidad es par o impar, permitirá apreciar que cada representación visibiliza distintas propiedades. Asimismo, posibilita trabajar las nociones de divisor y múltiplo, revisar las posibles definiciones para de elemento irreducible/primo, apreciar que la descomposición en factores primos es un caso especial de expresión factorizada y que existen divisores no explícitos en la descomposición en factores primos, vincular la paridad del número de divisores y los cuadrados perfectos.

Actividad 2

Esta actividad lúdica (tomada de Granados, 2011) busca motivar a los estudiantes, recuperar conceptos previos (nociones de divisor, múltiplo, elemento irreducible/primo) y al apreciar que los números primos pueden ser usados como bloques de construcción para “formar” otros números, avanzar hacia la formulación del teorema fundamental de la aritmética. El juego involucra a dos jugadores y cinco cartas:

770	154	22	30
14	2	110	6
66	210	2310	70
42	330	10	462

1155	330	21	15
42	3	2310	210
30	462	165	231
6	66	105	33

30	1155	55	770
110	5	165	15
35	210	105	385
10	330	2310	70

385	231	770	21
77	7	210	462
105	2310	1155	70
14	35	154	42

185	154	66	55
165	11	1155	33
2310	462	110	330
231	22	770	77

Un jugador elegirá un número (para sí mismo, sin informar al contrario) entre todos los que aparecen en cualquiera de estas cartas e informará al otro jugador (el mago), cuales son las cartas en que aparece el valor elegido; el mago “mágicamente” informará cuál es el número desconocido elegido por su oponente.

Inicialmente el docente tomará la posición de mago jugando contra el grupo-clase; luego invitará a formular ideas sobre cómo funciona el juego y posteriormente invitará al grupo a validar estas ideas.

Se podrá observar que cada carta contiene un único número primo, que los otros números son múltiplos de él y que al multiplicar los números primos de las cartas seleccionadas se obtiene el número elegido. Un trabajo posterior de reflexión y argumentación de por qué funciona el truco permitirá apreciar la singularidad en el armado de las cartas y evaluar las consideraciones que han de tenerse para que funcione, permitiéndonos concluir que en cada carta solo pueden aparecer números cuya descomposición en producto de factores irreducibles sea de la forma $2^{\alpha}3^{\beta}5^{\gamma}7^{\delta}11^{\varepsilon}$ con exponentes 0 o 1.

Actividad 3

Esta actividad, adaptación de una propuesta de Zazkis y Campbell (1996), se plantea con los objetivos de reflexionar sobre la existencia y la unicidad de la descomposición en factores primos de un número natural, promover el razonamiento lógico, la reflexión y la elaboración de justificaciones, reconocer los divisores "no explícitos" que se corresponden con los productos internos de la descomposición en factores primos y utilizar la descomposición factorial para contar la cantidad de divisores de un número. Implicará el trabajo en pequeños grupos requiriendo una respuesta fundamentada y por escrito a las siguientes preguntas:

a) Si piensas un número mayor que 1, ¿puedes expresarlo como producto de factores primos?
b) Una descomposición en factores primos de M es $3^3 \times 5^2 \times 7$, ¿puedes hallar otra?
c) ¿M es divisible por 2? ¿Y por 5? ¿Y por 7? ¿Y por 9? ¿Y por 15? ¿Y por 63?
d) Sin hallar todos los divisores de M, ¿puedes informar cuántos son?

Actividad 4

Esta tarea inspirada en Llinares (2011) invita a adoptar la posición de maestro y al debate entre pares. Se plantea con los objetivos de: utilizar el TFA para concluir que una fracción irreducible admite expresión decimal solo si su denominador admite como factores primos únicamente 2 y/o 5, analizar posibles equivalencias entre representaciones (fracción irreducible y decimal, expresión decimal, descomposición en factores primos) y reflexionar sobre los usos del signo igual.

Consigna: ¿Qué respuestas esperarías como maestro/a al proponer esta tarea? $12 \div 7 =$

Se iniciará el trabajo de forma individual para generar una respuesta personal, pasando luego a una discusión en pequeños grupos, finalizando con un debate a nivel del grupo-clase bajo las normas del debate científico (Legrand, 1993). En primer lugar permitirá discutir las implicaciones de admitir como válida una respuesta basada en el cociente entero de esta división, por el mero hecho de que el niño no conoce la división con cociente decimal. También permite analizar si puede ser viable como respuesta un número decimal y utilizar el TFA para justificar que una fracción irreducible admite una representación como fracción decimal solo si la descomposición factorial de su denominador incluye exclusivamente potencias de 2 y/o 5. En el debate se podrá reflexionar sobre las prácticas escolares, establecer conexiones entre conocimientos de distintos subdominios del MKT (Ball et al., 2008) y valorar la importancia de reflexionar sobre los conocimientos implicados en las tareas que propone el docente.

Evaluación

Se concibe la evaluación como un proceso continuo y recursivo que proporciona información relevante para que el formador y los futuros docentes tomemos decisiones que permitan

regular y mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje. La formación de un profesional de la educación crítico de sus saberes, autónomo, capaz de analizar una situación y tomar decisiones que contribuyan a su mejora, requiere de estudiantes que jueguen un rol activo y participativo en la construcción de los criterios y las implicaciones de la evaluación. NCTM (2000) recomienda integrar evaluación con instrucción; la autoevaluación y la coevaluación se aprecian fundamentales en el desarrollo de las destrezas y actitudes necesarias para mirar la evaluación como una instancia crucial en el proceso de aprendizaje. Además de los instrumentos tradicionales de evaluación que se focalizan en los resultados del proceso, se entiende necesario utilizar instrumentos que permitan monitorearlo a tiempo real; una guía de observación para el docente y una pauta de autoevaluación para el estudiante se aprecian como instrumentos adecuados en este sentido. La pauta de autoevaluación hace explícitos los aprendizajes esperados y permite que el propio estudiante monitoree su proceso de aprendizaje, promoviendo así su autonomía y metacognición. Algunos de los aprendizajes esperados para las actividades propuestas son: justificar por qué un número natural es irreducible-primo, identificar los factores irreducibles de un número natural expresado en el sistema numérico decimal, expresar un número natural como producto de irreducibles-primos, enunciar el teorema fundamental de la aritmética, justificar la existencia y la unicidad de la descomposición de un número como producto de factores primos-irreducibles, reconocer los divisores de un número dado por su expresión como producto de factores primos, justificar (sin efectuar operaciones) que dos números expresados como producto de irreducibles son iguales/diferentes o si uno es múltiplo/divisor del otro, justificar si una fracción dada admite expresión como fracción decimal.
La guía de observación para el docente facilita el registro de aspectos específicos y fundamentales del proceso de enseñanza- aprendizaje; permite recabar información sobre los estudiantes, llevar un registro de los conocimientos que moviliza, las actitudes que manifiesta al hacer matemática, observar su capacidad crítica y reflexiva y el grado de autonomía que ha logrado desarrollar. Acompaña todo el proceso educativo y constituye también un insumo valioso para obtener registros que lleven al formador a reflexionar sobre su propia práctica. También resulta útil el uso de rúbricas especialmente para desarrollar la coevaluación de actividades grupales, como planificar y dictar en duplas una clase sobre una temática del curso. En estos casos la rúbrica será elaborada por los estudiantes y consensuada de forma previa al desarrollo de la actividad. Los instrumentos tradicionales de evaluación (pruebas escritas, individuales o en duplas) serán utilizados de acuerdo a la normativa vigente, para evaluar los resultados de un proceso de trabajo. La calificación del estudiante emanará de considerar el proceso de aprendizaje, atendiendo particularmente a su capacidad de ser crítico, reflexivo y capaz de aprender de forma autónoma, pues estas capacidades se consideran fundamentales para un futuro docente.

Bibliografía a recomendar a los futuros educadores

Apostol, T. (1980). *Introducción a la teoría analítica de números.* Barcelona, España: Reverté.

Birkohff, G., & Mac Lane, S. (1970). *Álgebra Moderna*. Barcelona, España: Vicens-Vives.

Cid, E., Godino, J. y Batanero, C. (2004). Sistemas numéricos para maestros. En Godino (Ed.) *Matemáticas para maestros.* (pp. 91-100). Granada, España: Universidad de Granada.

Cólera, J. y De Guzmán, M. (1994). *Bachillerato, Matemática I.* Barcelona, España: Anaya.

García Merayo, F. (2015). *Matemática discreta.* Madrid, España: Paraninfo.
Grimaldi, R. (1998). *Matemáticas discreta y combinatoria: una introducción con aplicaciones.* Addison-Wesley Iberoamericana. Wilmington, Delaware, Estados Unidos.
Sierra, M., González, T., García, A. y González, M. (1989). *Divisibilidad.* Madrid, España: Síntesis.

Proyección en líneas de investigación

Descripción de la línea de investigación

Rico y Sierra (2000) delimitan tres campos de reflexión dentro de la Educación Matemática e indican que cada uno de ellos consideran distintos problemas y proceden de ámbitos de educación bien diferenciados: la trasmisión del conocimiento matemático y su evaluación; la formación, preparación, actuación y desarrollo de los profesionales que asumen intencionalmente los procesos de enseñanza de la matemática y finalmente, la fundamentación y teorización de los fenómenos derivados de la enseñanza y el aprendizaje de la matemática. Estos investigadores señalan que la investigación en Didáctica de la Matemática encuentra sus problemas de estudio en estos tres campos y que los departamentos universitarios e institutos de investigación se organizan en líneas de investigación para promover su realización y desarrollo. Una de las líneas de trabajo a nivel del Consejo de Formación en Educación (CFE) que se inscribe en el segundo ámbito descrito, estudia la formación de profesores de matemática. Como parte de distintos cursos de posgrado, algunos docentes del CFE han desarrollado trabajos de tesis y tesina, que giran en torno al conocimiento del profesor de matemática (o del maestro) para enseñar matemática.

Desde que Shulman invitara a la comunidad educativa a investigar sobre el conocimiento profesional del profesor, en el contexto particular de la educación matemática han surgido múltiples modelos teóricos que permiten reflexionar sobre los conocimientos que ha de construir un docente para enseñar matemática. Actualmente una de las líneas prioritarias en investigación en Matemática Educativa es el *desarrollo y conocimiento profesional del profesor de matemáticas*. En esta línea, han surgido múltiples trabajos que utilizan el constructo teórico denominado *Conocimiento Matemático para la Enseñanza (MKT*) desarrollado por un equipo de investigadores de la universidad de Michigan liderados por Deborah Ball, que ha sido utilizado en múltiples estudios para identificar los conocimientos necesarios para el desarrollo de tareas de enseñanza sobre una temática, permitiendo obtener resultados que orientan la formación inicial y continua de los docentes.

Aké, Mojica y Ramos (2015) señalan que debido a la importancia del álgebra y al difícil acceso conceptual que tienen la mayoría de los estudiantes, diversas investigaciones en educación matemática se han centrado en la introducción de aspectos del pensamiento algebraico en la educación primaria. Esta introducción implica cambiar la manera de concebir el álgebra como tal, para poder incluirla en este nivel educativo con la finalidad de estimular el desarrollo de dicho pensamiento en los niños, lo que ha llevado a que cobre interés para la investigación el estudio del pensamiento algebraico y cómo introducirlo tanto en el currículo de primaria como en el currículo de la formación de maestros.

Vaillant y Manso (2012) señalan que existe a nivel internacional, una insatisfacción de la propia comunidad de educadores respecto a la capacidad de los institutos de formación docente para dar respuesta a las necesidades de esta profesión. A pesar que estas autoras señalan que han aumentado los estudios en materia de formación inicial, Silverman y

Thompson (2008) señalan que hay un conocimiento limitado sobre el conocimiento matemático-didáctico que el profesor necesita para la enseñanza y que caracterizar este conocimiento es un tema relevante de investigación.
Este proyecto se inscribe dentro de la línea de investigación *desarrollo y conocimiento profesional del profesor de matemáticas*, específicamente se enfoca en conocer el conocimiento matemático necesario para desarrollar el pensamiento algebraico en estudiantes de nivel primario.

Descripción de la problemática

En el año 2008 se implementa un nuevo plan de estudios para la enseñanza primaria e ingresa por primera vez de forma explícita el álgebra a este nivel educativo, acompasando así una tendencia internacional que aboga por promover el desarrollo del pensamiento algebraico desde formación inicial.
Una de las grandes dificultades en la construcción del pensamiento algebraico se asocia a interpretaciones incorrectas o incompletas del signo igual (Herscovics y Kieran, 1980). Hartzler (2013) señala que algunos maestros en formación que participan de su estudio dieron evidencias de mantener interpretaciones operacionales de este símbolo que los llevaron a responder bajo el formato “operación igual respuesta”, aún en tareas que presentan operaciones a ambos lados del signo igual. En su estudio el entendimiento relacional del signo igual mostró correlacionarse positivamente con el nivel de confianza al enseñar matemática. En otro orden Llinares (2003) indica que un alto porcentaje de los estudiantes de magisterio que participaron de su estudio evidenciaron poco desarrollo del pensamiento estratégico para formular, representar y resolver problemas, actitudes negativas hacia la matemática y escasas capacidades para comunicar y explicar matemáticamente. Señala que la poca confianza en su capacidad para hacer matemática dificulta el acercamiento del estudiante a la producción de conocimiento.
Según Godino, Aké, Gonzato y Wilhelmi (2014) no basta con elaborar propuestas curriculares que incluyan el álgebra desde los primeros niveles educativos, se precisa que el docente actúe como principal agente de cambio en la introducción y el desarrollo del razonamiento algebraico en las aulas de primaria. Estos autores señalan que “la formación del maestro debe contemplar la comunicación y construcción de nociones, procesos y significados algebraicos, descubriendo su función central en la actividad matemática. Solo así serán los maestros capaces de desarrollar el razonamiento algebraico a lo largo de los distintos niveles” (p. 4). Agregan que es necesario que los docentes tengan una visión del álgebra escolar amplia, que va más allá del verla como una generalización de la aritmética y el manejo de expresiones literales; los docentes deben apreciar las variables, ecuaciones y funciones como instrumentos de modelización matemática, observar que estas proporcionan nuevas capacidades para analizar las soluciones, generalizarlas y justificar su alcance y finalmente comprender que el álgebra permite reducir los tipos de problemas y unificar las técnicas de solución.

Antecedentes

Godino y Font (2003) señalan que las primeras experiencias con el razonamiento algebraico están relacionadas con la aritmética generalizada y que estas resultan importantes para la progresiva comprensión del lenguaje algebraico. Agregan que el concepto matemático que hace posible la generalización es el de variable y proponen cuatro categorías de situaciones

para el desarrollo del razonamiento pre-algebraico en la escuela: la comprensión de patrones, relaciones y funciones, la representación y análisis de situaciones matemáticas y estructuras usando símbolos algebraicos, el uso de modelos matemáticos para representar y comprender relaciones cuantitativas y finalmente, el análisis del cambio en contextos diversos. Señalan que una concepción ampliada del álgebra como instrumento de modelización matemática se puede y se debe ir construyendo progresivamente desde los primeros niveles educativos. Finalmente agregan que los procesos de simbolización, la expresión de relaciones, y la identificación de patrones, son propios de los primeros niveles de algebrización y por tanto, debería iniciarse su estudio desde la educación primaria.
Por otra parte, Molina (2006) reporta que existen tres grandes problemas en la enseñanza del álgebra: la falta de atención a la generalización y al razonamiento, un salto demasiado rápido al tratamiento formal del álgebra y finalmente, falta de claridad respecto a la utilidad en álgebra. Señala que la promoción del pensamiento algebraico busca facilitar el aprendizaje del álgebra y fomentar un aprendizaje por compresión de las matemáticas; el desarrollo del pensamiento relacional promueve el desarrollo del pensamiento algebraico, pues interviene en el análisis de objetos o situaciones matemáticas consideradas como totalidades y centra la atención en la búsqueda de relaciones y en el análisis de su estructura, lo que resulta primordial para la generalización. Agrega "que los diferentes modos de pensamiento involucrados en la actividad algebraica son considerados hábitos mentales importantes que todos los alumnos deben adquirir" (p. 22); indica que "los docentes han de suscitar la observación de patrones, relaciones y propiedades matemáticas, crear un ambiente escolar en el que se valores que los alumnos exploren, modelicen, hagan predicciones, discutan, argumenten, comprueben ideas y también practiquen habilidades de cálculo" (p. 22, citando a Blanton y Kaput, 2004, 2005)
En Godino et al. (2014) los investigadores señalan que el análisis focalizado en el reconocimiento de objetos y procesos propios del pensamiento algebraico puede facilitar la identificación de rasgos de las prácticas matemáticas sobre las cuales se puede intervenir para aumentar progresivamente el nivel de algebrización de la actividad matemática de los escolares. En este sentido Llinares (2008) señala que "aprender, desde un punto de vista sociocultural, está relacionado con cómo las personas se apropian de herramientas para pensar y actuar en una comunidad de práctica" (p. 1). Propone una visión de la formación de maestros y profesores de matemática como un ámbito en el que se aprende una práctica y agrega que "al considerar la enseñanza de las matemáticas como una práctica que tiene que ser comprendida y aprendida, podemos identificar algunas tareas que la articulan y componentes del conocimiento profesional del profesor que permiten realizarlas" (p. 12).
Entendemos que las perspectivas que presentan Godino y sus colaboradores y Llinares se complementan y resultan en una forma novedosa y potente para entender las problemáticas que afectan la formación inicial docente. Si tenemos en cuenta que resolver un problema matemático rara vez requiere movilizar conocimientos del subdominio del *conocimiento especializado del contenido* del MKT, resulta relevante cuestionar qué oportunidades damos a los futuros maestros para construir estos conocimientos, qué conocimientos matemáticos deben incorporarse a la formación inicial de profesores para que los futuros docentes puedan desarrollar el pensamiento algebraico en sus alumnos y qué tareas resultan adecuadas para desarrollarlos. En este contexto entendemos pertinente investigar qué conocimientos matemáticos ha de desarrollar la formación inicial docente y qué abordajes metodológicos resultan adecuados para que los maestros no solo tengan las herramientas

necesarias para promover el desarrollo del pensamiento algebraico en sus alumnos, sino que puedan disponer flexiblemente de ellas según las necesidades formativas de sus estudiantes.

Objetivo general

Explorar los conocimientos matemáticos requeridos para la enseñanza del pensamiento algebraico e indagar las prácticas que los movilizan.

Objetivos específicos

- Explorar y caracterizar las actividades que un grupo de maestros adscriptores utilizan para promover el pensamiento algebraico en los escolares
- Identificar los conocimientos matemáticos vinculados a cada subdominios del MKT necesarios para planificar y desarrollar las actividades antes mencionadas.

Metodología

Esta investigación de tipo exploratorio tendrá corte cualitativo. La población de estudio estará constituida por un grupo de maestros adscriptores de una escuela de práctica, esto es, un grupo de maestros calificados para realizar el acompañamiento de futuros maestros, que tienen a su cargo un grupo de escolares en una escuela pública de enseñanza primaria y uno o dos estudiantes de magisterio que realizan la práctica docente bajo su supervisión y atención. Mediante un estudio de casos se explorarán las ideas de los maestros sobre el pensamiento algebraico y las actividades que entienden pertinentes para desarrollarlo en los escolares, caracterizando los conocimientos matemáticos para la enseñanza implicados en el diseño e implementación de estas tareas según el modelo MKT propuesto por Ball, Thames y Phelps (2008).

Este estudio utilizará un cuestionario para recabar información general sobre las ideas de los maestros participantes respecto al pensamiento algebraico y las actividades que consideran pertinentes para para promoverlo. A través de las respuestas obtenidas se seleccionarán dos o tres maestros para constituirlos en nuestros casos de estudio. Seleccionados estos, se realizarán entrevistas que serán audio grabadas para explorar en profundidad las tareas o actividades que estos maestros entienden potentes para desarrollar del pensamiento algebraico. Utilizando el constructo teórico desarrollado por Ball, Thames y Phelps (2008) se analizarán y caracterizarán los conocimientos matemáticos necesarios para planificar y desarrollar estas actividades con los escolares.

Marco teórico

Ball, Thames y Phelps (2008) desarrollaron un constructo teórico denominado Conocimiento Matemático para la Enseñanza (MKT), creado con el propósito de diferenciar los componentes del conocimiento del profesor de matemática y orientar su formación inicial y continua. Se considera que este modelo resulta una herramienta apropiada para guiar la exploración, entendiendo que la delimitación del conocimiento matemático para la enseñanza en subdominios específicos permite profundizar el análisis y posibilita la identificación de los conocimientos necesarios para promover el pensamiento algebraico, haciéndolos explícitos y visibles para la comunidad educativa.

Impacto esperado del proyecto

Este trabajo permitirá reflexionar sobre las características del pensamiento algebraico, identificar un conjunto de actividades que resultan potentes para desarrollarlo en los escolares y visibilizar los conocimientos matemáticos necesarios para potenciar este pensamiento. Permitirá alimentar el debate sobre los contenidos del currículo de matemática que resultan valiosos para los futuros maestros, haciendo foco en la promoción del pensamiento algebraico; profundizará nuestra reflexión y la reflexión de otros colegas formadores de matemática sobre esta temática. Se considera que este estudio brindará insumos para identificar prácticas específicas que permitan construir y movilizar el pensamiento algebraico en la formación inicial y continua de maestros y profesores de matemática y permitirá orientar las prácticas de los docentes formadores. Por otra parte, se entiende que este estudio proporcionará insumos que podrían ser considerados para pensar un nuevo currículo de matemática en la formación de maestros. Considerando que esta investigación involucra a docentes adscriptores como población de estudio y a una docente de matemática que oficia como investigadora, se entiende que este trabajo permitirá realizar avances en vincular la matemática con su didáctica, desde la perspectiva ofrecida por Llinares, en la que la formación docente se percibe como un proceso en el que los futuros maestros se apropian de los modos de pensar y actuar en una comunidad de práctica.

Referencias bibliográficas

Aké, L., Mojica, M., & Ramos, B. (2015). Introducción del pensamiento algebraico en educación primaria: Un reto para la educación básica en México. En XIV CIAEM *Educación Matemática en las Américas.* 1(14), 143-150.

Apostol, T. (1980). *Introducción a la teoría analítica de números.* Barcelona, España: Reverté.

Ball, D., Thames, M., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching what makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407.

Bodí, S. (2006). *Análisis de la comprensión de divisibilidad en el conjunto de los números naturales*. (Tesis doctoral). Departamento de Innovación y Formación Didáctica: Universidad de Alicante. España.

Charbonneau, L. (1996). From Euclid to Descartes: Algebra and its relation to Geometry. En: Bednarz, Kieran & Lee (eds.) *Approaches to Algebra.* (pp. 55-63). Países Bajos: Kluwer Academic publisher.

Chevallard, Y. (2013). Enseñar matemáticas en la sociedad de mañana: alegato a favor de un contraparadigma emergente. *Journal of Research in Mathematics Education, 2*(2), 161-182.

Godino, J. D. y Font, V. (2003). *Razonamiento algebraico y su didáctica para maestros*. Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Granada, Granada, España.

Godino, J., Aké, L., Gonzato, M., & Wilhelmi, M. (2014). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas, 32*(1), 199-219.

Granados, J. (2011). *Factorización prima de números naturales para estudiantes del tercer ciclo*. (Tesis de maestría). Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia.

Hartzler, J. (2013). *A comparative study of pre-service teachers' understandings of the equal sign* (Tesis de doctorado). Iowa State University, Iowa City, Estados Unidos.

Herscovics, N. y Kieran, C. (1980). Constructing meaning for the concept of equation. *The Mathematics Teacher, 73*(8), 572-580.

Legrand, M. (1993). *Débat scientifique en cours de mathématiques et spécificité de l'analyse*. Repères IREM, 10(123-159). Paris: Topiques Editions.

Llinares, S. (2003). Matemáticas escolares y competencia matemática. En Chamorro, C. (Coord.). *Didáctica de las matemáticas.* (pp. 3-29). España: Pearson-Prestice Hall.

Llinares, S. (2008). Construir el conocimiento necesario para enseñar matemática: prácticas sociales y tecnología. *Evaluación e Investigación, 3*(1), 7-30

Llinares, S. (2011). Tareas matemáticas en la formación de maestros. Caracterizando perspectivas. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 78,* 5-16.

López, A. (2016). *Significados de la relación de divisibilidad de maestros en formación manifestados en el desarrollo de un modelo de enseñanza* (Tesis doctoral). Universidad de Granada, Granada, España.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (1991). Professional standards for teaching mathematics. Reston, VA: NCTM.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2000). Principles and standards for school mathematics (Vol. 1). Reston, VA: NCTM.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2014). Algebra as a Strand of School Mathematics for All Students. A Position of the National Council of Teachers of Mathematics. Reston, VA: NCTM.

Ortega, V. (2011). Formación de la noción abstracta de estructura algebraica. (Tesis de maestría) Universidad del Valle, Santiago de Cali, Colombia.

Puig, L. (2003). Historia de las ideas algebraicas: componentes y preguntas desde el punto de vista de la matemática educativa. En E. Castro (Coord.) Actas de *VII SEIEM*, (pp. 97-108). España: Universidad de Granada.

Rico, L., & Sierra, M. (2000). Didáctica de la Matemática e investigación. En Carrillo, J.; Contreras, L. (eds.), *Matemática española en los albores del siglo XXI* (pp. 77-131). Huelva: Hergué Editores.

Skemp, R. (1978). Relational understanding and instrumental understanding. *Arithmetic Teacher, 26*(3), 9-15.

Silverman, J., & Thompson, P. (2008). Toward a framework for the development of mathematical knowledge for teaching. *Journal of mathematics teacher education, 11*(6), 499-511.

Stewart, I. (2008). *Historia de las matemáticas en los últimos 10000 años*. Barcelona, España: Crítica.

Vaillant D. & Manso J. (2012). Tendencias en la formación inicial docente. *Cuadernos de Investigación Educativa, 3*(18), 11-30.

Zazkis, R., & Campbell, S. (1996). Divisibility and multiplicative structure of natural numbers: Preservice teachers' understanding. *Journal for Research in Mathematics Education*, *27*(5), 540-563.

Zazkis, R. (2000). Factors, divisors and multiples: Exploring the web of students' connections. *Research in collegiate mathematics education, 4,* 210-238.

Zaslavsky, O. (1995). Open-ended tasks as a trigger for mathematics teachers' professional development. *For the Learning of Mathematics, 15*(3), 15-20.

Zaslavsky, O. (2008). Attention to similarities and differences: A fundamental principle for task design and implementation in mathematics education. *Topic Study Group 34: Research and development in task design and analysis, ICME, 11*.

Transformaciones lineales

Julio Vassallo

1. Aspectos disciplinarios

Las transformaciones lineales intervienen en muchas situaciones en Matemática. En Geometría se utilizan para estudiar isometrías y semejanzas, en Álgebra se pueden usar para representar ecuaciones, en Análisis sirven para aproximar localmente funciones, por ejemplo.

Desempeñan un papel muy importante en matemática y en muchas áreas de la ciencia como ser física, ingeniería, economía, ciencias sociales, procesamiento de imágenes, gráficas en computadora y muchas otras.

En la era informática el álgebra lineal ha cobrado mayor importancia pues en el uso de computadoras se requiere de un número grande de operaciones. El manejo de imágenes, sonido y digitalización de toda clase de información requiere de vectores. En el mundo de los videojuegos las transformaciones lineales son fundamentales; cuando se cambia el punto de vista del escenario, lo que hace el programa es aplicar una transformación lineal de rotación.

Muchos fenómenos de la naturaleza, que se presentan en la ingeniería se pueden aproximar a un modelo lineal. También los biólogos suelen utilizar funciones lineales o afines para describir la relación entre la longitud de una serpiente y la longitud de su cola, o la cantidad de chirridos de un grillo y la temperatura ambiente, por citar solo un par de ejemplos.

La importancia de caracterizar estos fenómenos y representarlos mediante un modelo lineal, radica en que estos modelos son más sencillos de manejar. De allí la importancia de estudiar algebra lineal y en particular transformaciones lineales tanto por su relevancia dentro de la Matemática como por sus aplicaciones en el mundo de la ciencia y la tecnología.

Esbozaremos un desarrollo formal omitiendo la mayoría de las pruebas. Brown (1988), Halmos (1965), Hernández (1994) y Ulhoa Cohelo y Laurenço (2001) son referencias adecuadas para un desarrollo más detallado.

Formalmente las transformaciones lineales son funciones que tienen por dominio y codominio espacios vectoriales; esto es conjuntos dotados de una estructura algebraica definida como sigue.

Un conjunto no vacío V es un ***espacio vectorial*** sobre un cuerpo K si cumple que:

1) Existe una operación definida en V que notaremos con +, de modo que V es un grupo conmutativo respecto de dicha operación.
2) Existe una función $\cdot : K \times V \to V$ para la cual se verifican las siguientes propiedades:
   i) $\alpha \cdot (\beta \cdot u) = (\alpha\beta) \cdot u$, para todo α y β de K y para todo u de V.
   ii) $\alpha \cdot (u + v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v$, para todo α de K y para todo u y v de V.
   iii) $(\alpha + \beta) \cdot u = \alpha \cdot u + \beta \cdot u$, para todo α y β de K y para todo u de V.
   iv) $1 \cdot u = u$ para todo u de V donde 1 es el neutro del producto en el cuerpo K.

Usualmente llamamos ***vectores*** a los elementos de V y llamamos ***escalares*** a los elementos de K, llamamos ***producto por un escalar*** a la “operación externa” $\cdot$ y escribimos αu en lugar de $\alpha \cdot u$. Para afirmar que V es un espacio vectorial sobre un cuerpo K, escribimos V es un K-e.v.

Un subconjunto S no vacío de un K-e.v. V, es un ***subespacio vectorial*** de V si cumple las siguientes propiedades:
1) La suma de dos vectores cualesquiera de S pertenece a S.
2) El producto de un vector de S por un escalar cualquiera de K es un vector de S.
Una ***transformación lineal*** (*) se define entonces como una función $T : V \to W$ donde V y W son K -e.v., que cumple $T(u+v)=T(u)+T(v)$ para todo par de vectores u y v de V y $T(\alpha u)=\alpha T(u)$ para todo escalar α y para todo vector u de V.
Una herramienta fundamental para el estudio de las transformaciones lineales es el uso de matrices. Para ello es necesario echar mano a determinados subconjuntos de un espacio vectorial llamados bases. Una ***base*** de un K-e.v. V es un subconjunto B de V para el cual se cumple que:
1) Todo vector de V es combinación lineal de vectores de B; esto es para todo u *de* V, existen escalares $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ y existen vectores $u_1,u_2,\ldots,u_n$ de B tales que $u=\alpha_1u_1+\alpha_2u_2+\cdots+\alpha_nu_n$.
2) Si $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ son escalares y $u_1,u_2,\ldots,u_n$ son vectores de B para los cuales $\alpha_1u_1+\alpha_2u_2+\cdots+\alpha_nu_n=0$, se tiene $\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_n=0$. Por simplicidad hemos notado con 0 tanto al vector nulo de V como al escalar 0 (neutro de la suma en K).

Si se verifica la condición 1) decimos que B es un ***generador*** de V y si se verifica la condición 2) diremos que B es ***linealmente independiente***. De este modo una base de V es un conjunto generador de V que es linealmente independiente.
Los siguientes resultados son fundamentales en álgebra lineal.
Todo subconjunto linealmente independiente de un espacio vectorial V está incluido en una base de V.
Todo conjunto generador de un espacio vectorial V contiene una base de V.
Dos bases cualesquiera de un espacio vectorial V tienen igual cardinal.
Si V tiene una base finita, llamamos ***dimensión*** de V al cardinal de dicha base (que escribiremos $dim(V)$) y decimos que V es un espacio vectorial de dimensión finita. En caso contrario decimos que la dimensión de V es infinita. Cabe aclarar aquí que siguiendo a Halmos (1965), estamos afirmando que el conjunto vacío es base del espacio nulo. Si no se desea hacer esto para evitar las disquisiciones lógicas que esta afirmación conlleva basta con convenir que la dimensión de dicho espacio es 0. Naturalmente un subespacio de un espacio de dimensión finita, es un espacio de dimensión finita cuya dimensión no excede la dimensión del espacio original.
Si además el cardinal de B es n, y escribimos un vector u de V como $u=\alpha_1u_1+\alpha_2u_2+\cdots+\alpha_nu_n$, a la n-upla de coeficientes le llamamos ***coordenadas*** del vector u en la base B. Esto tiene sentido porque dicha n-upla es única. Nótese que a partir de aquí cobra importancia el orden de los elementos de la base B. De aquí en más una base de V será una base ordenada, teniendo así la unicidad mencionada de dicha n-upla de coordenadas.
Dada una transformación lineal $T : V \to W$, dos subespacios importantes relacionados con ella son el núcleo y la imagen. El ***núcleo*** de una transformación lineal T que notaremos por $N(T)$, es $T^{-1}(\{0_W\})$, donde hemos notado 0_W al vector nulo de W. De aquí en más

omitiremos el subíndice pues el contexto no dejará lugar a confusión. Por otra parte la ***imagen*** de *T* que notaremos $Im(T)$ es simplemente el conjunto imagen (o recorrido) de *T*. Se verifica rápidamente a partir de las definiciones que $N(T)$ es un subespacio de *V* y que $Im(T)$ es un subespacio de *W*. También es sencillo probar que una transformación lineal $T: V \to W$ es inyectiva si y solamente si $N(T) = \{0\}$.

Un resultado clave en el estudio de los espacios vectoriales de dimensión finita es el siguiente, que suele aparecer en los textos como teorema de la dimensión. Dados *V* y *W* dos *K*-e.v. de dimensión finita y una transformación lineal $T: V \to W$, se tiene que $dim N(T) + dim Im(T) = dim(V)$.

Veamos un esquema de la prueba. Notemos con *n* y con *d* las dimensiones de *V* y $N(T)$ respectivamente. Dado que $N(T)$ es un subespacio de *V* tenemos que $0 \le d \le n$. Nos concentraremos en el caso en que $d \neq 0$ y $d \neq n$. Tomemos una base $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_d\}$ de $N(T)$ y completémosla hasta obtener una base $B' = \{v_1, v_2, \ldots, v_d, v_{d+1}, \ldots, v_n\}$ de *V*.

Si *w* es un vector de $Im(T)$, podemos escribir $w = T(v)$, para algún vector *v* de *V*, por lo cual $w = T(v) = \alpha_1 T(v_1) + \alpha_2 T(v_2) + \cdots + \alpha_d T(v_d) + \alpha_{d+1} T(v_{d+1}) + \cdots + \alpha_n T(v_n)$, siendo $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ la *n*-upla de coordenadas de *v* en la base B'. De modo que el conjunto $T(B')$ es un generador de $Im(T)$. Como $T(v_1) = T(v_2) = \cdots = T(v_d) = 0$, en realidad el conjunto $\{T(v_{d+1}), \ldots, T(v_n)\}$ es un generador de $Im(T)$. Si probamos que es linealmente independiente la prueba termina.

Sean entonces $\alpha_{d+1}, \cdots, \alpha_n$ escalares tales que $\alpha_{d+1} T(v_{d+1}) + \cdots + \alpha_n T(v_n) = 0$. Entonces $T(\alpha_{d+1} v_{d+1} + \cdots + \alpha_n v_n) = 0$ y $\alpha_{d+1} v_{d+1} + \cdots + \alpha_n v_n \in N(T)$. Podemos entonces escribir dicho vector como combinación lineal de los vectores de *B*; esto es $\alpha_{d+1} v_{d+1} + \cdots + \alpha_n v_n = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_d v_d$.

Por lo tanto $-\alpha_1 v_1 - \alpha_2 v_2 - \cdots - \alpha_d v_d + \alpha_{d+1} v_{d+1} + \cdots + \alpha_n v_n = 0$ y como B' es linealmente independiente se tiene que $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$. En particular $\alpha_{d+1} = \cdots = \alpha_n = 0$.

Con esto hemos probado la independencia lineal del conjunto $\{T(v_{d+1}), \ldots, T(v_n)\}$ y por lo tanto que es una base de $Im(T)$. Concluimos que $dim Im(T) = n - d$ y de aquí la tesis.

Si consideramos dos espacios vectoriales de dimensión finita *V* y *W* sobre un cuerpo *K* y una base de cada uno de ellos podemos asociarle a cada transformación lineal $T: V \to W$ una matriz de la siguiente forma.

Sea $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ una base de *V* y $B' = \{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$ una base de *W*. Podemos escribir los vectores $T(v_1), T(v_2), \ldots, T(v_n)$ como combinaciones lineales de los vectores de B'.

Pongamos $T(v_1)=a_{11}w_1+a_{21}w_2+\cdots+a_{m1}w_m$, $\ldots, T(v_n)=a_{1n}w_1+a_{2n}w_2+\cdots+a_{mn}w_m$. La ***matriz asociada*** a T en las bases B y B' se define como la matriz de m filas y n columnas $\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ a la que notamos ${}_{B'}(T)_B$.

Naturalmente esta matriz depende de las bases elegidas.

Es sencillo probar que si definimos la suma de dos transformaciones lineales $T_1 : V \to W$ y $T_2 : V \to W$ por $(T_1+T_2)(u)=T_1(u)+T_2(u)$ y el producto de una transformación lineal por un escalar como $(\alpha T)(u)=\alpha T(u)$ se tiene que el conjunto de las transformaciones lineales de V en W es un K-e.v (que notaremos $L(V,W)$).

Además la matriz asociada a la suma T_1+T_2 en las bases B y B' es la suma de las matrices asociadas a T_1 y T_2 en dichas bases y la matriz asociada al producto por un escalar αT en las bases B y B' es $\alpha \cdot {}_{B'}(T)_B$.

Tenemos entonces que fijadas las bases B y B', la correspondencia que asocia a cada T de $L(V,W)$ la matriz ${}_{B'}(T)_B$ es una transformación lineal (que puede verificarse que es biyectiva) entre los K-e.v. $L(V,W)$ y $\mathcal{M}_{mxn}(K)$.

SI componemos dos transformaciones lineales $T_1 : V \to U$ y $T_2 : U \to W$ obtenemos una transformación lineal $T_2 \circ T_1 : V \to W$ y si fijamos bases B, B' y B'' de V, U y W respectivamente tenemos que ${}_{B''}(T_2 \circ T_1)_B = {}_{B''}(T_2)_{B'} \cdot {}_{B'}(T_1)_B$. De esta forma, podemos trabajar con matrices en lugar de transformaciones lineales. Un ejemplo de lo útil que resulta esta idea es el siguiente resultado.

Si $T : V \to V$ es una transformación lineal y B es una base de V, tenemos que: T es biyectiva si y solo si ${}_B(T)_B$ es invertible y en este caso ${}_B(T^{-1})_B = {}_B(T)_B^{-1}$.

Cuando trabajamos con ***operadores lineales*** (esto es transformaciones lineales de un espacio V en sí mismo), es útil tomar matrices asociadas en una única base B evitando así las complicaciones que surgen de tomar dos bases distintas B y B'.

Las ventajas de esta idea se ven claramente en el siguiente hecho; si consideramos la transformación lineal identidad $Id : V \to V$ y B una base cualquiera de V, se tiene que ${}_B(Id)_B$ es la matriz identidad. En cambio, si tomamos dos bases distintas B y B', ${}_{B'}(Id)_B$ será simplemente una matriz invertible.

Si restringimos nuestra atención a los operadores lineales, para cada $T : V \to V$, su matriz asociada dependerá de la base elegida. Esta falta de unicidad no genera mayores inconvenientes gracias al siguiente teorema: si $T : V \to V$ es un operador lineal y B y B' son bases de V, entonces ${}_B(T)_B$ y ${}_{B'}(T)_{B'}$ son semejantes; esto es existe una matriz invertible P tal que ${}_{B'}(T)_{B'} = P^{-1}{}_B(T)_B P$. En realidad, podemos tomar $P = {}_B(Id)_{B'}$. El recíproco es también cierto, si dos matrices cuadradas C y D de n filas y n columnas son semejantes y V es un K-e.v. de dimensión n, existe un operador lineal $T : V \to V$ y dos bases B y B' de V tales que $C = {}_B(T)_B$ y $D = {}_{B'}(T)_{B'}$. Esto nos da un cierto control de la situación, dado que dos matrices semejantes tienen la misma traza, el mismo determinante y el mismo polinomio característico. Estas características comunes, nos permiten obtener datos del operador lineal a partir de cualquiera de estas matrices asociadas. No obstante, cabe aclarar que dos matrices que tengan la misma traza, el mismo determinante y el mismo polinomio característico, no necesariamente son semejantes.

Como ya hemos dichos las transformaciones lineales son de gran utilidad tanto en el contexto de la matemática como en aplicaciones a otras ciencias. En este trabajo analizaremos brevemente su utilización para la clasificación de isometrías en la geometría euclidiana.

Consideraremos aquí operadores lineales en $\mathbb{R}^n$ porque si bien es posible trabajar en un contexto más general, nuestro interés es la geometría euclidiana; esto es los casos, $n = 2$ y $n = 3$ que identificamos con el plano y el espacio euclidiano respectivamente. Como es sabido las isometrías son en el contexto de la geometría euclidiana plana funciones biyectivas del plano en el plano que conservan distancias. Para llevar esta noción a $\mathbb{R}^n$ recordemos como se definen el producto escalar, la norma y la distancia en dicho contexto.

El ***producto escalar*** de dos vectores $u = (x_1,\ldots,x_n)$ y $v = (y_1,\ldots,y_n)$ en $\mathbb{R}^n$, se define como $\langle u,v\rangle = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n$. La ***norma*** de un vector $u = (x_1,\ldots,x_n)$ es el número real $\|u\| = \sqrt{\langle u,u\rangle} = \sqrt{x_1^{\,2} + \cdots + x_n^{\,2}}$. Por último, definimos la ***distancia*** entre $(x_1,\ldots,x_n)$ y $(y_1,\ldots,y_n)$ por $d\big((x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n)\big) = \|(x_1,\ldots,x_n) - (y_1,\ldots,y_n)\|$. Obsérvese que en la definición de distancia hemos optado por no nombrar las *n*-uplas como *u* y *v* como si lo hicimos en la definición de producto escalar. El motivo es que cuando trabajamos en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ las n-uplas (pares ordenados o ternas) representan tanto puntos como vectores (entendiendo que asumimos la definición geométrica de vectores como clases de equivalencia y que identificamos con ternas introduciendo un sistema de ejes). Esta desprolijidad no acarrea mayores consecuencias al menos para nuestro propósito, aunque es posible realizar un enfoque más riguroso mediante el estudio de los llamados espacios afines, como se puede ver en el texto de A. Martins (Martins, 1969).

Cabe destacar además que en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ se puede probar que el ángulo θ entre dos vectores *u* y *v* (es decir el ángulo entre dos segmentos orientados representantes de dichas clases de equivalencia) verifica la igualdad $\cos\theta = \dfrac{\langle u,v\rangle}{\|u\|\|v\|}$.

Estamos entonces en condiciones de definir aquellos operadores lineales que representan isometrías a los que llamamos isometrías vectoriales. Decimos que una ***isometría vectorial*** es un operador lineal $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ que conserva el producto escalar; esto es que para todo par de vectores *u* y *v* de $\mathbb{R}^n$, se tiene $\langle T(u),T(v)\rangle = \langle u,v\rangle$. Sería más natural quizá definir isometría vectorial diciendo que conserva distancias pero para transformaciones lineales es sencillo probar que conservar distancias, conservar el producto escalar y conservar la norma son afirmaciones equivalentes. Las isometrías vectoriales en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ no nos permiten describir todas las isometrías del plano y el espacio que conocemos de la geometría euclidiana clásica. La utilización de operadores lineales nos impone una restricción, pues en toda transformación lineal la imagen del vector nulo del dominio es el vector nulo del codominio. En nuestro contexto, las isometrías vectoriales nos permitirán estudiar solamente aquellas isometrías que dejan fijo al origen de coordenadas. Esto se puede subsanar introduciendo las traslaciones dado que toda isometría del plano o el espacio euclidiano se escribe como composición de una isometría que deja fijo al origen de coordenadas con una traslación.

En este trabajo nos limitaremos a esbozar el estudio de las isometrías vectoriales de $\mathbb{R}^2$. Para lograrlo identificaremos a las matrices asociadas a dichas isometrías en bases convenientemente elegidas. Comencemos por tomar en $\mathbb{R}^2$, una base ***ortonormal***; esto es una base $B=\{u_1,u_2\}$ tal que $\langle u_1,u_2\rangle=0$ y $\|u_1\|=\|u_2\|=1$. La primera condición se puede expresar en términos geométricos diciendo que u_1 y u_2 son ortogonales.

Un ejemplo clásico de este tipo de base es $C=\{(1,0),(0,1)\}$ denominada base canónica. Estas bases tienen la siguiente propiedad: si en una base ortonormal B se tiene que $(a,b)=coord_B(u)$ y $(c,d)=coord_B(v)$, entonces $\langle u,v\rangle=ac+bd$.

Dada entonces una base ortonormal B de $\mathbb{R}^2$ y una isometría vectorial $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, tenemos que el conjunto $T(B)=\{T(u_1),T(u_2)\}$ es también una base ortonormal de $\mathbb{R}^2$ pues T es biyectiva y conserva el producto escalar y la norma. Además si escribimos ${}_B(T)_B=\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$, se tiene $\langle T(u_1),T(u_2)\rangle=\langle u_1,u_2\rangle=0$.

Pero $T(u_1)=au_1+bu_2$ y $T(u_2)=cu_1+du_2$.

Entonces $\langle T(u_1),T(u_2)\rangle=\langle au_1+bu_2,cu_1+du_2\rangle=ac+bd$. Por lo tanto $ac+bd=0$. Utilizando que T conserva la norma obtenemos que $a^2+b^2=1$ y que $c^2+d^2=1$. De estas tres condiciones se deduce que la matriz ${}_B(T)_B$ tiene dos formas posibles: ${}_B(T)_B=\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ o ${}_B(T)_B=\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$ en ambos casos con $a^2+b^2=1$.

En el primer caso ${}_B(T)_B=\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, T es una rotación con centro en el origen y ángulo θ antihorario con $\cos\theta=a$ lo cual se comprueba verificando que el ángulo entre un vector u y su correspondiente $T(u)$ es θ, cualquiera sea u. Veamos, si notamos con φ al ángulo entre u y $T(u)$ y ponemos $(x,y)=coord_B(u)$, se tiene $\cos\varphi=\dfrac{\langle u,T(u)\rangle}{\|u\|\|T(u)\|}=\dfrac{x(ax-by)+y(bx+ay)}{\|u\|^2}=\dfrac{a(x^2+y^2)}{x^2+y^2}=\mathrm{a}=\cos\theta$. Asumiendo que tomamos los ángulos entre vectores en el intervalo $[0,\pi]$, concluimos que $\varphi=\theta$ y el ángulo entre u y $T(u)$ no depende de u con lo que concluimos que T es una rotación con centro en el origen y ángulo θ antihorario como afirmamos.

En el segundo caso ${}_B(T)_B = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$, se puede probar que T es una simetría axial cuyo eje se halla buscando sus puntos fijos, es decir los pares (x,y), que verifican que $T(x,y)=(x,y)$.

2. Aspectos didácticos

El estudio de las transformaciones lineales es de fundamental importancia en la Formación de Profesores.

Estas transformaciones proporcionan al estudiante el primer ejemplo de funciones de varias variables que se le presenta en su carrera como estudiante de profesorado y muy probablemente el primero en su vida de estudiante. Son además de gran importancia en el estudio de diferenciabilidad que se realiza habitualmente en el curso de Análisis 2.

Son relevantes también por su vinculación con las isometrías del plano y del espacio descriptas en la sección anterior de este trabajo, permitiendo un estudio de dichas transformaciones que lejos de sustituir al enfoque sintético trabajado en el primer curso de Geometría de los cursos de profesorado, lo complementa. Esto muestra cómo distintos abordajes de un mismo tema son posibles y enriquecen los conceptos trabajados. Estimula además al estudiante a comparar las ventajas y desventajas de cada uno de los enfoques, idea que indudablemente lo potenciará como docente.

Por último, diremos que el conocimiento de la importancia de sus aplicaciones en tecnología, aportan al futuro docente una visión y una capacidad de comprensión del mundo actual muy valiosa para el ejercicio de la docencia.

Pasemos ahora a analizar posibles estrategias para introducir el tema en clase. A grandes rasgos se podría decir, que para introducir transformaciones lineales, los abordajes posibles se dividen en dos tipos: los analíticos y los geométricos.

Uicab y Oktaç (2006) señalan que en un abordaje analítico suele presentarse a los vectores como coordenadas (usualmente pares ordenados en $\mathbb{R}^2$ o ternas ordenadas en $\mathbb{R}^3$) y a las transformaciones lineales como matrices o funciones que preservan la suma y el producto por un escalar. Posteriormente se establece el vínculo con la geometría analítica.

Por otra parte, en un abordaje geométrico se pueden presentar en forma casi simultánea las transformaciones lineales y las no lineales. Por ejemplo, utilizando las isometrías que usualmente son ya conocidas por los estudiantes se pueden introducir isometrías vectoriales e isometrías afines (como ser traslaciones) para ilustrar las transformaciones lineales y las transformaciones afines lo que es particularmente útil si se quiere realizar un estudio detallado de las isometrías del plano y del espacio con las herramientas del álgebra lineal. Este tipo de enfoque permite además una aproximación a las propiedades geométricas de estas transformaciones que muchas veces pasan desapercibidas en un abordaje analítico. (Uicab y Oktaç, 2006)

En el presente trabajo optaremos por un enfoque geométrico y haremos un esbozo del mismo. Asumimos que los estudiantes conocen de cursos anteriores los conceptos de isometrías y semejanzas en el plano y manejan algunas herramientas básicas de geometría analítica clásica.

Comencemos por presentar a los estudiantes la siguiente actividad: Consideramos en el plano euclidiano en el que asumimos dado un sistema de ejes cartesianos ortogonales, la recta *r* cuya ecuación es $y = 2x$ y el punto *P* de coordenadas (a,b). Hallar las coordenadas del punto P', simétrico de *P* respecto de la recta *r*.

La elección de esta actividad para comenzar no es caprichosa. En primer lugar, es posible que algunos estudiantes asocien el término transformación con las transformaciones geométricas del plano. Algunos autores afirman que esto sucede incluso con estudiantes que ya han pasado por cursos de Álgebra lineal (Molina y Oktaç, 2007). Por tal motivo esta forma de comenzar intenta hacer uso de esta ventaja enfrentándose luego a la labor de buscar estrategias para que el alumno construya un concepto de transformación lineal que involucre tanto las ideas geométricas como las algebraicas.

A partir de la mencionada actividad, no es difícil hacer reflexionar a los estudiantes para que descubran que poco cambia si se sustituye el coeficiente angular 2 de la recta *r* por cualquier otro y que la conclusión se puede enunciar diciendo que las coordenadas del correspondiente de un punto *P* en una simetría axial cuyo eje pasa por el origen, son combinación lineal de las coordenadas de *P*.

Surge naturalmente la pregunta acerca de que sucede si se toma como eje de simetría una recta que no pasa por el origen. La respuesta puede aparecer a los ojos de los alumnos si se les pide analizar un ejemplo de este caso.

Recurriendo al conocimiento de los estudiantes sobre funciones lineales en la recta real (entendiendo por estas a las de la forma $f(x) = ax$) y funciones afines (es decir de la forma $f(x) = ax + b$) y haciendo notar la analogía con los presentes ejemplos, se puede decir en forma natural que las simetrías axiales cuyo eje pasa por el origen son “funciones (o transformaciones) lineales” mientras que aquellas para las cuales el eje no pasa por el origen son “funciones (o transformaciones) afines”.

Describiremos entonces las transformaciones lineales como aquellas funciones de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ (o más en general de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$) para las cuales las coordenadas de la imagen de (x,y), son combinaciones lineales de *x* e *y*.

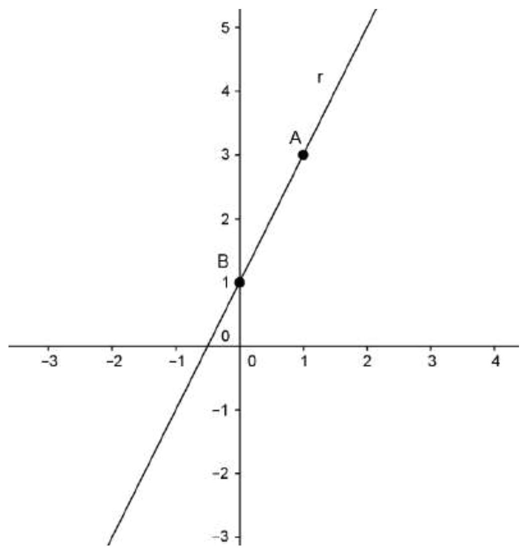
Un trabajo técnico sencillo permitirá mostrar que esta descripción de las transformaciones lineales es equivalente a la definición (*) que preferimos institucionalizar como definición en la clase. Dicho trabajo técnico hará uso de la descomposición de un vector como combinación lineal de los vectores de la base canónica. Si el concepto de base ya fue introducido en el curso, esto permite concluir rápidamente que una transformación lineal queda determinada conociendo los correspondientes de los vectores de una base. Si por el contrario se ha decidido otro orden de los temas del curso, como ser introducir transformaciones lineales de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ para recién después introducir la estructura de espacio vectorial y luego generalizar estas a espacios vectoriales, se podrá trabajar con el caso particular de $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, para que el estudiante visualice el significado geométrico de la descomposición $(x,y) = x(1,0) + y(0,1)$.

El próximo paso será proponer a los estudiantes actividades en las que aparezcan transformaciones lineales que no son isometrías, para subrayar la idea de que transformación lineal e isometría no solo no son la misma cosa, sino que ninguno de estos conceptos engloba al otro. Por ejemplo, pedirles a los estudiantes que investiguen si el operador lineal $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definido por $T(x,y)=(2x-3y,4x+y)$ es una isometría. Seguramente estos corroborarán rápidamente que no lo es e intentarán describir geométricamente el comportamiento de *T*. La puesta en común de esta actividad nos permitirá hacer hincapié en la importancia de estudiar las transformaciones lineales desde un punto de vista algebraico, idea que se puede reforzar proponiendo ejemplos de transformaciones lineales de dominio y codominio distinto (por ejemplo de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^2$ o de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^4$) donde la interpretación geométrica resulte difícil o imposible.

A continuación, sugerimos dirigir el trabajo hacia la obtención de algunas ideas que enriquezcan el concepto de transformación lineal del punto de vista geométrico. Para ello se propone a los estudiantes las siguientes dos actividades:

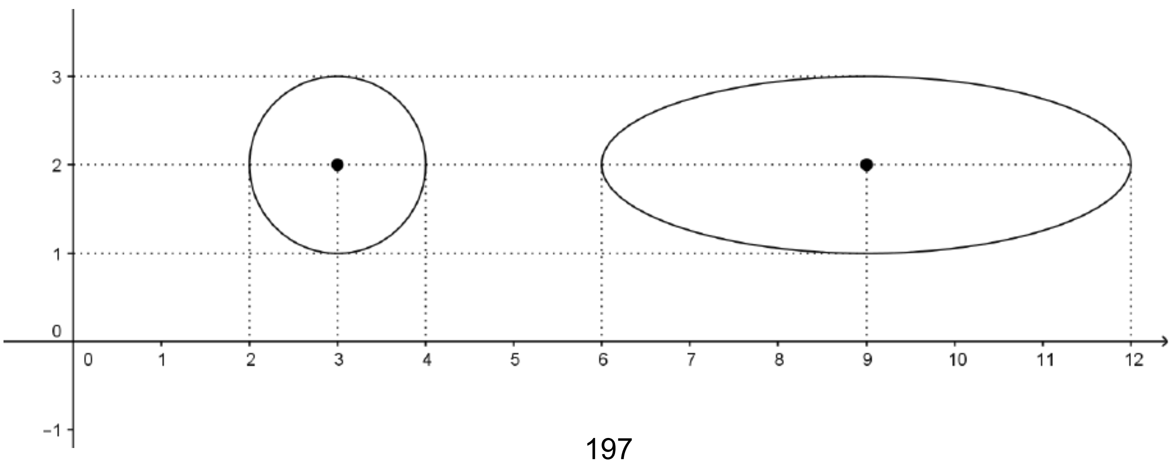
1) Dada la recta *r* determinada por los puntos $A(1,3)$ y $B(0,1)$, hallar su imagen por la transformación lineal $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x,y)=(2x-3y,4x+y)$.

   Esta tarea presenta a los estudiantes un desafío interesante. Es probable que muchos de ellos, hallen las imágenes de los puntos *A* y *B* y aseguren que la recta determinada por dichas imágenes es la imagen de la recta *AB*.



En este caso, el docente deberá guiar mediante preguntas adecuadas a la reflexión acerca de la utilización tácita del hecho de que la imagen de una recta, es una recta. Una vez que la clase establezca que esta afirmación podría no ser cierta, se podrá sugerir la obtención de las coordenadas de otros puntos de *r* para hallar sus imágenes e investigar si la deseada alineación se produce.

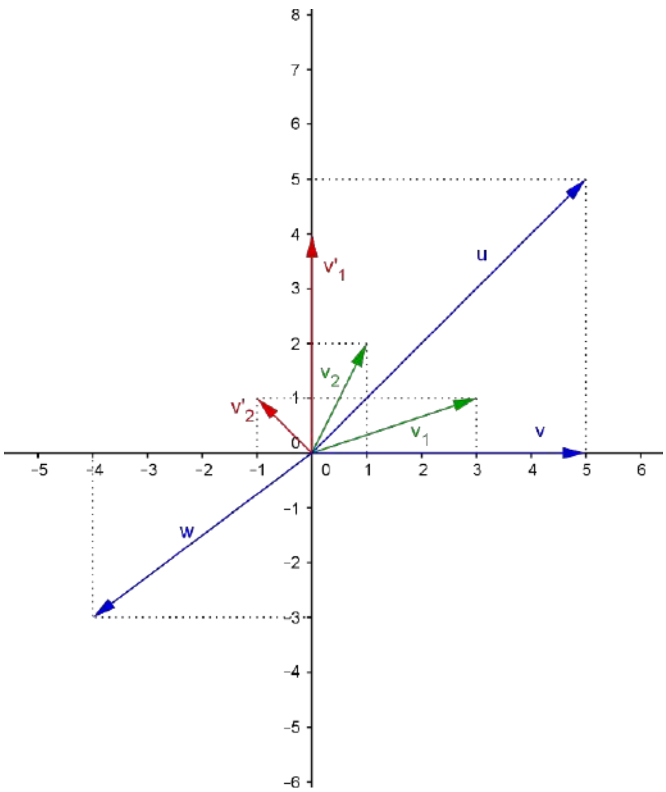
2) Dada la siguiente figura, ¿existe una transformación lineal que lleve la circunferencia en la elipse?



Esta actividad quizá suponga un reto para algunos estudiantes pues deberán imaginar como la transformación actúa distintamente sobre ambas coordenadas. Sin embargo, es posible que los estudiantes con mayor intuición geométrica lo resuelvan con cierta rapidez. En todo caso, igualmente será de utilidad introducir este tipo de transformaciones que se pueden utilizar más adelante para estudiar las propiedades métricas de las cónicas. Por otra parte, que el estudiante observe que el interior de la circunferencia tiene por imagen el interior de la elipse y propiedades similares, ayudará a completar la visión geométrica de las transformaciones lineales.

Finalmente, podemos intentar fortalecer la idea de definir una transformación lineal a partir de los correspondientes de los vectores de una base; idea que ya asomó cuando trabajamos en procura de establecer una definición. Para ello se puede plantear la siguiente actividad.

Dada la siguiente figura, se sabe que el operador lineal $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lleva v_1 en v_1' y v_2 en v_2'. Hallar $T(u)$, $T(v)$ y $T(w)$.



Si ya se ha trabajado en el curso con el concepto de base, es de esperar que los estudiantes logren escribir u, v y w como combinación lineal de v_1 y v_2 mediante trazados y eventualmente algo de geometría analítica. A partir de allí, usando la linealidad de T, se espera que obtengan las imágenes pedidas. Si se cuenta con la ayuda de un programa informático, como ser el GeoGebra se puede ahorrar tiempo en el trazado y en la operatoria y hacer hincapié en la idea de hallar la imagen de cualquier vector a partir de las imágenes de los vectores de una base. Si en cambio, el concepto de base no ha sido aún tratado en el curso, esta actividad podrá ser pospuesta y proponerse en el momento indicado.

Hasta aquí el esbozo de cómo introducir el tema, aunque naturalmente se deberá seguir trabajando sobre este en relación con los demás contenidos del curso.

A la hora de evaluar el aprendizaje del concepto de transformación lineal, se pueden proponer varios tipos de problemas y ejercicios. Naturalmente se puede presentar una evaluación de tipo continua durante el desarrollo de la unidad que permita ir reforzando los puntos débiles y corrigiendo aquellos problemas que se detecten en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Tres tipos de actividades que deben ser incluidos en la evaluación son los siguientes: actividades que busquen la interpretación geométrica de aquellos operadores lineales en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ que son isometrías o semejanzas vectoriales; actividades que requieran el manejo

de la definición para hacer hincapié en que las transformaciones lineales conservan la suma y el producto por un escalar; actividades que involucren la indagación de la existencia o no de un operador lineal dados algunos vectores y sus correspondientes.
La presentación de la evaluación puede ser escrita u oral, individual o colectiva y el docente debe manejar estas modalidades con flexibilidad adaptándose a los tiempos del curso y al grupo.
Para el primer tipo de actividades se pueden plantear ejercicios como el que mostramos a continuación a modo de ejemplo.
Dadas las siguientes funciones

a) $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x,y)=(y,-x)$;

b) $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x,y)=(x+a,y+b)$;

c) $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(x,y,z)=(z,y,x)$.

i) Indicar si son transformaciones lineales.
ii) Dibujar cuatro puntos del plano en a) y b) y del espacio en c) y sus imágenes.
iii) ¿Es posible reconocer geométricamente las funciones?

Para este ejercicio se espera que los estudiantes identifiquen rápidamente que a) y c) son transformaciones lineales y b) no lo es recurriendo a la descripción dada previamente a la definición (las entradas de $T(x,y)$ (o $T(x,y,z)$) son combinaciones lineales de *x* e *y* (o *x*, *y* y *z*)). En cuanto a la parte ii) es conveniente que los estudiantes cuenten con una computadora con GeoGebra o un programa similar que les permite realizar los dibujos con facilidad. De no ser así podría ser conveniente suprimir la parte c). Aquí se espera que mediante la observación, los alumnos puedan reconocer las isometrías en el plano que seguramente las manejen de los cursos anteriores y responder la pregunta de la parte iii). Para el caso de c) se pretende que intuyan el resultado (que posiblemente no conozcan de antemano). En todo caso, esto permitirá ir visualizando las isometrías vectoriales de $\mathbb{R}^3$ y reconocer la traslación, que aunque quizá introducida antes, es el ejemplo más claro de isometría del plano que no es isometría vectorial y que nos llevará al estudio de isometrías afines.
Para el segundo tipo de actividades, es conveniente que se presenten ejercicios en los que las transformaciones lineales involucren espacios vectoriales distintos de $\mathbb{R}^n$. Un ejemplo podría ser el siguiente:
Investigar si las funciones que se indican son transformaciones lineales.

a) $T:P_n \to P_{2n}$ definida por $T(p)=p.q$; donde $q \in P_n$ es un polinomio fijo;

b) $T:P_n \to P_n$ definida por $T(p)=p+q$; donde $q \in P_n$ es un polinomio fijo;

c) $T:M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ definida por $T(A)=A^t$;

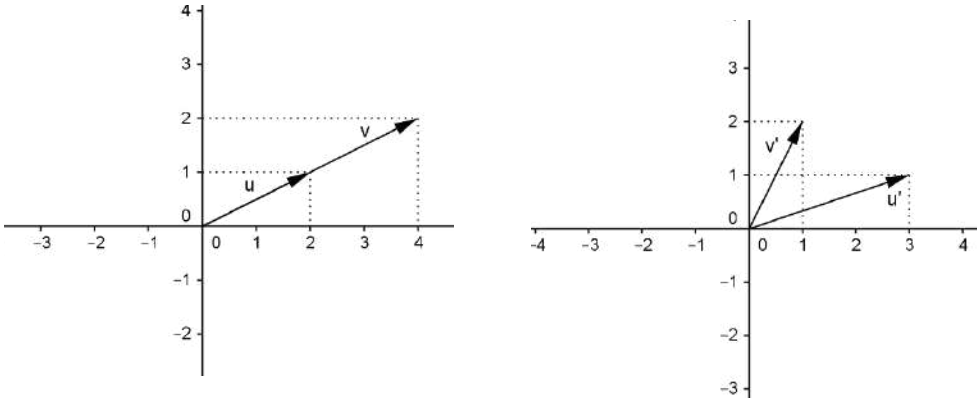
d) $T:M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definida por $T(A)=tr(A)$;

e) $T:P_2 \to \mathbb{R}^4$ definida por $T(aX^2+bX+c)=(2a+3b-8c,a+b+c,4a-5c,6b)$.

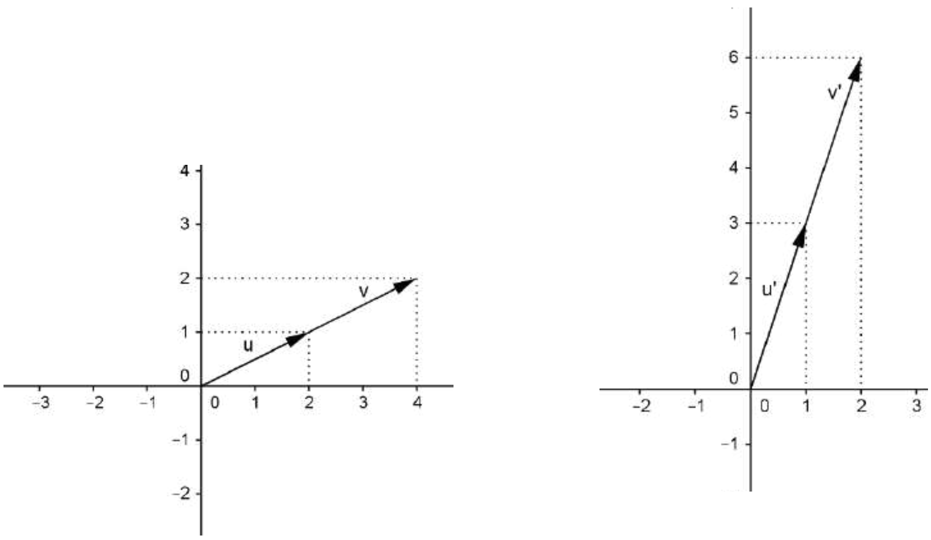
En este ejercicio de estilo clásico se dan por conocidas las notaciones usuales para el espacio de los polinomios de grado menor o igual que *n* (P_n) y el espacio de las matrices de $n \times n$ ($M_n(\mathbb{R})$). Como ya se ha dicho, aquí se pretende evaluar si el estudiante maneja con

solvencia la definición de transformación lineal y reforzar la idea de que las transformaciones lineales conservan la suma y el producto por un escalar. De este modo estaremos cubriendo el aspecto algebraico del concepto de transformación lineal mientras que en el primer ejercicio cubríamos el aspecto geométrico.
Finalmente, el tercer tipo de actividades puede incluir problemas como los siguientes:
En cada uno de los siguientes casos indicar si existe una transformación lineal que lleve los vectores de la figura de la izquierda en los vectores de la figura de la derecha.

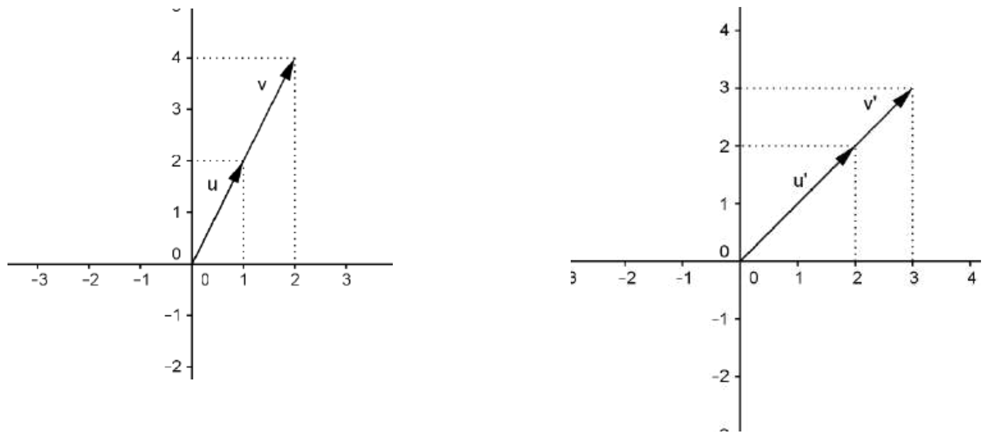
a)



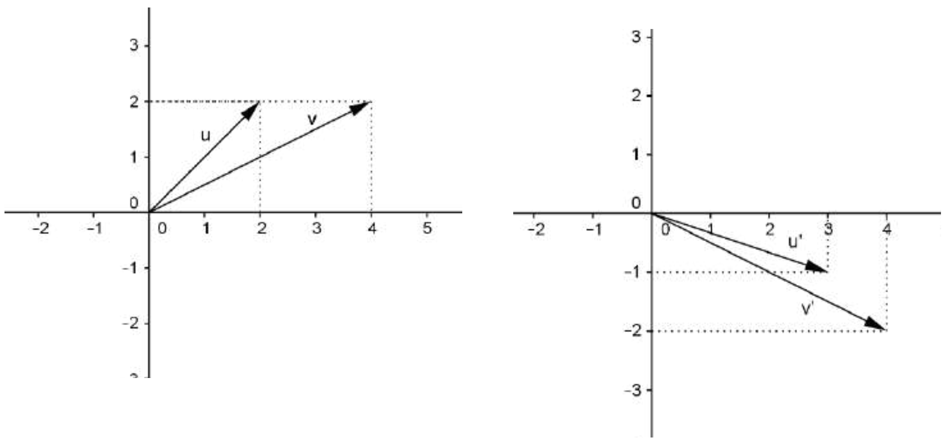
b)



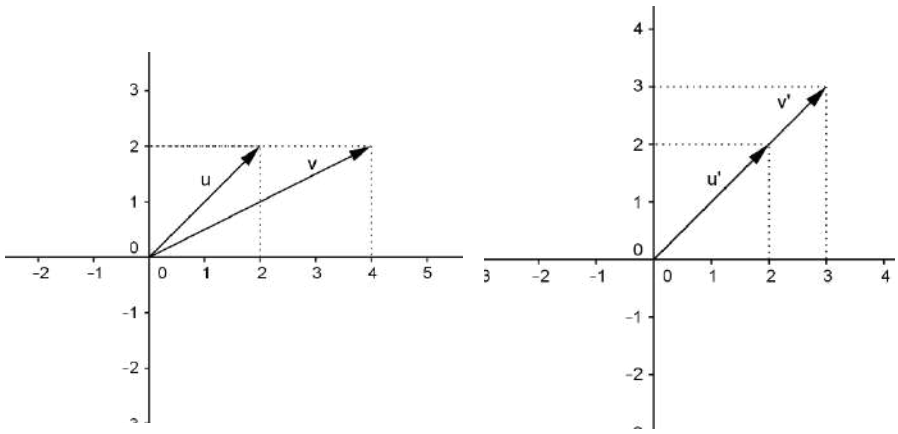
c)



d)



e)



Con este tipo de problemas se pueden evaluar distintos aspectos del aprendizaje. La idea de que si T es transformación lineal, $T(\lambda u) = \lambda . T(u)$, para todo escalar λ y para todo vector u aparece en las partes a), b) y c). Pero también aquí se visualiza su lectura geométrica; vectores colineales se transforman en vectores colineales y se conservan las proporciones entre ellos. Las partes d) y e) en cambio apuntan a que una transformación lineal queda determinada conociendo las imágenes de los vectores de una base. Se persigue de este modo integrar desde el comienzo del estudio de las transformaciones lineales los aspectos geométricos y los algebraicos.

3. Proyección en líneas de investigación

Diversas investigaciones se han realizado en las últimas dos décadas sobre la enseñanza del álgebra lineal y en particular de las transformaciones lineales. En un trabajo del año 2006 R. Uicab y A. Oktaç investigaron la presencia de un pensamiento sistémico de los alumnos para resolver el problema de extensión lineal. A través de este problema los autores analizan la forma en que los estudiantes relacionan los diferentes conceptos del álgebra lineal (Uicab y Oktaç, 2006).

En 2007 J. Molina y A. Oktaç realizaron un trabajo en que se propusieron identificar modelos intuitivos presentes en algunos estudiantes con respecto a una transformación lineal en un contexto geométrico (Molina y Oktaç, 2007).

En el año 2016 C. Romero, en su tesis de doctorado investiga las dificultades que presenta la construcción del concepto de transformación lineal en un ambiente dinámico. En este trabajo se utilizan las representaciones gráficas para establecer relaciones entre las propiedades de las transformaciones lineales vistas de forma gráfica y vistas algebraicamente (Romero, 2016). Otros aspectos de la enseñanza del concepto de transformación lineal son investigados en (González y Roa 2017) y (Roa y Oktaç, 2010).
La dificultad de conectar las ideas geométricas con las algebraicas presentes en el concepto de transformación lineal es una constante que aparece en los trabajos de diversos autores. La experiencia de clase demuestra también que dicha dificultad permanece cuando se avanza en el estudio de las transformaciones lineales. Un claro ejemplo de esto es el concepto de subespacio invariante. Muchos estudiantes parecen comprender la idea geométrica cuando se lo ejemplifica en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ pero muestran dificultades cuando se les pide probar con lenguaje formal algebraico que un subespacio es invariante por una transformación lineal. Incluso cuando logran comprender formalmente este tipo de demostración parecen no lograr establecer un vínculo con los conceptos geométricos.
Una línea de investigación interesante sería sin duda la construcción del concepto de subespacio invariante. Indagar en la interacción de las ideas geométricas y las algebraicas involucradas en dicho concepto puede contribuir además, a mejorar notablemente la comprensión de las ideas de diagonalización de transformaciones lineales y el estudio de las isometrías vectoriales.

Bibliografía

Brown, W. C. (1988). *A second course in linear algebra*. Michigan. John Wiley & sons.

González Rojas D.E., & Roa Fuentes, S. (2017). Un esquema de transformación lineal: construcción de objetos abstractos a partir de la interiorización de acciones concretas. *Enseñanza de las ciencias*, *35*(2), 89-107.

Halmos, P.R. (1965). *Espacios vectoriales finito-dimensionales*. México D.F. Compañía Editorial Continental S.A.

Hernández, E. (1994). *Álgebra y geometría*. Madrid. Addison Wesley / U.A. de Madrid.

Martins Rodrigues, A.A. (1969). *Álgebra linear e geometria euclidiana*. Washington D.C. Departamento de Assuntos Científicos. União Pan-Americana, Secretaría Geral. O.E.A. Serie de matemática. Monografía número 6.

Molina, J.G., & Oktaç, A. (2007). Concepciones de la transformación lineal en contexto geométrico. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *10*(2), 241-273.

Roa Fuentes, S., & Oktaç, A. (2010). Construcción de una descomposición genética: análisis teórico del concepto de transformación lineal. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *13*(1), 89-112.

Romero, C. (2016). *Aprendizaje de las transformaciones lineales mediante la coordinación de representaciones estáticas y dinámicas*. (Tesis de doctorado). Centro de investigación y de estudios avanzados. Unidad Zacatenco. Departamento de Matemática Educativa. México. Recuperado de https://www.researchgate.net./publication/309127000.

Uicab, R. & Oktaç, A. (2006). Transformaciones lineales en un ambiente de geometría dinámica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *9*(3), 459-490.

Ulhoa Cohelo, F., & Lourenço, M.L. (2001). *Um curso de álgebra linear*. San Pablo. Editora da Universidade de São Paulo.

Análisis en la Formación de Docentes

Funciones Continuas

Guillermo Barcelona

Aspectos disciplinarios: conceptos o ideas involucrados en el tema, fundamentación epistemológica de su relevancia disciplinaria

¿Por qué es fundamental saber de funciones continuas?

En topología, la importancia de las funciones continuas se justifica ya desde el comienzo: su objeto de estudio son aquellas propiedades que permanecen invariantes bajo aplicaciones continuas (Courant y Robbins, 1941). Una variante muy particular de las funciones continuas son los *homeomorfismos* (funciones continuas y biyectivas, con inversas continuas). Una *propiedad topológica* es aquella que se preserva precisamente bajo homeomorfismos. Algunas de ellas son:

- Conexión;
- Compacidad;
- Condición de Lindelöf;
- Axioma T_0 (Kolmogorov);
- Axioma T_1 (Fréchet);
- Axioma T_2 (Hausdorff);
- Normalidad;
- Separabilidad;
- Primer axioma de numerabilidad;
- Segundo axioma de numerabilidad;
- Compacidad con sucesiones;
- Metrizabilidad.

La definición de función continua entre dos espacios topológicos es la siguiente:

Definición: sean X e Y espacios topológicos. Decimos que una función $f: X \to Y$ es continua si, para cada abierto V del espacio Y, su preimagen $f^{-1}(V)$ es abierta en el espacio X.

Conceptos involucrados en el tema

Para la teoría de las *funciones continuas* en topología son necesarios otros conceptos tales como el de:

- Espacio topológico;
- Funciones (definición, tipos, operaciones, imágenes y preimágenes, propiedades);
- Conjunto cerrado;
- Base de un espacio topológico.
- Clausura de un conjunto.

Las aplicaciones de las funciones continuas son muchas. Si bien existe un núcleo de teoremas que son imprescindibles, las funciones continuas se trabajan durante todo un curso de topología. Los teoremas fundamentales de la continuidad son los siguientes:

Teorema 18.1. Sean X e Y espacios topológicos; sea $f: X \to Y$. Entonces son equivalentes:

1) f es continua;

2) Para cada subconjunto A de X, se tiene que $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$;

3) Para cada conjunto cerrado B de Y, el conjunto $f^{-1}(B)$ es cerrado en X;

4) Para cada x de X y cada entorno V de $f(x)$, existe un entorno U de x tal que $f(U) \subset V$. (Munkres, 2000, p. 118).

Teorema: 1) Toda función constante entre dos espacios topológicos es continua.
2) La composición de funciones continuas es continua.
3) Cualquier restricción de una función continua es continua.
4) (Formulación local de continuidad) Sea $f: X \longrightarrow Y$. Si X se puede escribir como la unión de conjuntos abiertos U_α tal que $f|U_\alpha$ es continua para cada α, entonces f es continua.

Teorema (Pegamiento): Sean A y B conjuntos cerrados en un espacio X, tales que $A \cup B = X$. Sean $f: A \rightarrow Y$ y $g: B \rightarrow Y$ continuas, tales que $f(x) = g(x)$, para cada x de $A \cap B$. Entonces la función $h: X \rightarrow Y$ tal que $h(x) = f(x)$ si x está en A; y $h(x) = g(x)$, si x está en B, es continua.

"Teorema 18.4: Sean $f: A \rightarrow X \times Y$ dada por la ecuación $f(a) = (f_1(a), f_2(a))$. Entonces f es continua si, y solo si, las funciones $f_1: A \rightarrow X$ y $f_2: A \rightarrow Y$ son continuas." (Munkres, 2000, p. 124)

Vinculado particularmente con la compacidad, un importante teorema es el siguiente:
Teorema: Si X es compacto y en Y está definida la topología del orden, toda función continua $f: X \rightarrow Y$ tiene máximo y mínimo: existen a y b en X tales que $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$, para todo x de X.

Cuando el dominio y el codominio son espacios métricos, tenemos el siguiente teorema:
Teorema: sean (X, d) e (Y, d') espacios métricos. La continuidad de cualquier función $f: X \longrightarrow Y$ es equivalente al siguiente enunciado: para cada $\varepsilon > 0$ y x en X, existe $\delta > 0$ tal que si y está en X y $d(x, y) < \delta$, entonces $d'\big(f(x), f(y)\big) < \varepsilon$.

Vinculado a la convergencia uniforme, tenemos el siguiente teorema:
Teorema: Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones continuas, de un espacio X a un espacio métrico Y. Si f_n converge uniformemente a una función f de X a Y, entonces f es continua.

Además, en sus respectivos dominios, las operaciones aritméticas de $\mathbb{R}$ (suma, resta, producto, cociente) son continuas.
Es deseable que los estudiantes hayan tenido previamente cierta experiencia en el trabajo con la teoría de conjuntos (operaciones, propiedades). También es deseable que tengan una idea más o menos clara de la definición "épsilon-delta" de continuidad de las funciones reales del análisis en una variable.

A continuación, se realizará un recorrido histórico-epistemológico en relación al concepto de *función continua.*

Recorrido Histórico-Epistemológico
La antigüedad

Diversos autores como El Bouazzaoui (1988), acuerdan que el concepto de *continuidad* ha sido implementado más para resolver problemas (fundamentalmente físicos) que para racionalizar y formalizar el conocimiento matemático. La noción de continuidad apareció, contraria a nuestra tradición, más como una propiedad *global* que como una propiedad *local* de una función.
Los orígenes del concepto de *continuidad* pueden remontarse a la Grecia Antigua, en donde Zenón de Elea ya discutía la diferencia entre aquellos procesos que son "continuos" de aquellos que no lo son. Sin embargo, los griegos no sintieron una real necesidad por explorar el concepto de continuidad. En este periodo, la noción de continuidad es global e implícita.

Descartes, Fermat y Leibniz
En el siglo XVII se instaló una noción geométrico-algebraica, global y temporal de la continuidad, de la mano de los matemáticos René Descartes y Pierre de Fermat. Wilhelm Leibniz, citado por D'Álembert, afirmaba que

> (...) nada se hace saltando a la naturaleza y (...) un ser no pasa de un estado a otro, sin pasar por todos los diferentes estados que pueden concebirse entre ellos. Esta ley se deriva del estado de razón suficiente. Así, ningún ser pasa de un estado a otro, sin pasar a través de los estados intermedios. Así como uno no va de una ciudad a otra, sin atravesar el camino que hay entre dos, esta ley se observa en geometría con extrema precisión…" (D'Alembert, 1754, p. 116, citado en El Bouazzaoui, 1988, p. 73).

Continuidad y expresiones analíticas: el aporte de Euler
Otro mojón en el recorrido histórico y epistemológico de la noción de continuidad, es la obra de Leonhard Euler de mediados del siglo XVIII, en donde afirma que una *función continua* es aquella cuyos valores están todos vinculados por una misma ley o dependen de una misma expresión analítica. Sin embargo, en el contexto de las expresiones analíticas de Euler, no se incluyen aquellas cuyas gráficas no son diferenciables en algún punto de su dominio. Por lo tanto, lo que para Euler era una *función continua*, para nosotros es una *función diferenciable*. Para Euler, el asunto era aún más radical: solo las funciones "continuas" eran consideradas funciones como tales; las demás no ganaban su interés.

De lo global y geométrico a lo local y aritmético: Bolzano y Cauchy
En 1817 Bernard Bolzano formula una definición diferente a las de sus antecesores:

> Decir que una función real f de la variable real x es continua, para todos los valores de x que pertenecen a un intervalo dado, no significa nada más que esto: si x es un valor tan arbitrario, la diferencia $f(x-w)-f(x)$ se puede hacer más pequeño que cualquier tamaño dado, por lo que siempre puedes tomar w tan pequeño como se quiera. (Dugac, 1981, p.16, citado en El Bouazzaoui, 1988, p. 84).

La noción de continuidad de Cauchy, publicada en su *"Cours d'Analyse de l'École Royale Polytechnique; I.re Partie. Analyse algébrique"* de 1821, establecía lo siguiente:

> Sea $f(x)$ una función de la variable x, y suponga que para cada valor de x intermedio entre dos límites dados, esta función tiene constantemente un valor único y finito. Si, a partir de una variable x entre estos límites, atribuimos a la

variable x un incremento infinitamente pequeño α, la función en sí misma tendrá una variación $f(x+\alpha)-f(x)$, que dependerá al mismo tiempo de la nueva variable α y del valor de x. Dado esto, la función $f(x)$ será, entre los dos límites asignados a la variable x, la función continua de esta variable, si, para cada valor de x intermedio entre estos límites, el valor numérico de la diferencia $f(x+\alpha)-f(x)$ disminuye indefinidamente con la variable α. En otras palabras, la función $f(x)$ permanece continua con respecto a los límites dados, si, entre estos límites, un aumento infinitamente pequeño de una variable siempre produce un incremento infinitamente pequeño en la propia función. Nuevamente, decimos que la función $f(x)$ es, en la vecindad de un valor particular asignado a la variable x, una función continua de esta variable, siempre que sea continua entre los dos límites de x, incluso muy cerca uno del otro, que encierra el valor en cuestión. (Cauchy, 1821, p. 34, citado en El Bouazzaou, 1988, p. 86).

Epistemológicamente, estas dos nociones de continuidad son aritméticas y locales, y tienen un estatus de conocimiento matemático para la época. Pero vale la pena aclarar que tanto para Bolzano como para Cauchy, la noción de continuidad se aplica a funciones que tengan una determinada expresión analítica.

El análisis se vuelve aún más aritmético: Weierstrass y Darboux

Karl Weierstrass define la continuidad como sigue:

> Se dice que una función $f(x)$ es continua para un valor medio específico $x=X$, si para cualquier cantidad ε dada y lo más pequeña que queramos, hay otro número positivo η_0 tal que para cualquier magnitud positiva η que es más pequeña que η_0, el valor numérico de $f(X\pm\eta)-f(X)$ no excede de ε. (Boyer, 1959, p. 287, citado en El Bouazzaou, 1988, p. 91).

Lo extraordinariamente novedoso de la definición de Weierstrass es el uso de *cuantificadores* que se hace por primera vez en una definición de continuidad ("cualquier" y "hay"). Weierstrass utiliza esta definición para demostrar que cualquier función real y continua puede representarse mediante una serie de polinomios convergentes.

En 1875, Darboux define la continuidad puntual de la siguiente manera:

> Una función $f(x)$ se llama continua, para el valor $x=x_0$, cuando podemos tomar h lo suficientemente pequeño para que tengamos $f(x_0\pm\theta h)-f(x_0)<\varepsilon$ en valor absoluto, θ puede tomar todos los valores positivos menores que 1 y ε siendo tan pequeños como queramos." (Monna, 1972, p. 64, citado en El Bouazzaou, 1988, p. 94)

Una *función continua en un intervalo cerrado* era, para Darboux, lo siguiente:

> Se dice que una función es continua en un intervalo $(\mathrm{x}_0,\mathrm{x}_1)$, donde $\mathrm{x}_0<\mathrm{x}_1$, cuando es continuo para todos los valores de x entre x_0 y x_1, y además $\lim \mathrm{f}(\mathrm{x}_0+\mathrm{h})=\mathrm{f}(\mathrm{x}_0)$ y $\lim \mathrm{f}(\mathrm{x}_1-\mathrm{h})=\mathrm{f}(\mathrm{x}_1)$, cuando h tiende a cero por valores positivos. Estas últimas condiciones se cumplen si la función es continua para los valores x_0, x_1 de x." (Monna, 1972, p.65, citado en el El Bouazzaou, 1988, p. 94).

Aquí, las nociones de continuidad son aritméticas y locales, pero a diferencia del enfoque de Bolzano-Cauchy, estas definiciones se pueden aplicar a funciones arbitrarias.

La consolidación con la topología: Hausdorff y Fréchet

Félix Hausdorff fue uno de los primeros matemáticos en extender y formalizar varias nociones topológicas (*punto de adherencia, conjunto abierto, conjunto cerrado, espacio conexo, espacio compacto,* etcétera). Mediante la noción de entorno, propuso la siguiente definición de continuidad en 1914, en su obra *"Grundzuge der Mengenlehre"*:

Si X e Y son espacios topológicos, una función $f: X \to Y$ se dice que es continua, si para cada $x \in X$ y cada entorno V de $f(x)$, existe un entorno U de x tal que $f(U) \subset V$.

Maurice Fréchet introduce un resultado equivalente al anterior entre espacios métricos:

Si (X, d) y (Y, d') son espacios métricos, una función $f: X \to Y$ se dice que es continua, si para cada $x \in X$ y $\varepsilon > 0$, existe un valor $\delta > 0$ tal que si $d(x, y) < \delta$, entonces $d'\big(f(x), f(y)\big) < \varepsilon$.

¿Qué conclusiones se obtienen al momento de elaborar un proyecto sobre funciones continuas para la formación de profesores?

El concepto de función continua ha tenido sus constantes reformulaciones a lo largo del tiempo. A modo de cierre de esta primera parte, creemos que no es conveniente y posible promover una enseñanza que trate de recrear, en el mejor de los casos, las condiciones históricas en la enseñanza de las funciones continuas. Sin embargo, es necesario decir que el conocimiento del desarrollo histórico es una necesidad para tener un control epistemológico de las funciones continuas al momento de experimentar nuevas formas de enseñanza. Particularmente, uno de los aspectos que decanta de este desarrollo histórico-epistemológico es que la definición topológica de continuidad consolida todo un proceso histórico de más de 2000 años.

Aspectos didácticos: relevancia del tema para la enseñanza en la formación de formadores, incluidas estrategias y evaluación

¿Por qué es relevante el tema para la formación de profesores?

Saber sobre *funciones continuas* permite fundamentalmente que los futuros formadores:

- Generalicen la noción "épsilon-delta", a un par más general de espacios topológicos.
- Comprendan la esencialidad del homeomorfismo como vía de transmisión de una determinada propiedad topológica de un espacio a otro.

La enseñanza de las funciones continuas

Como dijimos anteriormente, trabajar funciones continuas en un curso de topología requiere que el estudiante ya tenga una idea de lo que es un espacio topológico, y de que también tenga una idea de la definición "épsilon-delta" de continuidad (trabajada en cursos de análisis). Con esto último queremos hacer énfasis en que el estudiante, en un curso de topología (posterior a un curso de análisis en una variable real), ya no debería partir de las primarias nociones conceptuales mencionadas por Tall y Vinner (1981), como que una función continua es aquella cuya gráfica no tiene orificios ni saltos, o que una función continua está definida mediante una única expresión analítica. Es esperable que tenga una idea más o menos consistente de la dependencia de un entorno (el de radio delta), en relación a otro (el de radio

épsilon), que permiten la inclusión de la imagen de uno en otro. La definición a la que hacemos referencia es la siguiente:
Definición ("épsilon-delta"): Sea $f: A \to \mathbb{R}$*; sea* A *un subconjunto de* $\mathbb{R}$*, y* a *un punto de* A*. Decimos que la función* f *es continua en el punto* a *si para cada* $\varepsilon > 0$*, existe* $\delta > 0$ *tal que si* x *está en* A *y además* $|x - a| < \delta$*, entonces* $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$*.*
También puede emplearse su equivalente con entornos (bolas).

El problema inicial que se planteará será más o menos el siguiente:
¿Qué serían las funciones continuas entre dos espacios topológicos arbitrarios?
Para ello es necesario retomar la experiencia que tiene el estudiante con la definición "épsilon-delta". Pero para poder empezar a explorar una nueva definición, es necesario que el estudiante sea consciente de que las funciones continuas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ trabajadas en análisis tienen la particularidad de que están definidas entre dos espacios dotados de la topología del orden en $\mathbb{R}$ (que coincide con la topología generada por la colección de los intervalos abiertos (a, b)). Es fundamental, por lo tanto, discutir la relación que existe entre el concepto de continuidad y los espacios topológicos en los que se definen las funciones.
Una primera actividad será retomar nuevamente la definición "épsilon-delta" con los estudiantes, y analizar diferentes enunciados equivalentes a esta definición. Una de ellas podría ser la siguiente:

Actividad (profundizando en la definición "épsilon-delta" de continuidad)
Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una función real (con la definición "épsilon-delta" vista en análisis).*
a) ¿Son equivalentes los siguientes enunciados? Justifica.
i) Para todo $\varepsilon > 0$*, existe* $\delta > 0$ *tal que si* $x \in B(a, \delta)$*, entonces* $f(x) \in B(f(a), \varepsilon)$*.*
ii) Para todo $\varepsilon > 0$*, existe* $\delta > 0$ *tal que* $f(B(a, \delta)) \subset B(f(a), \varepsilon)$*.*
iii) Para todo $\varepsilon > 0$*, existe* $\delta > 0$ *tal que* $B(a, \delta) \subset f^{-1}(B(f(a), \varepsilon))$*.*
iv) Para cada punto a *de* X*, y para cada entorno* $V_{f(a)}$ *del punto* $f(a)$*, existe un entorno* U_a *del punto* a *tal que* $f(U_a) \subset V_{f(a)}$*.*
v) Para cada punto a *de* X*, y para cada entorno* $V_{f(a)}$ *del punto* $f(a)$*, existe un entorno* U_a *del punto* a *tal que* $U_a \subset f^{-1}(V_{f(a)})$*.*
vi) Para cada punto a *de* X*, y para cada entorno* $V_{f(a)}$ *del punto* $f(a)$*, el conjunto* $f^{-1}(V_a)$ *es un abierto en* $\mathbb{R}$*.*

Hay que decir que, en el trabajo previo con espacios topológicos, la noción de "entorno de un punto" toma una definición más general: dado un espacio topológico, y un punto de dicho espacio, un entorno del punto es meramente un abierto del espacio que contiene al punto. Ya no es necesario que el punto sea el "centro" del entorno (pesando en elementos básicos de una topología métrica). Se pretende que esta actividad aproxime al estudiante a la definición topológica de continuidad.

Otra actividad que pretende abonar la noción de continuidad es la siguiente:
Actividad: 1) ¿En qué puntos de la recta real la "Función de Dirichlet" $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *tal que*

$$f(x) = \begin{cases} 1, si\ x\ es\ racional \\ 0, si\ x\ es\ irracional \end{cases}$$

es continua? Justifica tu respuesta

b) ¿En qué puntos de la recta real es continua la función $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = \begin{cases} x, si\ x\ es\ racional \\ 1 - x, si\ x\ es\ irracional \end{cases}$$

es continua? Justifica tu respuesta.

La idea de esta actividad es reforzar la noción de continuidad de una variable real. A posteriori de que los estudiantes hayan podido alcanzar la definición topológica de continuidad de una función, puede ser interesante plantearles la siguiente actividad de reflexión:
Actividad: Supongamos que la topología definida en un espacio Y está dada por una base. ¿Qué criterios puedes emplear para determinar si una determinada función $f\colon X \to Y$ es continua? Justifica tus respuestas.

Se pretende aquí que el estudiante se dé cuenta de que en el caso de que la topología en Y esté dada por una base, es suficiente a los efectos de probar la continuidad de una función $f\colon X \to Y$, que la preimagen de cada elemento básico es un abierto en X.
Posteriormente, se comenzarán a trabajar en los "teoremas fundamentales" mencionados más arriba. Dada la extensión de este trabajo, se omiten las actividades específicas a proponer. Pero cabe mencionar que siempre se propondrán actividades de exploración, de elaboración de conjeturas, de demostración, de elaboración de contraejemplos, etcétera. Siempre se mantendrá el mismo espíritu.

Estrategias de enseñanza
Este proyecto comparte lo señalado por la CBMS (2001) y expresado por Dalcín, Ochoviet y Olave (2017), en el sentido de que

> Los profesores deben tener una comprensión muy desarrollada sobre la matemática que van a enseñar. Esto implica que los futuros profesores deben estudiar estos contenidos, pero a un nivel de mayor exigencia que el que van a enseñar para poder relacionarlos con otras áreas de la matemática y del conocimiento. (Dalcín et. al., 2017, p. 60).

Se comparte con Brousseau (1986) como también con Chevallard, Bosch y Gascón (1997) el significado de *saber matemática* y las competencias que demanda, clave en la formación de profesores:

> "Saber matemáticas" no es solamente saber definiciones y teoremas para reconocer la ocasión de utilizarlos y de aplicarlos, es "ocuparse de problemas" en un sentido amplio que incluye encontrar buenas preguntas tanto como encontrar soluciones. Una buena reproducción, por parte del alumno, de la actividad matemática exige que este intervenga en la actividad matemática, lo cual significa que formule enunciados y pruebe proposiciones, que construya modelos, lenguajes, conceptos y teorías, que los ponga a prueba e intercambie con otros, que reconozca los que están conformes con la cultura matemática y que tome los que le son útiles para continuar su actividad. (Chevallard, 1997, p. 213).

Esto implica, siguiendo al Grupo Cero de Valencia (1987), que el centro de atención pase de los *contenidos* a la *actividad matemática del educando*. Y comprendidas en la actividad matemática se encuentran ciertas capacidades, tales como *generalizar, abstraer, formular hipótesis* y *someterlas a prueba*, o *comunicar ideas.*

Este tipo de metodología no puede quedar solamente en el discurso didáctico, sino que los futuros profesores deben vivenciar estas nuevas metodologías en las aulas de su formación inicial. Siguiendo a Mellado (1996),

> Si los profesores en formación toman como referencia, positiva o negativa, para la enseñanza de las ciencias, a los profesores que han tenido a lo largo de su etapa escolar, es fundamental que la metodología utilizada durante la formación inicial sea consistente con los modelos teóricos que propugnan. En caso contrario, los estudiantes para profesores aprenderán más de lo que ven hacer en clase, que de lo que se les recomienda hacer. (Mellado, 1996, p. 57)

La particular modalidad de trabajo con futuros estudiantes de profesorado de matemática se distingue de otras modalidades con estudiantes de otras carreras. Según Santaló (1994):

> No se debe, por ejemplo, dar un curso de Álgebra Lineal o de Cálculo Infinitesimal para futuros profesores, de igual manera que para licenciados en matemática, ingenieros o economistas. La enseñanza en el profesorado debe ser coherente, salvando los niveles y la extensión de los temas, con la que los alumnos, futuros profesores, deberán luego impartir a sus alumnos. (Santaló, 1994, p. 210)

La Evaluación

Las evaluaciones en matemática tienen el principal objetivo de recabar información acerca de qué tipo de producciones matemáticas son capaces de realizar los alumnos, y a partir de allí establecer una posible acreditación relativa a la temática tratada. La evaluación es uno de los puntos más críticos del proceso de enseñanza y aprendizaje. Varios estudios (como el de Díaz y Barriga, 2002) han mostrado que la *evaluación tradicional* (con una función estricta de *acreditación*) no ha logrado acompañar satisfactoriamente los procesos de aprendizaje de los alumnos. Muchas veces las evaluaciones se plantean más por una razón *normativa* (para *acreditar*) que por una razón necesariamente *didáctica* (para reorientar los procesos de estudio de los alumnos). También está instalada la creencia de parte de los alumnos que lo que se evalúa es realmente lo más importante. Consideramos que la evaluación debe, necesariamente, acreditar y a su vez orientar los procesos de estudio. Según Gil (1993), la evaluación debe ser una herramienta tanto para el docente como para el alumno, en el sentido que debe mostrar los progresos y los obstáculos persistentes en los procesos de aprendizaje. Debe desempeñar un papel orientador e impulsador del trabajo de alumnos y docente, bajo un seguimiento atento y una retroalimentación constante. El alumno debe percibir la evaluación como herramienta real y generadora de expectativas positivas en el aprendizaje, y que el error (siempre inevitable) pueda aprovecharse en instancias de reflexión. En base a esta perspectiva es que se desarrollan las siguientes modalidades de evaluación.

Modalidades de evaluación

Una evaluación inicial necesaria es la *evaluación diagnóstica.* Si una evaluación diagnóstica está bien diseñada, permite medir en qué grado los alumnos dominan los conceptos previos necesarios para el trabajo futuro. En nuestro caso, la misma tiene que indagar:

- Aspectos de la *teoría de conjuntos*: *definiciones, operaciones, aspectos de lógica proposicional, funciones, propiedades de los conjuntos imagen y preimagen.*

- Aspectos de la definición “épsilon-delta” de continuidad en funciones reales.

En base a los resultados obtenidos, el docente deberá planificar actividades para reforzar aquellos conocimientos necesarios para el abordaje del tema.

Una modalidad clásica de evaluación en matemática es la *prueba escrita*. Las propuestas de este tipo de pruebas pueden solicitar que los alumnos

- resuelvan determinado tipo de ejercicios que consistan en la aplicación de un determinado tipo de algoritmo o procedimiento;
- prueben determinados resultados, o refuten determinada conjetura;
- reflexionen sobre determinados conceptos (mediante preguntas de reflexión o preguntas de giro).

Otra modalidad de evaluación consiste en las *exposiciones de clase*. En las mismas los alumnos exponen y desarrollan determinadas temáticas. En ellas es clave prestar atención tanto al grado de dominio del tema como también a la capacidad de desenvolverse de forma eficaz (uso de un leguaje matemático adecuado, manejo de la clase, etcétera).
También es importante la *autoevaluación,* orientada a que el estudiante reflexione sobre sus procesos de estudio. Es importante también instrumentar mecanismos para que el estudiante pueda evaluar el curso, y al docente que lo lleva adelante.

Proyección en Líneas de Investigación
Dado que esto se trata de un proyecto para la formación de profesores, las líneas de investigación tienen que orientarse sobre aspectos o problemáticas de índole pedagógicas, particularmente vinculadas a la enseñanza y el aprendizaje de las funciones continuas. Si bien los formadores de formadores deben tener una fuerte formación en matemática, creemos que su actividad no es la misma que la de un matemático. Esto no significa, por supuesto, que el formador de formadores no siga estudiando y profundizando sus conocimientos en matemática.

Proponemos a continuación algunas preguntas que pueden derivarse en líneas de investigación:

- De acuerdo a la noción de *imagen conceptual* propuesta por Tall y Vinner (1981), ¿se observan imágenes conceptuales más consistentes de la continuidad a posteriori de un curso de topología?
- ¿Qué vínculos pueden hacerse entre los contenidos de la teoría de las funciones continuas, y los contenidos que se imparten en la enseñanza media?
- ¿En qué medida el conocimiento de la teoría de las funciones continuas entre espacios topológicos proporciona una mejor calidad de los conocimientos matemáticos de los futuros profesores? ¿Cómo repercute lo anterior en la mejora de las prácticas de enseñanza, particularmente cuando se trabajan contenidos del análisis?

Bibliografía

Brousseau, G. (1986). *Fundamentos y métodos de la Didáctica de la Matemática.* Universidad Nacional de Córdoba, Facultad de Matemática, Astronomía y Física. Serie B, Trabajos de matemática, Nº 19 (versión castellana 1993).

Chevallard, Y., Bosch, M. y Gascón, J. (1997). *Estudiar matemáticas: el eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje.* Barcelona: Ice/Horsori.

Conference Board on Mathematical Sciences (CBMS) (2001). *The mathematical education of teachers.* Washington, DC: Author.

Courant, R.; Robbins, H. (1941). *What is mathematics?* Oxford University Press. New York.

Dalcín, M., Ochoviet, C. y Olave, M. (2017). *Una mirada a las prácticas de los formadores de la especialidad matemática: el profesor, el conocimiento y la enseñanza*. ANEP/CFE.

Díaz, F. y Barriga, A. (2002*) Estrategias Docentes para un Aprendizaje Significativo: una interpretación constructivista.* México: McGraw Hill.

El Bouazzoui, H. (1988). *Conceptios des éleves et des peoresseurs a propos de la notion de continuité d'une fonction*. PHD, Univertisé de Bordeaux.

Gil, D. y Guzmán, M. (1993). *Enseñanza de la Ciencia y la Matemática. Tendencias e Innovaciones. OEI, Para la Educación, la Ciencia y la Cultura.*

Grupo Cero de Valencia (1987). *De 12 a 16. Un proyecto de currículum de matemáticas*. Valencia: Mestral Libros.

Mellado, V. (1996). *Concepciones y prácticas de aula de profesores de ciencias, en formación inicial de primaria y secundaria.* Enseñanza de las ciencias, 14 (3), 289-302.

Munkres, J. (2000). *Topology.* Prentice Hall, Inc. Harlow, UK.

Santaló, L. y colaboradores. (1994). *Enfoques. Hacia una didáctica humanista de la matemática.* Buenos Aires: Troquel Educación.

Tall, D. y Vinner, S. (1981). *Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity.* Educational Studies in Mathematics, 12 (7). pp. 151-169. ISSN 0013-1954.

Sucesiones y series

Jorge Brisset

Se ha elegido hacer el desarrollo del tema del concurso en sucesiones y series de funciones. Se supondrá que los estudiantes tienen conocimiento sobre temas que resultan prerrequisitos. A saber: límites de sucesiones y de funciones, continuidad y derivabilidad de funciones de una variable real, integrabilidad de Riemann y series numéricas. No se pretende que sean expertos en los temas mencionados (que son del curso de Análisis I), sino que creemos que es una nueva oportunidad para incorporar conocimiento en forma espiral en la cual, ante la aparición de forma directa o indirecta de la necesidad de utilizarlo, el mismo se refuerza y se recrea (Marzano & Pickering, 1997).
Como forma de organizar la presentación de esta propuesta, y siguiendo también las pautas mencionadas en las bases, la misma contiene tres bloques principales:

- Aspectos disciplinarios
- Aspectos didácticos
- Proyección de líneas de investigación

Los mismos no constituyen compartimentos estancos y se presentan de este modo como forma de organizar esta propuesta. Por razones de extensión, no se exhibirán las demostraciones.

Aspectos disciplinarios

El tema *Sucesiones y Series de Funciones* forma parte de manera específica del programa vigente de Análisis II del profesorado de Matemática. Está relacionado con contenidos de otros cursos y de otros profesorados ya que, por ejemplo, en los cursos de matemática para Física y en Análisis I se introduce el estudio de sucesiones y series numéricas y se estudian los polinomios de Taylor y las series de potencias sin entrar en las vinculaciones que hay con el tema desarrollado en este proyecto. Además, tiene implicancias en conceptos topológicos como el de convergencia y completitud. Al trabajar el tema en los cursos actuales de Análisis II, se genera la posibilidad de recrear las condiciones para seguir aprendiendo los contenidos y para mejorar las competencias desarrolladas en el curso de Análisis I.
En análisis se destacan algunos conceptos que identifican a esta rama de la matemática. Estos son:

- límites (convergencia o divergencia)
- continuidad
- derivabilidad
- integrabilidad (Riemann)

En una primera parte presentaremos el concepto de sucesión de funciones y varios ejemplos que permitan presentar los principales conceptos de manera natural. Luego veremos que algunas de las propiedades de las funciones reales, (como la continuidad, la integrabilidad de Riemann, y la derivabilidad), en caso de que cada función perteneciente al recorrido de la sucesión la posea, esta podría ser también una de las propiedades de la *función límite*. Ante esta posibilidad incorporaremos la definición de convergencia uniforme como una necesidad y enunciaremos los teoremas correspondientes. Algunos de esos

teoremas nos presentan condiciones para posibles intercambios entre la integral y el límite de la sucesión así como entre la derivabilidad y el límite.
En la segunda parte introduciremos las series de funciones, unos resultados permitirán derivar e integrar “término a término” y ver algunas propiedades elementales de las funciones analíticas.
Se recomienda para estudiantes: (Linés Escardó, 1982), (Brisset, 2008) y (Peláez, 2005).

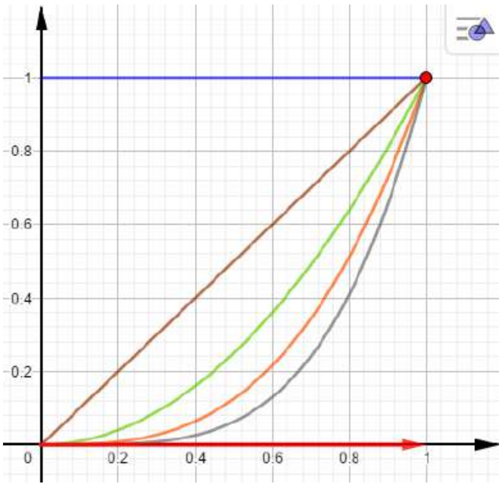
Para el caso de la continuidad y de la integrabilidad es propicia la vinculación con los espacios topológicos de la funciones continuas y el de las funciones integrables. Para el caso de la derivabilidad, al necesitar más condiciones aún, se analizará el caso de las series de potencias y de la conservación del radio de convergencia. Se realizará una descripción de las principales herramientas usadas en esta área y proponiendo siempre algún ejemplo en el que valore su uso. Para el caso de las series de funciones, inicialmente analizaremos con qué resultados podemos contar de manera inmediata por tratarse de un caso particular de sucesiones de funciones e introduciremos algunas herramientas y resultados que son específicos de las series. A lo largo de toda la propuesta se usará GeoGebra para facilitar la visualización de los distintos conceptos involucrados (Guzmán, 1997). Esta forma de trabajar favorece que el estudiante de profesorado sea capaz de experimentar, elaborar conjeturas, inferir resultados y ser partícipe y protagonista de un aprendizaje significativo y colaborativo. De este modo se crea un ambiente de aprendizaje similar al recomendado para su futura labor como profesores de Educación Media (Richardson, 2003). Luego, en parte el docente, en parte los estudiantes y en parte juntos, se formalizan los aportes. Con esta propuesta **no** se pretende que los resultados visualizados y vistos como *naturales* sean aceptados sin la formalidad matemática apropiada al nivel.

Definiciones y ejemplos

Una sucesión de funciones, es una función de dominio $\mathbb{N}$ o también $D = \{n \in \mathbb{N}: n > n_0\}$ (sin perder generalidad, en los teoremas consideraremos que el dominio es $\mathbb{N}$) y codominio el conjunto de funciones. Estaremos interesados en las sucesiones de funciones tales que las funciones pertenecientes al recorrido tengan un dominio común.
Es decir, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en la que para cada $n \in \mathbb{N}$, su imagen, la función f_n cumple que $f_n: X \to \mathbb{R}$.
Cabe observar que para cada $x \in X$, obtenemos una sucesión $\big(f_n(x)\big)$ formada por las imágenes que tiene x en las distintas f_n.

Ejemplo 1: introducción de elementos de la convergencia puntual

Sea (f_n) donde a cada $n \in \mathbb{N}$ le corresponde la función $f_n: [0,1] \to \mathbb{R}$ con $f_n(x) = x^n$.



En la figura presentamos los gráficos de algunas de las funciones de la sucesión.
Para un determinado valor de la variable (por ejemplo, si se toma $x = \frac{1}{2}$), sus imágenes tienden a cero (excepto para 1, que independientemente de n, se tiene que $f_n(1) = 1$).
Considerando esos límites puntuales se define una función que está representada en rojo y que es la que llamaremos función límite puntual.

Como vimos en el ejemplo, para los $x \in X$ en los que la sucesión real $\left(f_n(x)\right)$ es convergente, tenemos un único número real asociado a él: el $\lim f_n(x)$.
La función *límite puntual* es la definida de la siguiente manera:

$$f\colon S \to \mathbb{R} \text{ dada por } f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$$

Donde $S = \left\{x \in X\colon \left(f_n(x)\right) \text{ es convergente}\right\}$ o cualquier subconjunto no vacío de este.
No tenemos interés en el dominio común que puedan tener las f_n, sino en el subconjunto (al que denotamos como S) para cuyos elementos la sucesión real $\left(f_n(x)\right)$ converge o, inclusive, en algún subconjunto de él. De hecho, podríamos haber considerado como dominio de las f_n, al intervalo $(-1,1]$.
En el ejemplo anterior la función límite es

$$f\colon f(x) = \begin{cases} 0\,, \text{si } x \in [0,1) \\ 1\,, \ \text{si } \ x = 1 \end{cases}$$

En resumen, decimos que (f_n) converge puntualmente en S a la función f, si para cada $x \in S$, el $\lim f_n(x) = f(x)$.
Usando la notación más habitual y desarrollando la definición de límite, podemos escribir la definición anterior de la siguiente manera:

$$f_n \underset{S}{\to} f \ \Leftrightarrow \forall\, x \in S, \forall \varepsilon > 0, \exists\, p \in \mathbb{N} \,/\, \forall n > p, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

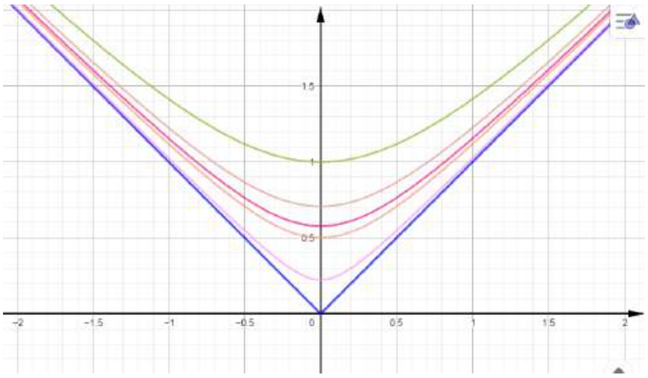
La sucesión de funciones que acabamos de presentar permite identificar claramente los elementos que forman el concepto de convergencia puntual y, además, nos proporciona un ejemplo en el que la convergencia puntual no garantiza la conservación de la continuidad.

Ejemplo 2: no conservación de la derivabilidad

Consideremos la sucesión de funciones (f_n) donde $f_n\colon f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$.

En este caso, cualquiera sea x real, $\lim f_n(x) = \lim \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} = |x|$.

Por lo que $f_n \underset{\mathbb{R}}{\to} f$, en donde $f\colon f(x) = |x|$.



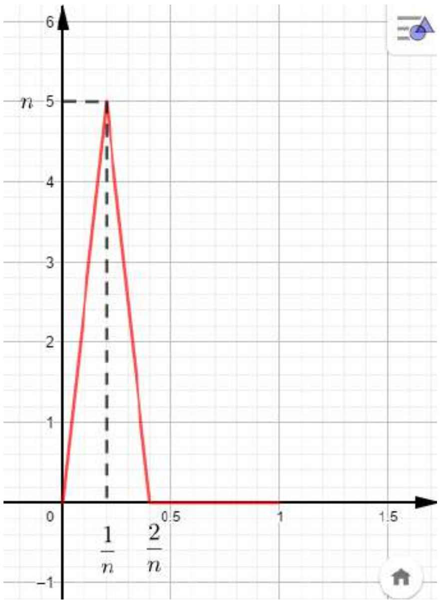
En la figura tenemos las gráficas de algunas de las f_n y la de f, la función límite puntual. Cabe notar que cada f_n es derivable en cero, mientras que f no lo es.

Ejemplo 3: no conservación de la integral

En este ejemplo, se define (f_n) exponiendo el gráfico de una f_n genérica. Es posible visualizar qué es lo que ocurre conforme $n \to +\infty$, de todos modos puede resultar atractivo pedirle a los estudiantes que encuentren una expresión analítica para ellas.

Podemos comprobar que $f_n \underset{[0,1]}{\longrightarrow} f$, en donde $f: f(x) = 0$.

Calculando $\int_0^1 f_n(t)dt$ y $\int_0^1 f(t)dt$ podemos ver que si bien cada f_n es integrable en $[0,1]$ y que la función límite puntual también lo es, no se verifica que $\lim \int_0^1 f_n(t)dt$ sea igual a $\int_0^1 (\lim f_n(t))dt$



Observación

Con estos primeros ejemplos, se observa que, por más que todas las funciones de la sucesión tengan determinada propiedad, la función limite no tiene por qué tenerla. Lo hemos visto en el caso de la continuidad, en el de la derivabilidad y en el valor de una integral de Riemann. En el próximo tenemos algo un poco más fuerte: la no conservación de la integrabilidad.

Ejemplo 4: no conservación de la integrabilidad

Dado que $\mathbb{Q} \cap [a, b]$ es numerable, sabemos que existe una biyección entre $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Q} \cap [a, b]$. Representaremos $q_1, q_2, \dots, q_i, \dots$ a las imágenes de los naturales $1, 2, 3\dots$ etc.

La sucesión de funciones que verifica lo indicado arriba, es la definida con

$$f_n: f_n(x) = \begin{cases} 1, \text{si } x = q_1, q_2, \dots, q_n \\ 0, \quad \text{en otros casos} \end{cases}$$

La función límite puntual es la de Dirichlet.

En las partes siguientes veremos que, en ciertas condiciones de hipótesis, se verificará:

- Si cada f_n es continua en a, entonces también lo será f.

- Si cada f_n es r-integrable en $[a, b]$, entonces también lo será f y

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(t)dt = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(t)dt$$

- Y también (incorporando otras condiciones), para el caso de la derivabilidad

$$\lim_{n\to+\infty} f_n'(t) = \left(\lim_{n\to\infty} f_n(t)\right)'$$

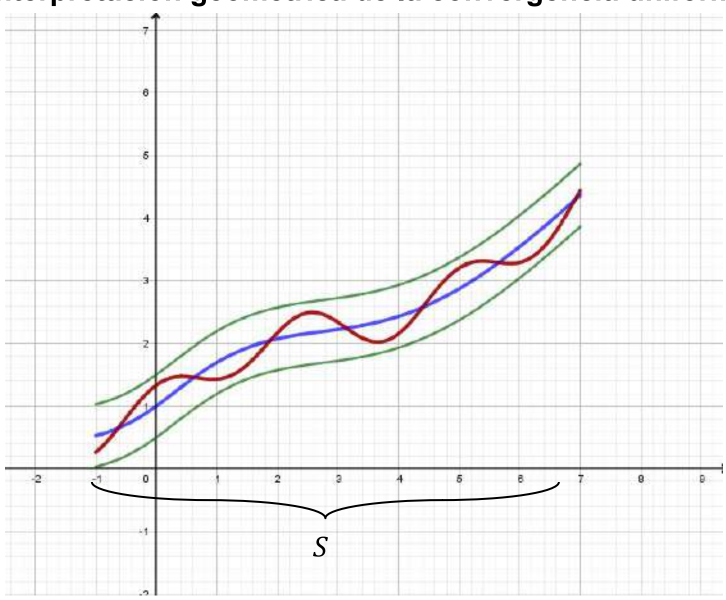
Para eso introduciremos un concepto de convergencia para una sucesión de funciones más exigente, el de la convergencia uniforme.

Definición
Decimos que una sucesión de funciones (f_n) converge uniformemente en S a una función f, si para cualquier $\varepsilon > 0$, existe un natural p, tal que cualquiera que sea $n > p$, $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ independientemente del valor de x en S.
Introduciendo la notación usual, la escribimos

$$f_n \underset{S}{\rightrightarrows} f \iff \forall\varepsilon > 0, \exists\, p \in \mathbb{N} \,/\, \forall n > p, \forall\, x \in S, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Ante un primer golpe de vista no parece ser muy diferente a la definición de convergencia puntual. La diferencia principal radica en que en el caso de la C.U., para cada ε positivo que tengamos, el natural p depende solamente de ε, en tanto que en la C.P. para cada $x \in S$ y cada ε positivo tenemos la existencia de p, por lo que dicho natural depende del x tomado, y no solo del ε dado.
Veremos en el análisis de los principales resultados que esta diferencia no es menor, ya que, como vimos en ejemplos previos, la mera convergencia puntual no garantiza la conservación de ninguna propiedad (continuidad, integrabilidad, derivabilidad).

Interpretación geométrica de la convergencia uniforme



En la figura de la izquierda se representa en rojo el gráfico de una de las f_n con $n > p$, en azul el gráfico de la función límite y en verde los gráficos de $f + \varepsilon$ y $f - \varepsilon$.
Se tomó como conjunto de convergencia S un intervalo cualquiera.

Teorema: conservación de la continuidad

"Si (f_n) converge uniformemente en S y cada f_n es continua en $a \in S$, entonces la función límite es continua en a."

Es decir,

$$\left.\begin{array}{c} f_n \underset{S}{\rightrightarrows} f \\ \forall n \in \mathbb{N}, f_n \text{ es continua en } a, (a \in S') \end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ es continua en } a$$

Comentarios sobre la demostración:

Ha resultado positivo en los cursos de Análisis II, que se intente demostrar este teorema antes de contar con la definición de C.U. De ese modo aparece como natural y necesaria dicho tipo de convergencia. A partir de allí, podríamos preguntarnos si este tipo de convergencia que se introduce es suficiente para garantizar la conservación de la integrabilidad y de la derivabilidad.

Ejemplo 5: C.P. y C.U. en subintervalos

Retomando la sucesión de funciones definida por $f_n: f_n(x) = x^n$. Vimos que convergía puntualmente a la función $f: f(x) = \begin{cases} 0\,, \text{si } x \in [0,1) \\ 1\,, \text{ si } x = 1 \end{cases}$, que es obviamente discontinua en 1. Luego, la convergencia no es uniforme. Sin embargo, en $[0,1)$ sí se conservó la continuidad. ¿Será que $f_n \underset{[0,1)}{\Longrightarrow} f$? De ser así, por definición debería cumplirse que:

Dado $\varepsilon > 0, \exists\, p \in \mathbb{N} \text{ tal que } \forall n > p, \forall\, x \in [0,1), |x^n| < \varepsilon$, pero esto no es cierto ya que como el $x^n \xrightarrow[x \to 1^-]{} 1$, bastará con tomar $\varepsilon = \frac{1}{2}$ para ver que existe siempre algún $x \in [0,1)$ cuya imagen es mayor que $\frac{1}{2}$.

Es usual que en casos como este, nos preocupemos por encontrar si hay algún subconjunto de $[0,1)$ en donde la convergencia sea uniforme. Ya que vimos que la convergencia no es uniforme en $[0,1)$ a causa de poder acercarnos al 1, parece sensato que busquemos la convergencia uniforme en intervalos de la forma $[0,b] \subset [0,1)$.

Dado $[0,b] \subset [0,1)$, tomamos $\varepsilon > 0$, ¿existe $p \in \mathbb{N} \text{ tal que } \forall n > p, \forall\, x \in [0,b], |x^n| < \varepsilon$?

En este caso la respuesta es afirmativa, ya que cualquiera que sea $x \in [0,b]$, tenemos:

$$|x^n| \leq b^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

Con lo que, cualquiera que sea el $[0,b] \subset [0,1)$, $f_n \underset{[0,b]}{\Longrightarrow} f$.

Ejercicios sugeridos

- Demuestre que las f_n son continuas en un intervalo abierto I con $f_n \underset{[a,b]}{\Longrightarrow} f$ en cualquier $[a,b] \subset I$, entonces f es continua en I.
- Demuestre que convergencia uniforme cumple la propiedad de linealidad.

Teorema: conservación de la integrabilidad Riemann

"Si (f_n) converge uniformemente en $[a,b]$ y cada f_n es r-integrable en $[a,b]$, entonces f es r-integrable en $[a,b]$ y además $\int_a^b f_n(t)dt \to \int_a^b f(t)dt$."

Es decir,

$$\left.\begin{array}{r} f_n \underset{[a,b]}{\Longrightarrow} f \\ \\ \forall n \in \mathbb{N}, f_n \text{ es r} - \text{integrable en } [a,b] \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} 1) & f \text{ es r} - \text{integrable en } [a,b] \\ 2) & F_n \underset{[a,b]}{\Longrightarrow} F \\ 3) & \lim \int_a^b f_n(t)dt = \int_a^b \left(\lim f_n(t)\right) dt \end{cases}$$

Las funciones del punto 2) son:

$$F_n : F_n(x) = \int_a^x f_n(t)dt \quad \text{y} \quad F : F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

En el punto 3) se establece la posibilidad de intercambiar el orden entre el límite y la integral y que, al probarse el punto 2), esto es inmediato.

Teorema: conservación de la derivabilidad

Sea (f_n) una sucesión de funciones de clase C^1 en un intervalo I tal que $\left(f_n(a)\right)$ converge en algún $a \in I$ y $f_n' \underset{I}{\Rightarrow} g$.

Entonces

1. Existe $f: I \to \mathbb{R}$ tal que $f_n \underset{I}{\to} f$.
2. $f_n \underset{J}{\Rightarrow} f$ en cualquier intervalo acotado $J \subset I$.
3. La función f es derivable en I y $f'(x) = g(x)$ para todo $x \in I$. Esta última parte puede escribirse así: $\lim\left(f'_n(x)\right) = (\lim f_n(x))'$.

Como acabamos de ver, la convergencia uniforme asegura la conservación de algunas propiedades muy relevantes para el análisis, por ese motivo resulta importante conocer métodos sencillos para determinar si la convergencia es o no es uniforme. Los próximos resultados apuntan a ese objetivo. El primero, el criterio del supremo, es utilizado con frecuencia y basta con el cálculo de un límite para saber si la convergencia es o no uniforme; el segundo, el criterio de Cauchy, toma trascendencia en series de funciones ya que prescinde de la función límite para el estudio de la convergencia.

Teorema: Criterio del supremo.

Se trata de una condición necesaria y suficiente para la convergencia uniforme de una sucesión de funciones.

$$f_n \underset{S}{\Rightarrow} f \iff \lim E_n = 0$$

La (E_n) mencionada está definida con $E_n = \sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in S\}$, lo que marca (obviamente) la necesidad de existencia de dicho supremo, al menos para todos los naturales a partir de alguno determinado.

Ejemplo 6: uso del criterio del supremo

Continuemos con la sucesión de funciones definida por las $f_n : f_n(x) = x^n$. En ejemplos anteriores habíamos llegado a la conclusión de que (f_n) converge puntualmente en $[0,1]$ a la función f cuya expresión es $f(x) = \begin{cases} 0\text{, si } x \in [0,1) \\ 1\text{, si } x = 1 \end{cases}$, por el hecho de que no se conservó la continuidad se dedujo que la convergencia no era uniforme y luego probamos que sí era uniforme la convergencia en cualquier intervalo $[a,b] \subset [0,1)$.

Esto podría hacernos sospechar que la convergencia puede ser uniforme en $[0,1)$ ya que la función límite es continua en dicho intervalo y ello no nos permite descartar esa posibilidad. Veamos, calculemos $\sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in [0,1)\}$, es decir, el $\sup\{x^n : x \in [0,1)\}$. El supremo es 1 ya que es una cota superior del conjunto y existen en él números reales tan próximos a uno como queramos, puesto que

$$\lim_{x \to 1^-} x^n = 1$$

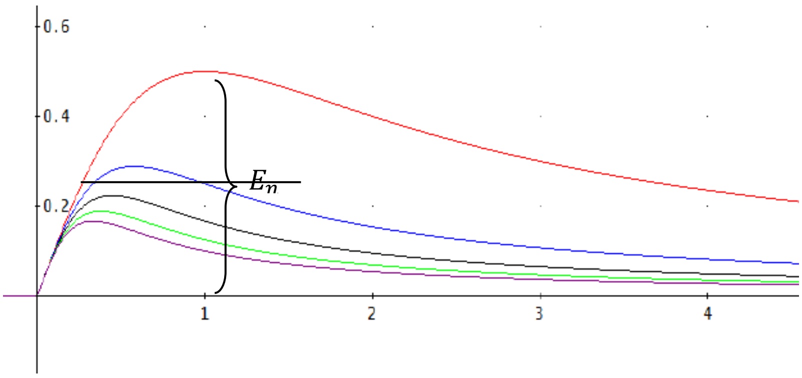
Luego, la convergencia no es uniforme ya que $\lim E_n \neq 0$.

Por supuesto que ya probamos que $f_n \underset{[0,b]}{\rightrightarrows} f$ cualquiera sea $[0,b] \subset [0,1)$, pero usando el criterio del supremo resulta bastante simple ya que $\sup\{x^n : x \in [0,b]\} = b^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

Ejemplo 7: interpretación del criterio del supremo

Sea (f_n) la sucesión de funciones dada por $f_n : f_n(x) = \frac{x}{nx^2+1}$.

Dada la imparidad de las funciones, estudiaremos la convergencia puntual y uniforme en $[0,+\infty)$. A continuación representamos las gráficas de algunas f_n.



Gráficos de algunas f_n

Para determinar si hay convergencia puntual fijamos $x \in [0,+\infty)$ y calculamos $\lim \left(\frac{x}{nx^2+1}\right)$.

Como $\lim \left(\frac{x}{nx^2+1}\right) = 0$ para cualquier $x \in [0,+\infty)$ tenemos que $f_n \xrightarrow[{[0,+\infty)}]{} f$ (función nula).

Hay probar que $\{|f_n(x) - f(x)| : x \in [0,+\infty)\}$, tiene supremo y además encontrarlo. Como f_n no es negativa y f es nula, tendremos que "maximizar" $\frac{x}{nx^2+1}$ en $[0,+\infty)$.

Derivando tenemos que:

$$\left(\frac{x}{nx^2+1}\right)' = \frac{nx^2 + 1 - 2nx^2}{(nx^2+1)^2} = \frac{1 - nx^2}{(nx^2+1)^2}.$$

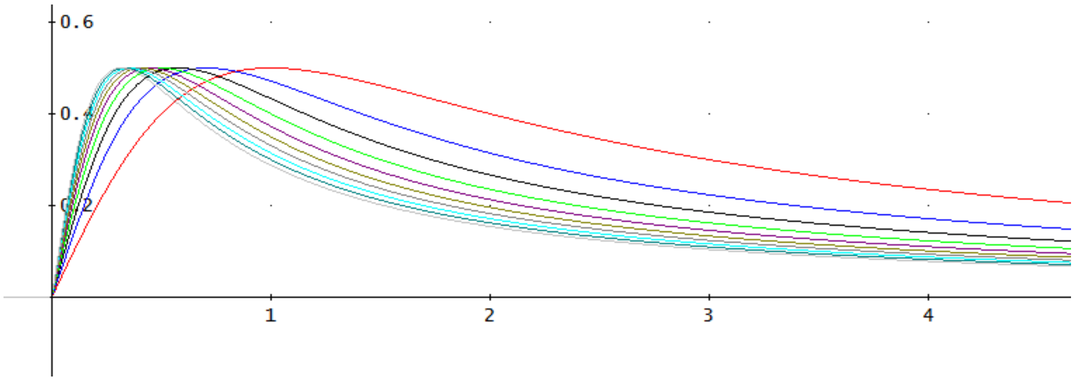
Estudiando el signo obtenemos que cada f_n alcanza su máximo en $x = \sqrt{\frac{1}{n}}$ por lo que

$E_n = f_n\left(\sqrt{\frac{1}{n}}\right) = \frac{\sqrt{\frac{1}{n}}}{n\left(\frac{1}{n}\right)+1} = \frac{1}{2\sqrt{n}}$. Como $\lim \left(\frac{1}{2\sqrt{n}}\right) = 0$ tenemos que $f_n \underset{[0,+\infty)}{\rightrightarrows} f$.

Ejercicio sugerido

Estudie en $[0,+\infty)$ convergencia puntual y uniforme de (g_n) en donde $g_n : g_n(x) = \frac{\sqrt{n}x}{nx^2+1}$.

En caso negativo de alguna de las dos, estudie qué ocurre en subintervalos de $[0,+\infty)$.



Gráficos de algunas g_n: $g_n(x) = \frac{\sqrt{n}x}{nx^2+1}$. En este caso $E_n = \frac{1}{2}$ para todo n.

Teorema: Criterio de Cauchy

$$f_n \underset{S}{\rightrightarrows} f \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists p \in \mathbb{N} \;/\; \forall n' > p, \forall n'' > p, \forall x \in S, |f_{n''}(x) - f_{n'}(x)| < \varepsilon$$

Como dijimos en un comienzo, se trata de otra condición necesaria y suficiente para la convergencia uniforme de una sucesión de funciones. Su enunciado es el mismo que en sucesiones reales: "una sucesión es convergente (uniformemente) si y solo si es de Cauchy". (Ver definición de espacio métrico completo. ¿Cómo definiría distancia entre dos funciones?)

Series de Funciones

Al considerar una sucesión de funciones (u_n) en donde el dominio de cada u_n sea un conjunto S no vacío, podemos definir una nueva sucesión a partir de ella de la siguiente manera:

$$U_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \sum_{i=0}^{n} u_i$$

Cada U_n es una función de dominio S, con

$$U_n(x) = u_0(x) + u_1(x) + \cdots + u_n(x) = \sum_{i=0}^{n} u_i(x)$$

Obtuvimos una sucesión de funciones (U_n) dada por las sumas parciales de las funciones de la sucesión anterior. Se dice que la sucesión de funciones (u_n) genera la serie de funciones $\sum u_n$. En donde escribir (U_n) o $\sum u_n$ es lo mismo. Al tratarse de una sucesión de funciones, esta puede ser convergente puntualmente o no y, en caso de convergencia, esta podrá ser o no uniforme. De cualquier modo, los teoremas que son válidos para las sucesiones de funciones son válidos para series de funciones.
Empecemos por reescribir las definiciones de convergencia puntual y uniforme para series. Luego haremos lo mismo con los teoremas demostrados antes y agregaremos algunos que son incorporados para series y que, obviamente, no tenían sentido en sucesiones en general.

Definición

Decimos que $U_n \underset{S}{\rightarrow} U$ (o también $\sum u_n \underset{S}{\rightarrow} U$)$\Leftrightarrow \forall x \in S, \sum u_n(x)$ converge.

La función límite U tiene dominio S con

$$U(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}u_n(x)$$

Extendiendo los detalles involucrados podemos escribir la definición de la siguiente manera:

$$\sum u_n \underset{S}{\rightarrow} U \Leftrightarrow \forall x\in S, \forall \varepsilon>0, \exists p\in\mathbb{N}\ /\ \forall n>p, \left|\sum_{i=0}^{n}u_i(x)-U(x)\right|<\varepsilon$$

De modo similar definiremos la convergencia uniforme de una serie de funciones.

Definición

$$\sum u_n \underset{S}{\rightrightarrows} U \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0, \exists p\in\mathbb{N}\ /\ \forall n>p, \forall x\in S, \left|\sum_{i=0}^{n}u_i(x)-U(x)\right|<\varepsilon$$

Ejemplo 8

Analicemos $\sum x^n$. Se trata de una serie de funciones muy particular ya que es geométrica y de potencias. Ya sabemos que $\sum x^n$ converge para todo $x\in(-1,1)$ y la suma de la serie es:

$$U(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}x^n=\frac{1}{1-x}.$$

Esto indica que $\sum x^n \xrightarrow[(-1,1)]{} U$. ¿Será uniforme?

Ejemplo 9

En el caso de $\sum\frac{x^n}{n!}$, que también se trata de una serie de potencias, veremos que converge puntualmente en $\mathbb{R}$ a la función

$$U: U(x)=e^x.$$

Probar que $\sum\frac{x^{\mathrm{n}}}{n!}$ converge cualquiera sea x no es complicado. Ya que, por ejemplo, usando el criterio de D'Alembert vemos que converge absolutamente.

Usaremos la definición de límite para probar que

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}=e^x$$

Es decir, que para cada x real, dado $\varepsilon>0$, existe $p\in\mathbb{N}$ tal que si $n>p$,

$$\left|\sum_{i=0}^{n}\frac{x^i}{i!}-e^x\right|<\varepsilon$$

Desarrollando tenemos que

$$\left|\sum_{i=0}^{n}\frac{x^i}{i!}-e^x\right|=\left|1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}-e^x\right|$$

Esta última es la diferencia entre e^x y su polinomio de Mac Laurin (R_n es el resto de Lagrange y θ es un número real entre 0 y x) , o sea que

$$\left|\sum_{i=0}^{n}\frac{x^i}{i!}-e^x\right|=|R_n(x)|=\left|\frac{e^{\theta}x^{n+1}}{(n+1)!}\right|\leq\frac{e^{|x|}|x|^{n+1}}{(n+1)!}\to 0$$

Teoremas Inmediatos

A continuación veremos una serie de teoremas que las series de funciones cumplen por el hecho de que son sucesiones de funciones. Las demostraciones surgirán en forma inmediata a través de la adaptación de los teoremas vistos en sucesiones de funciones.

Teorema: conservación de la continuidad

$$\left.\begin{array}{c}\sum u_n \underset{S}{\rightrightarrows} U \\ a \in S' \\ \text{Cada } u_n \text{ es continua en } a\end{array}\right\} \Rightarrow U \text{ es continua en } a$$

Teorema: conservación de la integrabilidad

$$\left.\begin{array}{c}\sum u_n \underset{[a,b]}{\Longrightarrow} U \\ \\ \text{Cada } u_n \text{ es r} - \text{integrable en } [a,b]\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} 1)\ U \text{ es r} - \text{integrable en } [a,b] \\ 2)\ \sum\left(\int_a^x u_n(t)dt\right) \underset{[a,b]}{\Longrightarrow} \int_a^x U(t)dt \\ 3)\ \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_a^b u_n(t)dt\right) = \int_a^b\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t)\right)dt \end{cases}$$

Teorema: conservación de la derivabilidad

$$\left.\begin{array}{c}\sum u_n' \underset{I}{\rightrightarrows} g \\ (I \text{ un intervalo}) \\ \\ \text{Existe } a \in I \text{ tal que } \sum u_n(a) \text{ converge}\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} 1)\ \text{Existe } U \text{ tal que } \sum u_n \underset{I}{\to} U \\ 2)\ \sum u_n \underset{J}{\rightrightarrows} U, \text{cualquiera sea } J \subset I \\ 3)\ \text{Para todo } x \in I, \sum_{n=0}^{+\infty}\left(u_n'(x)\right) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)\right)' \end{cases}$$

Teorema: criterio de Cauchy

$$\sum u_n \underset{S}{\rightrightarrows} U \iff \forall\varepsilon > 0, \exists p \in \mathbb{N} \;/\; \forall n'' y\ \forall n'\ n'' \geq n' > p, \forall x \in S, \left|\sum_{i=n'+1}^{n''} u_n(x)\right| < \varepsilon$$

Ejemplo 10: la función zeda de Riemann

Analicemos la siguiente serie de funciones:

$$\sum \frac{1}{n^x}$$

Se trata de una serie de funciones exponenciales y que para cada $x \in \mathbb{R}$ tenemos una serie armónica. Su clasificación es familiar ya que las mismas convergen si $x > 1$ y divergen si $x \leq 1$. Por lo tanto, la serie converge puntualmente en $(1, +\infty)$. La función suma es conocida como "*zeda de Riemann*".

O sea,

$$\sum \frac{1}{n^x} \xrightarrow[(1,+\infty)]{} \zeta \text{ siendo } \zeta: \zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$$

Veremos si la convergencia es uniforme.

Como la función ζ no tiene expresión elemental, la herramienta que sugerimos usar es la condición de Cauchy.
Dado $\varepsilon > 0$ estudiaremos si es posible acotar $|U_{n''} - U_{n'}|$ en $(0, +\infty)$.

$$\left|\sum_{i=1}^{n''} \frac{1}{i^x} - \sum_{i=1}^{n'} \frac{1}{i^x}\right| = \sum_{i=n'+1}^{n''} \frac{1}{i^x} = \frac{1}{(n'+1)^x} + \frac{1}{(n'+2)^x} + \cdots + \frac{1}{(n'')^x}$$

Si existiera $p \in \mathbb{N}$, tal que para cualesquiera n'' y n' mayores a él de modo que

$$\frac{1}{(n'+1)^x} + \frac{1}{(n'+2)^x} + \cdots + \frac{1}{(n'')^x} < \varepsilon \quad \text{para cualquier } x \in (0, +\infty),$$

al tomar el límite con $x \to 1^+$, obtendríamos que

$$\frac{1}{n'+1} + \frac{1}{n'+2} + \cdots + \frac{1}{n''} \leq \varepsilon$$

Esto implicaría que la serie armónica $\sum \frac{1}{n}$ cumpliría la condición de Cauchy, lo que no es posible ya que diverge. Por ese motivo

$$\sum \frac{1}{n^x} \underset{(0,+\infty)}{\not\Rightarrow} \zeta$$

Sin embargo, razonando de modo similar, en $[a, +\infty) \subset (1, +\infty)$ es posible hacer la siguiente acotación:

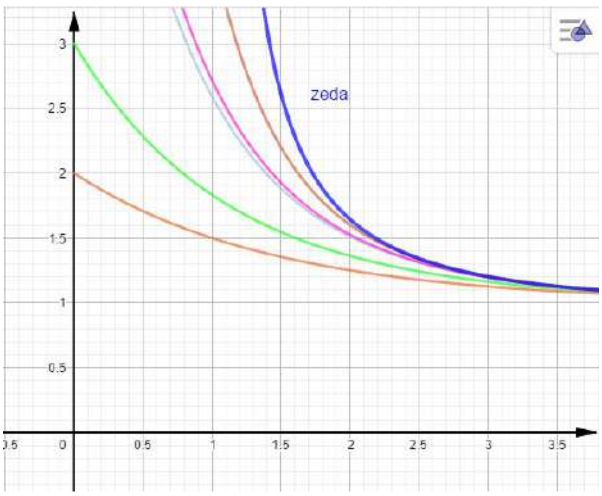
$$\frac{1}{(n'+1)^x} + \frac{1}{(n'+2)^x} + \cdots + \frac{1}{(n'')^x} \leq \frac{1}{(n'+1)^a} + \frac{1}{(n'+2)^a} + \cdots + \frac{1}{(n'')^a}$$

El último miembro de la desigualdad podemos acotarlo por ε ya que $\sum \frac{1}{n^a}$ cumple la condición de Cauchy pues converge. Por lo tanto, para el ε dado, sabemos que existe $p \in \mathbb{N}$, tal que para cualesquiera n'' y n' mayores a él,

$$\frac{1}{(n'+1)^a} + \frac{1}{(n'+2)^a} + \cdots + \frac{1}{(n'')^a} < \varepsilon$$

Luego,

$$\sum \frac{1}{n^x} \underset{[a,+\infty)}{\Longrightarrow} \zeta$$



La figura muestra el gráfico de ζ junto a alguna de la sumas parciales de la serie.

La función ζ no tiene expresión elemental. Se conocen algunos de sus valores funcionales (los mismos pueden obtenerse usando series de Fourier).

$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$, $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$, $\zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}$

En lo que sigue, veremos algunas propiedades de las series de funciones que no surgen por el hecho de ser sucesiones de funciones.

Se trata de la condición necesaria de convergencia uniforme de una serie (análogo a series numéricas), el criterio de la mayorante de Weierstrass y un criterio para series de funciones alternadas (similar al criterio de Leibniz para series numéricas alternadas).

Teorema: Condición Necesaria de Convergencia

"Si $\sum u_n \underset{S}{\rightrightarrows} U$, entonces $u_n \underset{S}{\rightrightarrows} 0$ (la función nula)"

Teorema: Criterio de la mayorante de Weierstrass

$$\left.\begin{array}{c}\sum b_n \text{ converge} \\ \text{Para cada } n \in \mathbb{N}, \forall x \in S, |u_n(x)| \leq b_n\end{array}\right\} \Rightarrow \sum u_n \text{ converge uniformemente en } S$$

Ejemplo 11: otra mirada a la función exponencial

Volvamos al ejemplo de las serie de potencias $\sum \frac{x^n}{n!}$ que ya probamos que converge en $\mathbb{R}$ a la función exponencial. Es decir,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x \text{, para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Analicemos si la convergencia es uniforme.

Para intervalos cerrados cualesquiera $[a,b] \subset \mathbb{R}$, usamos el criterio de la mayorante de Weierstrass y probamos que converge uniformemente:

$$\left|\frac{x^n}{n!}\right| \leq \frac{k^n}{n!}, \qquad \text{con } k = \text{máx}\{|a|,|b|\}$$

Luego, como $\sum \frac{k^n}{n!}$ converge, $\sum \frac{x^n}{n!} \underset{[a,b]}{\Longrightarrow} U, \text{donde } U: U(x) = e^x$.

Pero, ¿qué ocurre en $\mathbb{R}$?

Usaremos el criterio de supremo (la trataremos como la sucesión de funciones que es).

El conjunto $\left\{\left|1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} - e^x\right| : x \in \mathbb{R}\right\}$ ni siquiera está acotado ya que, tanto si $x \to +\infty$ como si tiende a $-\infty$, $\left|1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} - e^x\right| \to +\infty$. Por lo tanto ni siquiera existe E_n. Por lo que $\sum \frac{x^n}{n!}$ no converge uniformemente en $\mathbb{R}$.

El método usado para probar que $\sum \frac{x^n}{n!} \underset{[a,b]}{\Longrightarrow} U$, $\text{donde } U: U(x) = e^x$ *puede ser usado para cualquier serie de potencias, tomando* $[a,b] \subset (-r,r)$, *donde* r *es el radio de convergencia de la serie. (* (Brisset, 2008) *o* (Peláez, 2005)*).*

Teorema:

Si $\sum a_n x^n$ tiene radio de convergencia $r \neq 0$, entonces $\sum a_n x^n$ converge uniformemente en cualquier $[a,b] \subset (-r,r)$.

La consecuencia inmediata de este resultado es que las funciones definidas por la suma de una serie de potencias en $(-r,r)$ *son de clase* C_∞ *.*

Para probar lo afirmado se sugiere que demuestre:

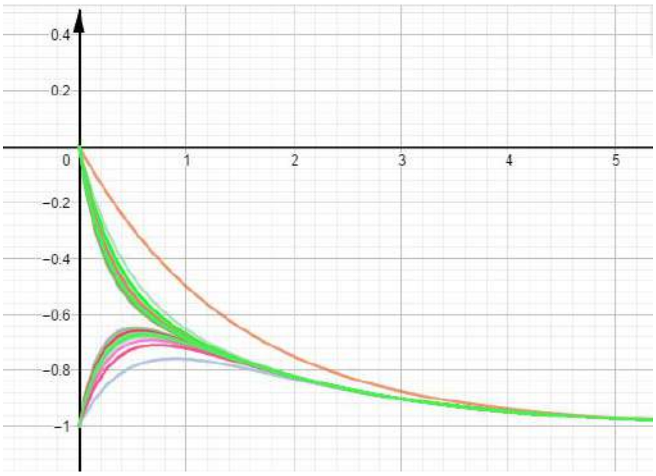
- $\sum a_n x^n$ *y* $\sum n a_n x^{n-1}$ *tienen el mismo radio de convergencia*
- $\sum a_n x^n$ *y* $\sum \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ *tienen el mismo radio de convergencia*

- *Use los teoremas de conservación y el teorema anterior para concluir lo afirmado.*

Por otro lado, el recíproco no es cierto, vea el ejemplo de Cauchy en (Brisset, 2008)*.*

Teorema: criterio de Leibniz para series de funciones
Si $u_n \underset{S}{\rightrightarrows} 0$ (la función nula) y para cada $x \in S$ se cumple que $0 \leq u_{n+1}(x) \leq u_n(x)$, entonces $\sum(-1)^n u_n$ converge uniformemente en S.

Ejemplo 12: una aplicación del criterio de Leibniz
Sea (u_n) en donde cada $u_n : u_n(x) = \frac{1}{n^x}$.
Como para cada $x \in \mathbb{R}^+$, $\lim \frac{1}{n^x} = 0$, tenemos que $u_n \xrightarrow[(0,+\infty)]{} 0$. Sin embargo, no lo hace uniformemente ya que $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{n^x} = 1$ y por lo tanto $E_n \nrightarrow 0$.
En intervalos de la forma $[a, +\infty) \subset (0, +\infty)$ la convergencia es porque $\frac{1}{n^x} \leq \frac{1}{n^a}$ y $\sum \frac{1}{n^a}$ converge por ser armónica de exponente $\alpha > 1$.
Finalmente, en virtud del teorema anterior, $\sum \frac{(-1)^n}{n^x}$ converge uniformemente en $[a, +\infty)$.



Gráficos de algunas sumas parciales de la serie.

Aspectos didácticos
Para definir cuáles serían los aspectos didácticos a considerar para trabajar este tema en el aula, se considera prudente tener claro que se trata de estudiantes que serán docentes de la educación media. ¿Qué se pretende de ellos? Seguramente esperamos que en sus aulas se fortalezcan y se haga propicia la formación de determinadas competencias y que no solamente se apunte a los contenidos de la disciplina. Si estamos convencidos de eso, tendremos que generar un ambiente de trabajo y de producción de conocimiento que sea semejante. Está comprobado que los docentes tienden a enseñar de la manera en la que les enseñaron (Richardson, 2003). Ahora bien, se pueden plantear, al menos, un par de preguntas. ¿Cuáles serían esas competencias, que además trascienden la materia y los contenidos? ¿Qué actividades proponemos en el aula? Si seguimos con prácticas del SXIX con alumnos del SXXI, los resultados seguirán siendo magros.
A esta altura, dada la velocidad que tienen los cambios tecnológicos y sociales, el listado de competencias es inabarcable. He aquí un listado breve y factible, además de la competencia

matemática y de las habilidades y conocimiento que deben alcanzarse en la formación. Cada una está vinculada a un tipo de inteligencia (Gardner, 1998). Estas son: comunicación, digital, social, cultural, aprender a aprender y emocional. Para acercarnos a estos objetivos, creemos que en nuestras aulas se deberá fomentar el trabajo en equipo, tener una postura crítica, utilizar TIC actuales, presentar en público los logros y avances alcanzados, resolver problemas, superar conflictos.

Todos esos aspectos tendrían que estar considerados en cualquier curso de formación de profesores de educación media y, en particular, en matemática.

En este tema, el estudiante de matemática encontrará viejos conceptos pero llevados a nuevos campos, como es el caso de la convergencia puntual y uniforme, y continuarán presentes conceptos fundamentales en análisis: continuidad, derivabililidad e integrabilidad. Esto hace que este tema sea sumamente relevante en la formación de profesores de matemática; genera la instancia de recrear un ambiente de aprendizaje de contenidos ya abordados y de crear caminos cognitivos hacia otras ramas de la matemática como la topología.

Lo primero que sería positivo, es sacar al docente del centro del desarrollo del curso y poner a los estudiantes allí. Se propone que el docente pase a ser un articulador y un organizador de las actividades de los estudiantes en clase. Esto no significa que el docente deje de escribir en el pizarrón y *dar* su clase, sí significa que una vez introducido el tema, los estudiantes investiguen, experimenten, conjeturen, demuestren, operen deduzcan y emitan y compartan sus conclusiones. Con la experiencia acumulada, son sabidos cuáles son los aspectos que más generan obstáculos en el aprendizaje, cuáles son las principales carencias que presentan en los conocimientos previos y cuáles son los conceptos erróneos que poseen. Esta unidad del curso no está aislada del mismo y lo primero que se hace es trabajar en forma colaborativa con algunas partes del curso de Análisis I que son centrales para este. Se trata de cálculo de límites de sucesiones y funciones, clasificación de series numéricas y cálculo integral. Esta revisión que se realiza a principio de cada año lectivo, pone en funcionamiento la espiral de conocimiento (Marzano & Pickering, 1997), esto no garantiza que ya se haya aprendido de manera significativa, solo rompe la inercia y se comienza con el camino hacia dicho aprendizaje.

En la parte anterior se expusieron varios ejemplos de cómo presentar a los estudiantes el concepto de convergencia puntual y uniforme de una sucesión de funciones. Se pretende generar el ambiente inicial adecuado para empezar a aprender partiendo de una adecuada visualización (Guzmán, 1997). El uso de algún software puede ser favorable, hoy en día el más difundido es GeoGebra y tiene la ventaja de ser libre y abierto para uso educativo (Hohenwarter, Hohenwarter, Kreis, & Lavicza, 2008).

<u>Consideraciones sobre el teórico</u>: se pretende que sean los estudiantes los que lleguen a las definiciones, la selección de los ejemplos introductorios es central para este fin. De manera similar se favorecerá que los enunciados y correspondientes demostraciones estén llevadas adelante con la participación de todos, poniendo a los estudiantes en una posición activa y protagónica frente al aprendizaje.

<u>Respecto al práctico</u>: los estudiantes contarán con una selección de actividades. Podrán realizarlas parcialmente en clase y se complementarán fuera del horario de clase. Se pretenderá que los avances sean compartidos y comentados por la clase. A modo de ejemplo se muestra una captura en donde se aprecian las modalidades de ejercicios

propuestos. Se espera que la resolución de los mismos tenga la riqueza expositiva de un docente, con explicación y justificación.

8. Sea $(f_n)_{n\in N}$: $f_n(x) = tg^n(x)$. $\forall x \in [0, \frac{\pi}{4}]$.

a) Hallar $f = \lim(f_n)$, en $[0, \frac{\pi}{4}]$.

b) Estudiar convergencia uniforme de (f_n) a f en $[0, \frac{\pi}{4}]$ y en $[0, a]$ con $a \in (0, \frac{\pi}{4})$.

c) Probar que $\lim\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}}(f_n)\right) = \int_0^{\frac{\pi}{4}}(\lim(f_n))$. Sugerencia: No calcular la integral $\int_0^{\frac{\pi}{4}}(f_n)$. Escribir directamente: $\int_0^{\frac{\pi}{4}}(f_n) = \int_0^{a}(f_n) + \int_a^{\frac{\pi}{4}}(f_n)$ y probar entonces que:

Para todo $\varepsilon > 0$, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que para tod $n \geq p$, se tiene que $\int_0^{\frac{\pi}{4}}(f_n) < \varepsilon$.

¿Éste resultado es contradictorio con lo estudiado en b)?

d) Sea $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}}(f_n)$. Hallar una relación de recurrencia entre I_n e I_{n-2}.

Recordar que: $(\tan(x))' = 1 + \tan^2(x)$.

e) Utilizar c) y d) para probar que: $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1} = \mathrm{L}\,(2)$ y $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$

Este tipo de ejercicio vincula muchos temas y conceptos matemáticos. Permite que los estudiantes utilicen varias de las herramientas del análisis y hace propicio el intercambio de los estudiantes.

Sobre la evaluación: si bien existe un reglamento general para evaluar en el plan de estudios vigente, se enumerarán algunos criterios de evaluación del curso. Se pretende realizarlo en tres componentes: autoevaluación, coevaluación y heteroevaluación. Se estima favorable el uso de rúbricas como la se presenta abajo. Este tipo de evaluación es sencilla de llevar a cabo, todos saben qué se espera de su desempeño y tiene en cuenta competencias de este siglo y, además, es utilizable tanto para el profesorado presencial como en modalidad semipresencial.

Nombre de quien evalúa: ____________________

Nombre del estudiante: ____________________

CATEGORIA	4	3	2	1
Terminología Matemática y Notación	La terminología y notación correctas fueron siempre usadas haciendo fácil de entender lo que fue hecho.	La terminología y notación correctas fueron, por lo general, usadas haciendo fácil de entender lo que fue hecho.	La terminología y notación correctas fueron usadas, pero algunas veces no es fácil entender lo que fue hecho.	Hay poco uso o mucho uso inapropiado de la terminología y la notación.
Conceptos Matemáticos	La explicación demuestra completo entendimiento del concepto matemático usado para resolver los problemas.	La explicación demuestra entendimiento sustancial del concepto matemático usado para resolver los problemas.	La explicación demuestra algún entendimiento del concepto matemático necesario para resolver los problemas.	La explicación demuestra un entendimiento muy limitado de los conceptos subyacentes necesarios para resolver problemas o no está escrita.
Explicación	La explicación es detallada y clara.	La explicación es clara.	La explicación es un poco difícil de entender, pero incluye componentes críticos.	La explicación es difícil de entender y tiene varios componentes ausentes o no fue incluida.

De este tipo de rúbricas también podemos obtener la *nota de calificación*. La misma puede tener distinta influencia en la nota final del curso o de la unidad.

Durante el curso los estudiantes son evaluados tanto en teórico como en práctico, en actividades de equipo e individualmente.

Proyección de líneas de investigación

En los cursos de Análisis II contamos con que el estudiante maneje o, al menos, posea cierto conocimiento sobre series numéricas, concepto de convergencia y suma de series convergentes. Estas condiciones iniciales, aun estando presentes, no garantizan un mejor aprendizaje y buen desempeño de los estudiantes.

Una línea de investigación podría ser la de trabajar con la mirada puesta en ese preconcepto que la mayoría de los docentes tenemos: "les va mejor a los estudiantes que aprendieron más de los contenidos del curso anterior". Yendo al caso de las Series de

Funciones, estamos en una transición entre el pensamiento numérico y el ámbito de las funciones. Podríamos, entonces, investigar sobre si *lo que han estudiado de series numéricas, ¿favorece u obstaculiza la conceptualización de las series de funciones?*

En (Martínez-Planell, González, DiCristina, & Acevedo, 2012) podemos encontrar que solo uno de cada diez estudiantes asoció una serie como una sucesión de sumas parciales. Trabajando en ese mismo sentido tendríamos dos caminos a seguir en la investigación:

- ¿Cambia ese porcentaje al trabajar con series de funciones en lugar de hacerlo con series numéricas?
- ¿Qué desempeño tienen los estudiantes en el tema series de funciones según los resultados obtenidos en el de series numéricas?

Bibliografía

Borghi, J. (2005). *Problemas y Teoremas de Análisis Matemático. Integrales Impropias y Series.* Montevideo: Tradinco.

Brisset, J. (2008). *Series y Taylor.* Montevideo: Dpto. Matemática DFPD.

Gardner, H. (1998). *Inteligencias Múltiples.* Barcelona: Paidós.

Guzmán, M. D. (1997). *El rincón de la pizarra: ensayos de visualización en análisis matemático: elementos básicos del análisis.* Madrid: Pirámide.

Hohenwarter, M., Hohenwarter, J., Kreis, Y., & Lavicza, Z. (2008). Teaching and learning calculus with free dynamic mathmatics software GeoGebra. *11th International Congress on Mathmatical Education*.

Linés Escardó. (1982). *Principios de Análisis Matemático.* Barcelona: Reverté.

Martínez-Planell, R., González, A. C., DiCristina, G., & Acevedo, V. (2012). Student's concept of infinit series. *Educ Stud Math*.

Marzano, R., & Pickering, D. (1997). *Dimensions of learrning. Teacher's manual.* Alejandría: ASDC.

Peláez, F. (2005). *Cálculo.* Montevideo: Delataplán.

Richardson, V. (2003). Teacher Beleifs and Classroom Performance: The impact of Teacher Education. *Preservice Teacher's Beliefs*, 1-22.

Diferenciabilidad

Horacio Castagna

1 Cuestiones previas y aspectos introductorios

Se ha seleccionado el tema Diferenciabilidad, dentro de la Sección Análisis en la Formación de Docentes. El tema elegido se encuentra presente de manera explícita en los programas de las asignaturas Análisis II (Matemática) y Matemática III (Física) para su estudio exhaustivo. También aparece vinculado en el resto de las asignaturas ya sea en casos particulares como en aplicaciones.

En cursos como Análisis I, de la Especialidad Matemática, o Matemática I, de la Especialidad Física, aparecen programáticamente la derivabilidad de funciones reales de variable real. Esto puede considerarse la antesala al estudio de la Diferenciabilidad para funciones de varias variables en general.

Se supone que el estudiante de formación docente que va a cursar una asignatura donde se trate la diferenciabilidad, conoce ampliamente, domina lo conceptual y las aplicaciones de las funciones reales y sus propiedades como ser continuidad, derivabilidad y límites en general. Además, previo a lo tratado en este trabajo, se debe definir y trabajar con los estudiantes las definiciones básicas para la topología habitual sobre $\mathbb{R}^n$ (para este curso es suficiente), a saber, punto de acumulación, punto interior, conjunto abierto y conjunto cerrado entre otros. Sin estos conceptos previos no puede definirse límite y continuidad que son anteriores a la derivada direccional y la diferenciabilidad.

La idea global es estudiar (evaluar) la variación funcional comparada con la de los incrementos (infinitesimales) de las variables. Si esta variación funcional es "mucho más pequeña" que los incrementos considerados en las variables del dominio, la función se dice "suave", "lisa" (Burgos, 1995) o en inglés "smooth" (Guillemin & Pollack, 1974). Es decir, alrededor de los puntos donde ocurre lo antedicho, las funciones se comportan muy pero muy parecido a las funciones lineales. De hecho, van a poder aproximarse bastante bien por funciones lineales. No en vano comentarios como "si es diferenciable es casi lineal".

Estas ideas presentadas de forma coloquial se formalizarán en el desarrollo del tema más adelante en el trabajo.

El concepto de Diferencial de una función nace de manera casi simultánea al inicio del Cálculo Infinitesimal, por allá en los finales del siglo XVII.

Euler ya calculaba diferenciales de funciones reales en dos variables en sus textos al respecto (alrededor de 1755). Lo hacía tratando las variables por separado y calculando derivadas parciales. Esta metodología de cálculo perduró hasta el siglo XIX, cuando se empezaron a proponer ejemplos que no cumplían ciertas cuestiones como derivabilidad implica continuidad, por ejemplo, funciones no continuas pero con derivadas parciales en un punto. Esto visualizó la problemática de las varias variables en el dominio y que no se pueden tratar separándolas. Es decir, las funciones de varias variables presentan problemáticas que van más allá de lo que pueda ocurrir en cada una de las variables por separado.

Así es que el estudio de la diferenciabilidad y sus consecuencias, para una función de varias variables reales, no puede reducirse al estudio y posterior cálculo de las derivadas parciales. Va mucho más allá, como se desprenderá del desarrollo del tema.

La elección de las definiciones, propiedades, teoremas, ejercicios y aplicaciones está hecha en el supuesto de que trabajamos el tema Diferenciabilidad en Análisis II de la Especialidad

Matemática. Se hará énfasis en lo conceptual y se tratarán funciones que presentan varias anomalías, para luego pasar a la aplicación de estos y trabajar con ejemplos, ejercicios, problemas y aplicaciones. Si el público objetivo para el que se desarrolla el tema fuera el que cursa la Especialidad Física, se podría hacer énfasis en las aplicaciones y tratar funciones con "buen comportamiento" alrededor de todo punto, ya que, desde el punto de vista experimental, empírico, las funciones que se usan para modelar el movimiento de los objetos del mundo real, los campos escalares y vectoriales, por ejemplo, son regulares y diferenciables en general (Resnick, Halliday, & Krane, 1993).

2 Diferenciabilidad

2.1 Derivadas direccionales y parciales

2.1.1 Derivada según un vector

Sean $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y $f: A \to \mathbb{R}^m$ una función. Dado un punto $a \in A$ y un vector $v \in \mathbb{R}^n$ de modo que $\|v\| = 1$, definimos *derivada de f según v* en a, y notamos, a ese objeto de $\mathbb{R}^m$, $\frac{\partial f(a)}{\partial v}$ al siguiente límite, si existe:

$$\frac{\partial f(a)}{\partial v} = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t}$$

Para el caso especial en que el vector elegido es uno de los elementos de la base canónica de $\mathbb{R}^n$, o sea $v = e_i$, y el límite anterior existe, decimos que f tiene derivada parcial i-ésima, o en la i-ésima variable, en a. La notación más utilizada es $\frac{\partial f(a)}{\partial x_i}$ en lugar de $\frac{\partial f(a)}{\partial e_i}$, llamando x_i a la i-ésima variable.

Cuando el límite estudiado no existe decimos que no existe o no hay derivada direccional según la dirección elegida (v) en el punto tomado (a).

2.1.2 Ejemplos

1º Para $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = x^2 + 2x - y$, tomando como punto el origen y vector v genérico (v_1, v_2), queda:

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial v} = \lim_{t \to 0} \frac{f(tv_1, tv_2) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{t^2 v_1^2 + 2tv_1 - tv_2}{t} = 2v_1 - v_2$$

Para este caso tenemos derivada según cualquier dirección en el origen.

2º Sea $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida según $f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \text{ o } y = 0 \\ 1 & \text{si } xy \neq 0 \end{cases}$

Veamos qué pasa tomando el origen y el vector $(1,0)$.

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x} = \lim_{t \to 0} \frac{f(t, 0) - f(0,0)}{t} = 0$$

Ahora analicemos la existencia del límite requerido tomando el origen y el vector $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Para que exista $\lim_{t \to 0} \frac{f\left(\frac{t}{\sqrt{2}}, \frac{t}{\sqrt{2}}\right) - f(0,0)}{t}$, debe existir $\lim_{t \to 0} \frac{1}{t}$, lo cual no es cierto.

Este ejemplo pone de manifiesto que pueden existir ciertas derivadas según algún vector y no existir derivadas con otras direcciones.

3º Sea ahora $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = \begin{cases} \frac{|x|+|y|}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Tomemos el origen como punto y un vector v genérico (v_1, v_2), y analicemos la existencia de derivada direccional:

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(tv_1, tv_2) - f(0,0)}{t};\ \lim_{t\to 0} \frac{|tv_1| + |tv_2|}{t^3}$$

El límite estudiado no existe para cualquier vector, es decir no hay derivada direccional cualquiera sea la dirección tomada.

4º Para $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}$, tomando como punto el origen y vector v genérico (v_1, v_2), analicemos:

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(tv_1, tv_2) - f(0,0)}{t};\ \lim_{t\to 0} \frac{(tv_1)^{\frac{2}{3}} + (tv_2)^{\frac{2}{3}}}{t};\ \lim_{t\to 0} \frac{{v_1}^{\frac{2}{3}} + {v_2}^{\frac{2}{3}}}{t^{\frac{1}{3}}}$$

Para este caso no tenemos derivada para cualquier dirección en el origen.

2.1.3 Observaciones

1ª El conjunto A, donde está definida la función en la definición de derivada direccional, podría no ser abierto, pero para garantizar la existencia de la diferencia $f(a+tv) - f(a)$ con un vector cualquiera v, se pide que a sea un punto del interior de A.

2ª Según se puede observar de los ejemplos propuestos, no hay relación entre la existencia de derivada direccional según un vector y la existencia de esta cuando el vector se cambia, manteniendo el punto donde se investiga.

3ª Tampoco hay relación entre la existencia o no de la derivada direccional y la continuidad o no de la función en el punto.

2.1.4 Propiedades

1ª Si consideramos $f\colon A \to \mathbb{R}^m$ y pensamos en sus m componentes $f_1, f_2, \dots, f_m$, como funciones $f_j\colon A \to \mathbb{R}$ (con j de 1 a m); f es derivable en a según v si, y solo si, f_j es derivable en a según v para todo j de 1 a m.

2ª Para la construcción de la función derivada parcial respecto de la i-ésima variable, valen las reglas obtenidas para las funciones en una variable. Al respecto observemos que las demás variables x_k, con k de 1 a n y $k \neq i$, permanecen constantes para el cálculo de la función derivada parcial i-ésima.

<u>*Teorema*</u>. Valor medio. Sea una función $f\colon A \to \mathbb{R}$ con A un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, $a \in A$, $v \in \mathbb{R}^n$ de modo que el segmento S de extremos en los puntos a, $a+v$ está contenido en A. Si f es continua en S y existe la derivada direccional en la dirección de v en todo punto de S, entonces existe $\theta \in (0,1)$ tal que $f(a+v) - f(a) = \frac{\partial f(a+\theta v)}{\partial \frac{v}{\|v\|}} \|v\|$.

Dem: Tomemos $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^n$ con $\gamma(t) = a + tv$. Si consideramos $h = f \circ \gamma$, vemos que es continua en $[0,1]$ por composición, y es derivable en $[0,1]$ ya que al aplicar la definición queda

$h'(\theta) = \lim_{t \to 0} \frac{h(\theta+t)-h(\theta)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(a+\theta v+tv)-f(a+\theta v)}{t\|v\|} \|v\| = \frac{\partial f(a+\theta v)}{\partial \frac{v}{\|v\|}} \|v\|$ (*)

Aplicando Lagrange a la función h, existe $\theta \in (0,1)$ de modo que $h'(\theta) = h(1) - h(0)$, sustituyendo en (*) y en la definición de h, queda $f(a+v) - f(a) = \frac{\partial f(a+\theta v)}{\partial \frac{v}{\|v\|}} \|v\|$. ■

2.2 Funciones diferenciables

2.2.1 Diferenciabilidad

Dada una función $f: A \to \mathbb{R}^m$ con A un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, decimos que:
f <u>es</u> <u>*diferenciable*</u> en $a \in A$ si existen una transformación lineal $df_a: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y una función $r_a: B_a(O_n, \omega) \to \mathbb{R}^m$ de modo que $f(a+h) = f(a) + df_a(h) + r_a(h)$ con $\lim_{\|h\| \to 0} \frac{r_a(h)}{\|h\|} = O_m$.

2.2.2 Ejemplos

1º Si $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es dada por $f(x,y) = x^2 + 2x - y$, vemos que es diferenciable en el origen O, ya que: $f(h_1, h_2) = f(0,0) + df_O(h_1, h_2) + r_O(h_1, h_2) = 2h_1 - h_2 + h_1^2$ y tomando $df_O: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ con $df_O(h_1, h_2) = 2h_1 - h_2$, y $r_O: B_O(O, \omega) \to \mathbb{R}$ con $r_O(h_1, h_2) = h_1^2$ se cumple lo pedido en la definición.

2º Tomando $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ con $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, observemos que no es diferenciable en el origen O, ya que si existiera una transformación lineal $df_O: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ con forma genérica $df_O(h_1, h_2) = ph_1 + qh_2$, quedaría que $r_O: B_O(O, \omega) \to \mathbb{R}$ necesariamente tiene la forma siguiente $r_O(h_1, h_2) = \sqrt{h_1^2 + h_2^2} - ph_1 - qh_2$, y por tanto para ninguna pareja de valores p y q se cumple que $\lim_{(h_1, h_2) \to O} \frac{r_O(h_1, h_2)}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = 0$.

2.2.3 Comentarios

1º Si la función es diferenciable en $a \in A$, entonces la diferencial asociada, es decir df_a, es una transformación lineal única. Veamos este punto.
Supongamos que no es única, entonces debería ocurrir, dada la diferenciabilidad, que existen $df_{1a}, df_{2a}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $r_{1a}, r_{2a}: B_a(O_n, \omega) \to \mathbb{R}^m$ con $\lim_{\|h\| \to 0} \frac{r_{1a}(h)}{\|h\|} = \lim_{\|h\| \to 0} \frac{r_{2a}(h)}{\|h\|} = O_m$ (*) y además que $f(a+h) = f(a) + df_{1a}(h) + r_{1a}(h) = f(a) + df_{2a}(h) + r_{2a}(h)$.
Pero esto supone que $df_{1a}(h) - df_{2a}(h) = r_{2a}(h) - r_{1a}(h)$, en consecuencia y aplicando (*) vemos que $\lim_{\|h\| \to 0} \frac{df_{1a}(h) - df_{2a}(h)}{\|h\|} = \lim_{\|h\| \to 0} \left(df_{1a}\left(\frac{h}{\|h\|}\right) - df_{2a}\left(\frac{h}{\|h\|}\right) \right) = O_m$ y como esto vale cualquiera sea el vector unitario $\frac{h}{\|h\|}$ concluimos que $df_{1a} = df_{2a}$.

2º Observemos que, si la función es diferenciable en un punto, entonces la variación funcional es casi lineal. Veamos, $f(a+h) - f(a) = df_a(h) + r_a(h)$ y como $\lim_{\|h\| \to 0} \frac{r_a(h)}{\|h\|} = O_m$, resulta que puede concluirse que $f(a+h) - f(a)$ puede aproximarse muy bien con $df_a(h)$.

2.3 Condiciones necesarias para la diferenciabilidad

2.3.1 Diferenciabilidad implica continuidad

Teorema. Si una función $f: A \to \mathbb{R}^m$, siendo A un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, es diferenciable en $a \in A$ entonces es continua en a.
Dem: Para probar la continuidad de f en a, veamos que $\lim_{h\to O} f(a+h) = f(a)$.
Como f es diferenciable en a, calcular $\lim_{h\to O} f(a+h)$ es equivalente (en caso de existir) a calcular $\lim_{h\to O}\big(f(a) + df_a(h) + r_a(h)\big)$, y como en estas condiciones $\lim_{h\to O}\big(df_a(h) + r_a(h)\big) = O$, queda que $\lim_{h\to O} f(a+h) = f(a)$. ■

Observación. Según el teorema recién visto, la continuidad es necesaria para la diferenciabilidad. Veamos que no es suficiente. Para ello basta repasar el ejemplo *2.2.2* 2º, el cual proporciona un caso de función continua y no diferenciable en el origen. Veamos la continuidad

$$\lim_{h\to O} f(O+h) = \lim_{(h_1,h_2)\to O} f(h_1,h_2) = \lim_{(h_1,h_2)\to O} \sqrt{h_1^2 + h_2^2} = 0 = f(0{,}0) = f(O)$$

2.3.2 Diferenciabilidad implica existencia de derivada direccional
Teorema. Si una función $f: A \to \mathbb{R}^m$, siendo A un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, es diferenciable en $a \in A$ entonces tiene derivada direccional en a sea cual sea la dirección tomada.
Dem: Veamos que dado un vector $v \in \mathbb{R}^n$ cualquiera, con $\|v\| = 1$, existe $\lim_{t\to 0}\frac{f(a+tv)-f(a)}{t}$.
Por diferenciabilidad vale que $f(a+tv) - f(a) = df_a(tv) + r_a(tv)$ con $\lim_{\|tv\|\to 0}\frac{r_a(tv)}{\|tv\|} = O$.
Así que probar que existe $\lim_{t\to 0}\frac{f(a+tv)-f(a)}{t}$ es equivalente a probar que existe $\lim_{t\to 0}\frac{df_a(tv)+r_a(tv)}{t}$.
Para ello vemos que $\lim_{t\to 0}\frac{df_a(tv)}{t} = df_a(v)$ y $\lim_{t\to 0}\frac{r_a(tv)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{r_a(tv)}{t}\frac{\|tv\|}{\|tv\|} = \lim_{t\to 0}\frac{r_a(tv)}{\|tv\|}\frac{\|tv\|}{t} = O$, ya que $\lim_{t\to 0}\frac{r_a(tv)}{\|tv\|} = O$ y que $\frac{\|tv\|}{t}$ es acotado. ■

La transformación lineal df_a. Si tenemos en cuenta el resultado del límite calculado en el teorema anterior, vemos que si f es diferenciable en a entonces $\frac{\partial f(a)}{\partial v} = df_a(v)$. Por consiguiente, tomando como v los elementos de la base canónica de $\mathbb{R}^n$ (con coordenadas en esa misma base canónica), obtenemos que las derivadas parciales de f en a son las columnas (miradas como elementos de $\mathbb{R}^m$) de la matriz asociada a df_a.
Este resultado proporciona un mecanismo bastante eficiente para estudiar la diferenciabilidad de una función: calculamos las derivadas parciales, si alguna de ellas no existe entonces no es diferenciable (contra recíproco); si todas existen armamos la candidata a ser df_a y con ella el candidato a ser r_a. En caso de que $\lim_{\|h\|\to 0}\frac{r_a(h)}{\|h\|} = O$, pues entonces f es diferenciable y la candidata a ser df_a verdaderamente lo es.

Observación. La existencia de las derivadas direccionales es condición necesaria para la diferenciabilidad, pero no suficiente. Veamos con un ejemplo esto último.
Sea $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ con $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0{,}0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0{,}0) \end{cases}$
Tomemos un $v \in \mathbb{R}^2$ cualquiera, (v_1, v_2) con $v_1^2 + v_2^2 = 1$ y calculemos la derivada direccional en el origen para ese vector.

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial v} = \lim_{t\to 0}\frac{f(tv_1, tv_2) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{t^3 v_1 v_2^2}{t^3(v_1^2 + v_2^2)} = v_1 v_2^2$$

Dicha derivada existe cualquiera sea v.

En particular $\frac{\partial f(0,0)}{\partial e_1} = \frac{\partial f(0,0)}{\partial e_2} = 0$, por lo que la candidata a ser la transformación lineal df_a en caso de diferenciabilidad, es la nula.

Así que f será diferenciable en el origen si el siguiente límite es cero $\lim_{(h_1,h_2)\to O}\frac{h_1 h_2^2}{(h_1^2+h_2^2)^{\frac{3}{2}}}$. Pero esto no es cierto ya que si tomamos la restricción $h_1 = h_2 > 0$, queda $\lim_{h_1\to 0^+}\frac{h_1^3}{(2h_1^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{2^{\frac{3}{2}}}$.

2.4 Condiciones suficientes para la diferenciabilidad

Teorema. Dada una función $f: A \to \mathbb{R}$ con A un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, $a \in A$, las primeras $n-1$ derivadas parciales existen en $B(a,\delta)$ y además son continuas en a, la restante derivada parcial existe en a, entonces f es diferenciable en a.

Dem: No se pierde generalidad al suponer $n = 2$, ya que puede procederse por inducción sobre el número de variables, que $\frac{\partial f(p)}{\partial e_1}$ existe en $B(a,\delta)$ y es continua en a, y que $\frac{\partial f(a)}{\partial e_2}$ existe.

Tomemos $p = (x,y)$ y $a = (x_a, y_a)$.

Sea $h = (h_1, h_2)$ de modo que $a + h \in B(a,\delta)$.

Tomemos $r(h_1,h_2) = f(x_a + h_1, y_a + h_2) - f(x_a, y_a) - \frac{\partial f(x_a,y_a)}{\partial e_1}h_1 - \frac{\partial f(x_a,y_a)}{\partial e_2}h_2$. Para probar que f es diferenciable en a debemos probar que $\lim_{(h_1,h_2)\to O}\frac{r(h_1,h_2)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = 0$. Escribamos $r(h_1,h_2)$=

$f(x_a + h_1, y_a + h_2) - f(x_a, y_a + h_2) - \frac{\partial f(x_a,y_a)}{\partial e_1}h_1 + f(x_a, y_a + h_2) - f(x_a, y_a) - \frac{\partial f(x_a,y_a)}{\partial e_2}h_2$ (*)

Aplicando Teorema de valor medio (visto en *2.1.4*), existe $\theta \in (0,1)$ de modo que

$f(x_a + h_1, y_a + h_2) - f(x_a, y_a + h_2) = \frac{\partial f(x_a+\theta h_1, y_a+h_2)}{\partial e_1}h_1$, sustituyendo en (*) obtenemos

$$\frac{\partial f(x_a + \theta h_1, y_a + h_2)}{\partial e_1}h_1 - \frac{\partial f(x_a, y_a)}{\partial e_1}h_1 + f(x_a, y_a + h_2) - f(x_a, y_a) - \frac{\partial f(x_a, y_a)}{\partial e_2}h_2$$

Y ahora dividiendo lo obtenido por $\sqrt{h_1^2 + h_2^2}$, nos queda

$$\frac{r(h_1,h_2)}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = \left(\frac{\partial f(x_a + \theta h_1, y_a + h_2)}{\partial e_1} - \frac{\partial f(x_a, y_a)}{\partial e_1}\right)\frac{h_1}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} + \left(\frac{f(x_a, y_a + h_2) - f(x_a, y_a)}{h_2} - \frac{\partial f(x_a, y_a)}{\partial e_2}\right)\frac{h_2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}}$$

Por lo que $\lim_{(h_1,h_2)\to O}\frac{r(h_1,h_2)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = 0$. ■

Este resultado puede generalizarse a funciones de codominio $\mathbb{R}^m$ con $m > 1$ si tenemos en cuenta las propiedades descritas en *2.1.4*.

Definición. Dada una función $f: A \to \mathbb{R}$ con A un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, decimos que *es de clase* $\mathcal{C}^1$ en $a \in A$ si f tiene definidas todas sus derivadas parciales en un entorno de a y además dichas derivadas son continuas en a.

Teorema. Una función $f: A \to \mathbb{R}$, con A un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, de clase C^1 en $a \in A$ es diferenciable en a. (Inmediato)

Observación. La diferenciabilidad no implica, necesariamente, la continuidad de las derivadas parciales, como lo muestra el siguiente ejemplo.

Consideremos $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ con $f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Sea $v \in \mathbb{R}^2$ de coordenadas (v_1, v_2) con $v_1^2 + v_2^2 = 1$. Calculemos la derivada direccional en el origen para ese vector.

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial v} = \lim_{t\to 0} \frac{f(tv_1, tv_2) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t^2 \cos\left(\frac{1}{\sqrt{t^2}}\right)}{t} = 0$$

Por tanto, en el origen tenemos derivadas parciales nulas, así que es diferenciable en el origen ya que el siguiente límite es cero.

$$\lim_{(h_1,h_2)\to O} \frac{r(h_1,h_2)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = \lim_{(h_1,h_2)\to O} \frac{f(h_1,h_2)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = \lim_{(h_1,h_2)\to O} \frac{(h_1^2+h_2^2)\cos\left(\frac{1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\right)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = 0$$

Calculemos ahora las derivadas parciales en un entorno del origen.
Quedan:

$\frac{\partial f}{\partial e_1}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ con $\frac{\partial f(x,y)}{\partial e_1} = \begin{cases} 2x\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

$\frac{\partial f}{\partial e_2}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ con $\frac{\partial f(x,y)}{\partial e_2} = \begin{cases} 2y\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Ninguna de ellas es continua en el origen ya que no existen $\lim\limits_{(x,y)\to O} \frac{\partial f(x,y)}{\partial e_1}$ y $\lim\limits_{(x,y)\to O} \frac{\partial f(x,y)}{\partial e_2}$.

2.5 Gradiente, plano tangente y matriz jacobiana

2.5.1 Gradiente

Si la función $f: A \to \mathbb{R}$, con A un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, es diferenciable en $a \in A$ llamamos *gradiente* de f en a (anotado $\nabla f(a)$) al vector de $\mathbb{R}^n$ que tiene como coordenadas (en la base canónica $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$) las n derivadas parciales en a.

$\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f(a)}{\partial e_1}, \frac{\partial f(a)}{\partial e_2}, \ldots, \frac{\partial f(a)}{\partial e_n}\right)$.

Si consideramos la relación obtenida entre la derivada direccional y la transformación lineal de la diferenciabilidad vemos que $\nabla f(a).v = \frac{\partial f(a)}{\partial v}$ y que $\nabla f(a).h = df_a(h)$ (el "." indica producto interno usual en $\mathbb{R}^n$).

Considerando propiedades del producto interno y las igualdades obtenidas en el párrafo anterior, podemos decir que la dirección del gradiente es la que proporciona la mayor derivada direccional. También observamos que la dirección perpendicular al gradiente proporciona derivada nula.

Veamos un ejemplo.

Sea $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = \operatorname{sen}(x) + y + xy$. Como puede comprobarse fácilmente esta función es de clase C^1 en $\mathbb{R}^2$. Tomemos el origen $O = (0,0)$ y calculemos el gradiente allí. Queda $\nabla f(0{,}0) = \left(\frac{\partial f(0{,}0)}{\partial e_1}, \frac{\partial f(0{,}0)}{\partial e_2}\right) = (1{,}1)$. Por lo que podemos aproximar f en un entorno de $(0{,}0)$ de la siguiente manera $f(x,y) = x + y + r_O(x,y)$, siendo $r_O(x,y) = \operatorname{sen}(x) - x + xy$.

2.5.2 Plano tangente

Si ahora consideramos $f: A \to \mathbb{R}$, con A un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^2$, diferenciable en $a = (x_a, y_a) \in A$, vemos que existen $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$ de modo que:

$f(x_a + h_1, y_a + h_2) - f(x_a, y_a) = \alpha h_1 + \beta h_2 + r_a(h_1, h_2)$ con $\lim\limits_{(h_1,h_2)\to O} \frac{r_a(h_1,h_2)}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = 0$.

Si ahora nos concentramos en puntos (x,y) en un entorno de (x_a, y_a) podemos escribir la relación anterior de la siguiente manera:

$$f(x,y) - f(x_a,y_a) = \alpha(x - x_a) + \beta(y - y_a) + r_a(x - x_a, y - y_a)$$

cumpliéndose que $\lim\limits_{(x,y)\to(x_a,y_a)} \frac{r_a(x-x_a,y-y_a)}{\sqrt{(x-x_a)^2+(y-y_a)^2}} = 0$.

Considerando el punto de vista geométrico, decimos que una superficie de ecuación $z = f(x,y)$ tiene ***plano tangente*** en el punto (x_a, y_a, z_a), siendo $z_a = f(x_a, y_a)$, cuando el ángulo φ formado por la recta que pasa por (x,y,z), con $z = f(x,y)$, y por (x_a,y_a,z_a) con dicho plano tiende a cero si $(x,y) \to (x_a, y_a)$.

Podemos verificar fácilmente que f es diferenciable en (x_a, y_a) si y solo si la superficie $z = f(x,y)$ tiene plano tangente en $\big(x_a, y_a, f(x_a, y_a)\big)$. Para demostrar que la diferenciabilidad implica la existencia de plano tangente alcanza con ver que el ángulo φ que interesa, cumple $|\operatorname{sen}\varphi(x,y)| \le \frac{r_a(x-x_a,y-y_a)}{\sqrt{(x-x_a)^2+(y-y_a)^2}}$. El recíproco es inmediato.

El plano tangente entonces, tiene ecuación $z - f(x_a,y_a) = \alpha(x - x_a) + \beta(y - y_a)$, siendo $\alpha = \frac{\partial f(x_a,y_a)}{\partial e_1}$ y $\beta = \frac{\partial f(x_a,y_a)}{\partial e_2}$.

Veamos un ejemplo.

Consideremos el conjunto $H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z - \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y) = 0\}$ (superficie dada en forma implícita). Si tomamos $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dada por $f(x,y) = \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y)$ y consideramos el punto $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right)$, podemos hallar la ecuación del plano tangente a la superficie dada por el conjunto H en el punto $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ como sigue $z - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\partial f\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4}\right)}{\partial e_1}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\partial f\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4}\right)}{\partial e_2}\left(y - \frac{\pi}{4}\right)$. Las derivadas parciales quedan $\frac{\partial f(x,y)}{\partial e_1} = \cos(x)\operatorname{sen}(y)$, $\frac{\partial f(x,y)}{\partial e_2} = \cos(y)\operatorname{sen}(x)$, por lo que el plano tangente buscado tiene ecuación $z - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(y - \frac{\pi}{4}\right)$.

2.5.3 Matriz jacobiana

Sea una función $f: A \to \mathbb{R}^m$, con A un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, que es diferenciable en $a \in A$, denominamos ***matriz jacobiana*** de f en a a la matriz asociada a la transformación lineal df_a. A dicha matriz la notaremos $Jf(a)$.

Para el caso especial en el que $n = m$, la matriz jacobiana es cuadrada, por lo que puede definirse su determinante. Este se denomina ***jacobiano*** de f en a.

Por otro lado, si $m = 1$, coincide la matriz jacobiana con el gradiente.

La matriz jacobiana aparece vinculada en varios conceptos matemáticos como por ejemplo la regla de la cadena, la dependencia funcional, los cambios de variable y la función inversa.

Veamos un ejemplo.
Sea $f: \mathbb{R}_0^+ \times [0,2\pi) \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(\rho,\theta) = (\rho\cos(\theta), \rho\,\mathrm{sen}(\theta))$. La matriz jacobiana queda: $Jf(\rho,\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\rho\,\mathrm{sen}(\theta) \\ \mathrm{sen}(\theta) & \rho\cos(\theta) \end{pmatrix}$. Esta función aparece en el cambio de coordenadas cartesianas en el plano a coordenadas polares en el plano.

2.6 Diferenciabilidad de la función compuesta

2.6.1 Regla de la cadena

Teorema. Sean $f: A \to \mathbb{R}^m$ y $g: B \to \mathbb{R}^p$, con A abierto de $\mathbb{R}^n$ y B abierto de $\mathbb{R}^m$, de modo que $f(A) \subset B$, y sea $a \in A$. Si existe $\frac{\partial f(a)}{\partial e_i}$ y g es diferenciable en $f(a)$ entonces existe $\frac{\partial (g\circ f)(a)}{\partial e_i}$ y además vale $\frac{\partial (g\circ f)(a)}{\partial e_i} = dg_{f(a)}\left(\frac{\partial f(a)}{\partial e_i}\right)$.

Comentarios. El teorema anterior está enunciado según el resultado más utilizado en problemas y ejercicios. Se puede generalizar a una derivada direccional cualquiera.

2.6.2 Matriz jacobiana de la función compuesta

Teorema. Sean $f: A \to \mathbb{R}^m$ y $g: B \to \mathbb{R}^p$, con A abierto de $\mathbb{R}^n$ y B abierto de $\mathbb{R}^m$, de modo que $f(A) \subset B$, y sea $a \in A$. Si f es diferenciable en a y g es diferenciable en $f(a)$, entonces $g \circ f$ es diferenciable en a y además $d(g \circ f)_a = dg_{f(a)} \circ df_a$.

Comentarios. Según el resultado enunciado, podemos calcular la matriz jacobiana de la función compuesta conociendo las matrices jacobianas de las funciones a componer. Se cumple que: $J(g \circ f)(a) = Jg(f(a)).Jf(a)$.

2.6.3 Composición de funciones de clase $\mathcal{C}^1$

Teorema. Sean $f: A \to \mathbb{R}^m$ y $g: B \to \mathbb{R}^p$, con A abierto de $\mathbb{R}^n$ y B abierto de $\mathbb{R}^m$, de modo que $f(A) \subset B$, y sea $a \in A$. Si f es de clase $\mathcal{C}^1$ en a y g es de clase $\mathcal{C}^1$ en $f(a)$, entonces $g \circ f$ es de clase $\mathcal{C}^1$ en a.

2.7 Diferenciales de orden superior

2.7.1 Derivadas parciales sucesivas y clase $\mathcal{C}^r$

Si $f: A \to \mathbb{R}^m$, con A un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, tiene derivada i-ésima para todo punto de A (o para un subconjunto), es decir que tenemos $\frac{\partial f}{\partial e_i}: A \to \mathbb{R}^m$, podemos estudiar para esta función la existencia de la derivada j-ésima, en todo A o en algún subconjunto. En caso de existir, decimos que f tiene derivada parcial segunda respecto de las variables i-ésima y j-ésima, y notamos $\frac{\partial^2 f}{\partial e_i \partial e_j}$ o simplemente $\frac{\partial^2 f}{\partial i \partial j}$.
Este proceso lo podemos continuar estudiando la existencia de la derivada parcial k-ésima a la derivada parcial segunda, etc., obteniendo en caso de existencia, derivada parcial tercera o de orden 3, notándola $\frac{\partial^3 f}{\partial i \partial j \partial k}$, y así sucesivamente podemos obtener derivadas de orden r.
Si f admite todas las derivadas parciales de orden r y además son continuas, sobre A, decimos que f es de clase $\mathcal{C}^r$ en A.

Las derivadas sucesivas se pueden definir para cualquier dirección, pero las sucesivas parciales tienen mucha mayor incidencia práctica y teórica.
Bajo ciertas condiciones, se puede permutar el orden de la variable con respecto a la cual se deriva, y seguir obteniendo el mismo resultado. Esto es bastante útil para ahorrar cálculos. Enunciemos el resultado en la versión más sencilla y clásica.

__Teorema__. (Schwarz) Sea $f: A \to \mathbb{R}^m$, con A un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^2$, $a \in A$. Si existen $\frac{\partial f}{\partial e_1}$, $\frac{\partial f}{\partial e_2}$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial e_1 \partial e_2}$ en A y $\frac{\partial^2 f}{\partial e_1 \partial e_2}$ es continua en a, entonces existe $\frac{\partial^2 f(a)}{\partial e_2 \partial e_1}$ y además se cumple que $\frac{\partial^2 f(a)}{\partial e_1 \partial e_2} = \frac{\partial^2 f(a)}{\partial e_2 \partial e_1}$.

También es útil el siguiente resultado.
__Teorema__. (Bonnet) Sea $f: A \to \mathbb{R}^m$, con A un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^2$, $a \in A$. Si existen $\frac{\partial f}{\partial e_1}$, $\frac{\partial f}{\partial e_2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial e_1 \partial e_2}$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial e_2 \partial e_1}$ en A y además $\frac{\partial^2 f}{\partial e_1 \partial e_2}$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial e_2 \partial e_1}$ son continuas en a, entonces $\frac{\partial^2 f(a)}{\partial e_1 \partial e_2} = \frac{\partial^2 f(a)}{\partial e_2 \partial e_1}$.

2.7.2 Diferenciales de orden superior
Si $f: A \to \mathbb{R}^m$, con A un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, es de clase C^r en $a \in A$, se llama __*diferencial de orden*__ r de f en a a $d^r f_a: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, definida por:

$$(h_1, h_2, \dots, h_n) \mapsto d^r f_a(h_1, h_2, \dots, h_n) = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_r = 1}^{n} \frac{\partial^r f(a)}{\partial i_1 \partial i_2 \dots \partial i_r} h_{i_1} h_{i_2} \dots h_{i_r}$$

En particular, veamos la diferencial segunda de f en a para el caso $n = 2$ y $m = 1$, la cual aparece vinculada por ejemplo a la clasificación de puntos estacionarios o críticos (se verá más adelante).

$$(h_1, h_2) \mapsto d^2 f_a(h_1, h_2) = \sum_{i_1, i_2 = 1}^{2} \frac{\partial^2 f(a)}{\partial i_1 \partial i_2} h_{i_1} h_{i_2}$$

Por motivos de extensión no nos explayaremos en la cuestión de los diferenciales de orden superior, pero estos aparecen en la mejora de la aproximación de $f(a+h) - f(a)$ en un entorno de a. Así es que podemos definir, en tal sentido, la fórmula y el desarrollo limitado de Taylor para funciones de varias variables.

3 Aplicaciones

3.1 Función implícita

3.1.1 Teorema de la función implícita.
Para notar los puntos de $\mathbb{R}^{n+1}$, lo haremos compendiando las primeras n coordenadas juntas en un objeto. Esto lo haremos para hacer menos engorrosa la escritura. Por ejemplo, un punto de tipo $(a_1, \dots, a_n, b) \in \mathbb{R}^{n+1}$ lo anotaremos $(a; b)$ con $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$; y, un punto de coordenadas $(x_1, \dots, x_n, y) \in \mathbb{R}^{n+1}$ lo anotaremos $(x; y)$ con $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

__Teorema__. Sea $(a; b) \in V$, con V abierto de $\mathbb{R}^{n+1}$, $F: V \to \mathbb{R}$, $(x; y) \mapsto F(x; y)$, de clase C^1. Si $F(a; b) = 0$ y $\frac{\partial F(a;b)}{\partial e_y} \neq 0$ entonces: existe U abierto de $\mathbb{R}^n$, con $a \in U$; existe B abierto de $\mathbb{R}$, con $b \in B$, $U \times B \subset V$; y, existe $f: U \to B$ de clase $\mathcal{C}^1$ de modo que $F(x; y) = 0 \Leftrightarrow f(x) = y$ para todo $(x; y) \in U \times B$; y además si $x \in U$ entonces $\frac{\partial f(x)}{\partial x_i} = -\frac{\frac{\partial F(x;f(x))}{\partial x_i}}{\frac{\partial F(x;f(x))}{\partial e_y}}$

3.1.2 Comentarios

Hasta ahora hemos supuesto que las funciones que tratábamos estaban dadas de forma explícita, es decir, las "variables dependientes" se expresaban en función de "variables independientes", como puede observarse en los ejemplos propuestos anteriormente. Son las clásicas $f: A \to \mathbb{R}^m$, con $A \subset \mathbb{R}^n$, donde $y = f(x)$ por ejemplo.

Sin embargo, podemos encontrar relaciones funcionales o ecuaciones en las que las variables dependientes no se expresan explícitamente como funciones de las independientes. Por ejemplo, si consideramos $F: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ con $F(x, y, z) = y^2 z + x(\ln z - 1)$, y tomamos la relación $F(x, y, z) = 0$ ¿es posible hallar $f: U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de modo que $z = f(x, y)$ con U entorno de $(1, -1)$ y $1 = f(1, -1)$?

El teorema de la función implícita nos asegura bajo ciertas condiciones y con carácter local la existencia de dicha función, aunque no se pueda hallar explícitamente.

3.2 Función inversa

3.2.1 Teorema de la función inversa

Teorema. Sea $f: A \to \mathbb{R}^n$, con A un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, $a \in A$, de clase $\mathcal{C}^1$, $\det[Jf(a)] \neq 0$, entonces existe U entorno de a y V entorno de $b = f(a)$ de modo que la función $f: U \to V$ es biyectiva (inversa local), $f^{-1}: V \to U$ es de clase $\mathcal{C}^1$ y además se cumple $Jf^{-1}(y) = [Jf(x)]^{-1}$, $df^{-1}(y) = [df(x)]^{-1}$.

3.2.2 Comentarios

En general, cuando estudiamos funciones de varias variables, vemos que estas no admiten función inversa (no hay biyectividad). Para estudiar ciertas propiedades en el análisis de funciones, alcanza que pueda definirse en un entorno de un punto una inversa local. Ese es el objetivo, ver qué condiciones hacen falta para que exista esa inversa local.

Para fijar ideas consideremos el siguiente ejemplo.

Sea $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ con $f(x, y) = (e^x \cos(y), e^x \operatorname{sen}(y))$, función de clase $\mathcal{C}^1$, que claramente no es inyectiva ya que $f(x, y) = f(x, y + 2k\pi)$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ y para todo $k \in \mathbb{Z}$. ¿Será que existe algún subconjunto A de $\mathbb{R}^2$ donde f es inyectiva? En caso afirmativo ¿la inversa que puede definirse es de clase $\mathcal{C}^1$ sobre $f(A)$?

3.3 Máximos y mínimos relativos

3.3.1 Extremos relativos

Sea $f: A \to \mathbb{R}$, con A un abierto de $\mathbb{R}^n$, decimos que f tiene un *máximo relativo* en *sentido amplio* en $a \in A$, si existe $U \subset A$ entorno de a, donde $f(x) \leq f(a)$ $\forall x \in U$.

De forma similar definimos, f tiene un *mínimo relativo* en *sentido amplio* en $a \in A$, si existe $U \subset A$ entorno de a, donde $f(a) \leq f(x)$ $\forall x \in U$.

Ahora en sentido estricto. Decimos que f tiene un *máximo relativo* en *sentido estricto* en $a \in A$, si existe $U \subset A$ entorno de a, donde $f(x) < f(a)$ $\forall x \in U - \{a\}$. De forma análoga,

decimos que f tiene un <u>mínimo</u> <u>relativo</u> en <u>sentido</u> <u>estricto</u> en $a \in A$, si existe $U \subset A$ entorno de a, donde $f(a) < f(x)\ \forall x \in U - \{a\}$.
A tanto los máximos como los mínimos relativos se los conoce por <u>extremos</u> <u>relativos</u>.
Si bien podríamos haber definido extremos relativos para puntos que no necesariamente pertenecen al interior del conjunto donde está definida la función, optamos por trabajar con la función definida sobre un abierto. Esto sobre todo pensando en las propiedades y teoremas que vinculan los extremos con el gradiente y la diferencial segunda.
Más allá del pedido, en particular para nosotros, de punto interior, no se pide propiedad alguna para f en a en lo que respecta a tener extremo. Ni siquiera continuidad.

3.3.2 Ejemplos

1º Sea $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Observemos que f presenta un mínimo relativo en sentido estricto en $(0,0)$. Dicho mínimo es $f(0,0) = 0$. Nótese que f no es continua en el origen.

2º Sea $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = 1 - x^2 - y^2$. Aquí f presenta en el origen un máximo relativo, ya que $f(x,y) = 1 - x^2 - y^2 \leq 1 = f(0,0)$.

3º Dada $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ por $f(x,y) = (y-x)^2$, veamos que por ejemplo tiene mínimo relativo en $(1,1)$. Analizando la expresión de f notamos que en cualquier entorno de $(1,1)$ conseguimos puntos (x,y) de modo que $f(x,y) = f(1,1)$ (los de tipo (x,x)), por lo que f tiene en $(1,1)$ un mínimo relativo en sentido amplio y no en sentido estricto.

3.3.3 Condición necesaria de extremo

<u>Teorema</u>. Sea $f: A \to \mathbb{R}$ con A un abierto de $\mathbb{R}^n$ y diferenciable en $a \in A$. Si f tiene un extremo relativo en a entonces $\nabla f(a) = o$ (gradiente nulo).
Dem: Sea un vector $v \in \mathbb{R}^n$ cualquiera con $\|v\| = 1$, definamos $g: (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$ para algún $\varepsilon > 0$, con $g(t) = f(a + tv)$. Observemos que g es derivable en 0 dado que f es diferenciable en a, y que vale $g'(0) = \frac{\partial f(a)}{\partial v}$. Como f tiene un extremo relativo en a, g tiene un extremo relativo en 0, por lo que (resultado conocido para funciones de una variable real) $g'(0) = 0$. Así que $\frac{\partial f(a)}{\partial v} = 0$. ■

A los puntos de A para los cuales f es diferenciable y su gradiente es nulo se les denomina <u>puntos</u> <u>estacionarios</u> o también <u>puntos</u> <u>críticos</u>.

<u>Observación</u>. Según el teorema, para que f presente un extremo relativo en a es necesario que a sea un punto estacionario. La condición de punto estacionario no es suficiente para la existencia de un extremo relativo. Veamos este hecho con un ejemplo.
Sea $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = x^2 - y^2$. Es fácil ver que $\nabla f(0,0) = (0,0)$ y que para todo entorno del origen existen puntos (p,q) y (r,s) de modo $f(p,q) < f(0,0) < f(r,s)$.

3.3.4 Condición suficiente de extremo

<u>*Teorema*</u>. Sea $f: A \to \mathbb{R}$ con A un abierto de $\mathbb{R}^n$, de clase $\mathcal{C}^2$ en A y $a \in A$ un punto estacionario. Vale lo siguiente:

1. Si $d^2 f_a$ es definida positiva entonces f tiene en a un mínimo relativo
2. Si $d^2 f_a$ es definida negativa entonces f tiene en a un máximo relativo
3. Si $d^2 f_a$ no es definida ni semidefinida, f no tiene en a un extremo relativo

<u>*Observación*</u>. Recordemos que dada la forma cuadrática $d^2 f_a$, podemos ver si es definida estudiando el signo de los valores propios de la matriz simétrica asociada. Veamos algunos ejemplos.

1º Sea $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1$. $\nabla f(x,y) = (2x + 2, 2y - 4)$ Entonces $\nabla f(x,y) = o \Leftrightarrow (x,y) = (-1,2)$. Además, la matriz simétrica asociada a la forma cuadrática (matriz hessiana) es $\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial e_1 \partial e_1} & \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial e_1 \partial e_2} \\ \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial e_2 \partial e_1} & \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial e_2 \partial e_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, por lo que al tener los dos valores propios positivos, $d^2 f_{(-1,2)}$ es definida positiva y por consiguiente f presenta un mínimo en $(-1,2)$, que vale $f(-1,2) = -10$.

2º Sea ahora $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ con $f(x,y) = -x^2 - 3y^2 + 2x + 3y + 1$. El gradiente queda $\nabla f(x,y) = (-2x + 2, -6y + 3)$. Entonces $\nabla f(x,y) = o \Leftrightarrow (x,y) = \left(1, \frac{1}{2}\right)$. La matriz hessiana es $\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial e_1 \partial e_1} & \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial e_1 \partial e_2} \\ \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial e_2 \partial e_1} & \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial e_2 \partial e_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$, por lo que al tener los dos valores propios negativos, $d^2 f_{\left(1, \frac{1}{2}\right)}$ es definida positiva y por consiguiente f presenta un máximo en $\left(1, \frac{1}{2}\right)$, vale $f\left(1, \frac{1}{2}\right) = \frac{11}{4}$.

3º Tomemos $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ con $f(x,y) = -x^2 + 2y^2 + 2x - 2y + 2$. El gradiente en un punto cualquiera queda $\nabla f(x,y) = (-2x + 2, 4y - 2)$. Así que $\nabla f(x,y) = o \Leftrightarrow (x,y) = \left(1, \frac{1}{2}\right)$. La matriz hessiana es $\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial e_1 \partial e_1} & \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial e_1 \partial e_2} \\ \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial e_2 \partial e_1} & \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial e_2 \partial e_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ por lo que f no presenta extremo en $\left(1, \frac{1}{2}\right)$.

Aquí decimos que hay un punto silla o punto de ensilladura en $\left(1, \frac{1}{2}, f\left(1, \frac{1}{2}\right)\right)$.

4 Aspectos didácticos

El tema elegido es de suma relevancia en la formación docente, en particular en la Especialidad Matemática. Desde el punto de vista teórico aporta generalidad a los conceptos estudiados para funciones reales de una variable real. De esta forma, varias cuestiones estudiadas en Análisis I, por ejemplo, pueden verse ahora como casos particulares de funciones reales de variables reales.

Cuando vamos a estudiar el comportamiento de una función en los alrededores de un punto es natural considerar la función lineal que mejor aproxima la variación de la función a estudiar. Para ello dicha función lineal debería existir. De eso se ocupa la Diferenciabilidad. Por ello la importancia del tema. Las funciones lineales son muy fáciles de trabajar y manipular. Así que

saber que determinada función lineal aproxima muy bien una determinada variación funcional va a tener como consecuencia que al estudiar en los alrededores de un punto lo lineal obtendremos, más o menos, el comportamiento funcional.
Por otro lado, la Diferenciabilidad ocupa un papel central dentro del campo conceptual denominado Cálculo Diferencial. La mayoría de las aplicaciones en el campo de la ingeniería utilizan para modelar las situaciones problemáticas, funciones diferenciables en un abierto o en un punto dentro de un abierto. Entonces, desde el punto de vista de las aplicaciones en el mundo real, el futuro docente debe conocer estos hechos para poder trasponer a las aulas que tenga a cargo y trabajar con problemas cotidianos.
En el desarrollo del tema hemos propuesto un orden y una selección de contenidos que creemos la más adecuada para un curso en la formación de futuros docentes. Se han enumerado cuestiones teóricas importantes y sus derivaciones en el campo de las aplicaciones.
Es de suma importancia metodológica separar la definición de función diferenciable con la existencia de derivadas parciales. Es decir, que no quede atada la definición de diferenciable en un punto a la existencia de las derivadas parciales en él. Luego se vinculan ambos conceptos con las proposiciones adecuadas. Este camino es mucho más adecuado para que el estudiante no se haga la idea de que aumentar el número de variables en el dominio es un mero problema de operatoria. No se puede hacer un estudio del comportamiento de una función estudiando el comportamiento en las variables del dominio por separado.
Para dar globalidad al estudio de una función es necesario vincular el concepto nuevo introducido con aquellos estudiados con anterioridad. Por este motivo se incluyen propiedades y ejemplos que vinculan la diferenciabilidad con la continuidad y la derivada direccional.
Por otra parte, es importante, cuando se pueda, hacer una interpretación geométrica de los resultados. Esto en general aporta ideas sobre el comportamiento de una función en los alrededores de un punto. El análisis dinámico variacional es mucho más conceptual y necesita de mayor abstracción que el geométrico.
La secuencia lógico-deductiva es la propuesta en el desarrollo dado.
Desde el punto de vista metodológico, para la introducción de una cierta definición, se presentarán ejemplos de funciones a los estudiantes para que investiguen ciertas particularidades. Luego de plasmar la definición y adoptarla, discutiendo su pertinencia, se trabajarán ejemplos y no ejemplos.
Cuando estamos trabajando con una función que cumple con determinada definición, observamos ciertas propiedades que se cumplen también. Esto se traduce en ciertas proposiciones. Algunas como condiciones necesarias y no suficientes, otras suficientes pero no necesarias, y a veces, necesarias y suficientes. Es necesario trabajar ejemplos y contraejemplos para observar lo que ocurre con determinada propiedad.
A la hora de formalizar cierta propiedad, dependiendo del caso, podemos construir la demostración entre todos en el aula, puede mostrarla el docente responsable de la clase, se pueden dar algunas ideas para que el estudiante la construya o se puede sugerir algún texto donde leerla. Se tratará de utilizar todas las modalidades descritas para todos los casos donde sea posible.
Por lo dicho es que es de suma importancia la elección de los ejemplos, no ejemplos, ejercicios, problemas y aplicaciones en general. Deben seleccionarse de manera adecuada para que de su resolución no se desprenda una mera ejercitación. En un nivel terciario es importante la construcción de conocimiento y para ello el estudiante de formación docente

debe poder lograr cierta independencia en el trabajo. Por ello es por lo que proponemos además de ejercicios, problemas, donde hay que aplicar ciertas técnicas conocidas y además deducir alguna propiedad relevante.
Los materiales didácticos propuestos para usar son los más variados. Para empezar los de aula obvios (pizarrón) pero también la temática es propicia para usar ordenador con algún software específico (hay varios disponibles). Esto puede usarse de manera individual, para ayudarse con los cálculos, o de manera colectiva, para mostrar ciertas propiedades. Además, es necesario tener libros de cabecera (el o los más apropiados a la temática propuesta) y libros de consulta. Por otra parte, también es posible considerar bibliografía específica para la parte práctica.
Se propondrán una selección personal de ejercicios, problemas y aplicaciones. Seleccionados con los criterios descritos. Es de esperar que los estudiantes trabajen sobre los mismos sin perjuicio de otros provenientes de la bibliografía propuesta.
Por tanto, se pretende un trabajo fuerte, en equipo (preferentemente) o individual fuera del aula. Las horas de aula se optimizarán para las cuestiones más conceptuales, definiciones y proposiciones que involucren una demostración delicada.
Tanto el manejo de ejemplos, contraejemplos y teoremas escritos en el cuerpo de este trabajo, muestran el grado de rigurosidad que se pretende en el desarrollo del tema. Además, por motivos de espacio, algunas de las demostraciones se obviaron, pero esto no quiere decir que no se trabajen con los estudiantes. Todo lo escrito es para considerar en el trabajo sobre la temática propuesta, ya sea de aula o extra.
Para la evaluación se considerarán varias modalidades. Por escrito en forma presencial, por escrito en forma de entrega y en formato oral en aula. Los contenidos para cada modalidad pueden variar desde ejercicios y aplicaciones para las modalidades escritas, hasta definiciones y proposiciones para los orales. La idea de los orales es muy formativa para los estudiantes, ya que deben planificar el mismo con mucho cuidado.
Como libro de cabecera para este tema se recomienda “Cálculo Infinitesimal de Varias Variables” de Juan de Burgos. Utiliza un orden similar al propuesto por nosotros, tiene un nivel matemático y un tratamiento didáctico muy adecuados.
Además, recomendamos “Curso de Análise” volumen 2 de Elon Lages Lima, “Calculus” volumen 2 de Tom Apóstol e “Introducción al Análisis Matemático” volumen 2 de Hebe Rabuffetti como libros de consulta entre otros. Por otro lado, el “Cálculo y Geometría Analítica” volumen 2 de Larson, Hostetler y Edwards posee un banco de ejercicios y problemas muy importante y abundante.

5 Proyección en líneas de investigación.

A lo largo de los años de experiencia con cursos en los cuales aparece la Diferenciabilidad como tema podemos destacar varios aspectos que presentan problemas para los estudiantes, los cuales pueden ser o son actualmente pasibles de investigación.
Podemos destacar:
1° La creencia de que derivable implica diferenciable. Ante la pregunta de si determinada función es o no diferenciable en un punto, aparecen respuestas de tipo “si tiene derivadas parciales sí”.
2° Carencias en el manejo de algoritmos para la obtención de las funciones derivadas parciales. Cual es la variable en la que estamos estudiando los incrementos y cuales permanecen sin cambios. Esto se expresa en problemas operatorios.

3° Interpretación geométrica muy pobre o inexistente, en los casos en que tenga sentido la misma. Solo aquellos estudiantes destacados concluyen por ejemplo "si la función es diferenciable en un punto y sale de $\mathbb{R}^2$ para llegar a $\mathbb{R}$, la superficie asociada tiene plano tangente en el punto".
4° Dificultades en el cálculo de límites de varias variables. Aquí un problema bastante serio. Si aparecen dificultades en el cálculo de límites, es bastante común tener más dificultades aún para poder comparar el infinitésimo del resto con el infinitésimo de incremento en las variables.
5° Dificultades u olvido a la hora de chequear ciertas condiciones para poder aplicar ciertos resultados. Por ejemplo, ante una aplicación para la Física, que involucra determinar máximos y mínimos relativos, chequear si estamos frente a una función diferenciable o no, si existen derivadas parciales de orden superior al primero y son continuas para utilizar la diferencial segunda, etc. Este es un error bastante común, no considerar las reglas de juego posibles para la aplicación propuesta.
Varias investigaciones recientes muestran que es tan importante tener en cuenta las respuestas correctas de estudiantes como las erróneas. Estas comprenden puntos de vista variados como por ejemplo aspectos que involucran los procesos de enseñanza aprendizaje, procesos cognitivos y obstáculos epistemológicos.
La investigación en estos aspectos puede llevar a conclusiones que deriven en apoyo y promoción de cambios en las prácticas de aula (ejemplos y no ejemplos a utilizar, definiciones posibles, proposiciones a demostrar, etc.), en los ejercicios propuestos, en las aplicaciones y por supuesto en lo metodológico.
El error no hay que sancionarlo sino utilizarlo en provecho de la obtención de datos que permitan descubrir donde están las dificultades.
En particular podríamos proponer una línea de investigación que involucre el primero de los puntos.
Para ello, relevaríamos la enseñanza del tema en formación docente en cuanto a lo metodológico y cuáles son los posibles problemas que podrían identificarse respecto de la asociación de las derivadas parciales a la diferenciabilidad. Como uno de los objetivos tendríamos que ver si es cierto que ciertas prácticas derivan en las confusiones mencionadas.
Creo que, si los ejemplos, ejercicios y aplicaciones que proponemos a los estudiantes, no son elegidos con el cuidado adecuado y simplemente nos dedicamos a lo meramente algorítmico, la asociación derivable implica diferenciable, en funciones de varias variables, es lo que deberíamos obtener de la investigación.

6 Bibliografía

Apostol, T. M. (2002). *Calculus* (Vol. II). Barcelona: Reverté.

Burgos, J. d. (1995). *Cálculo Infinitesimal de Varias Variables.* Madrid: McGraw-Hill.

Gómez, P., & Delgado, J. (2012). La diferenciabilidad de las funciones de varias variables. Una propuesta de tratamiento metodológico. *Clame. 25*, págs. 603-614. México: Colegio Mexicano de Matemática Educativa.

Guillemin, V., & Pollack, A. (1974). *Differential Topology.* New Jersey: Prentice-Hall.

Kudriávtsev, L. (1988). *Curso de Análisis Matemático* (Vol. 1 y 2). Moscú: Mir.

Larson, R., Hostetler, R., & Edwards, B. (2000). *Cálculo y Geometría Analítica* (Vol. 2). México: Mc Graw Hill.

Lima, E. (2000). *Curso de Análise* (Vol. 2). Río de Janeiro: IMPA, Projeto Euclides.

Marsden, J., & Tromba, A. (1991). *Cálculo Vectorial.* Wilmington: Addison-Wesley Iberoamericana.

Milnor, J. (1997). *Topology from the Differentiable Viewpoint.* Princeton: Princeton University Press.

Nardín, A., Montalván, M., Salgado, M., & Pérez, O. (2017). Errores de los estudiantes en el tema de derivada de funciones de varias variables. *Paradigma, XXXVIII*(1), 312-330.

Pita Ruiz, C. (1995). *Cálculo Vectorial.* México: Prentice Hall.

Rabuffetti, H. (2000). *Introducción al Análisis Matemático* (Vol. 2). Buenos Aires: El Ateneo.

Resnick, R., Halliday, D., & Krane, K. (1993). *Física* (Vol. 1). México: Compañía Editorial Continental.

Thomas, G. B. (2005). *Cálculo. Varias Variables.* México: Pearson.

Integración

Gustavo Franco

Aspectos disciplinarios: Fundamentación epistemológica de su relevancia disciplinaria

Considero que la relevancia disciplinaria del tema queda justificada por la extensión temporal histórica que abarca, por la complejidad de su construcción, y por el interés que han demostrado célebres matemáticos en desarrollar y perfeccionar técnicamente una herramienta que ha sido útil, no solo a la propia matemática, sino a otras disciplinas como la física y la astronomía. A continuación describiré en forma sucinta la evolución del Análisis Infinitesimal que es el contexto en el que se desarrolla el tema Integración.

Fue en el seno de la escuela pitagórica donde se presentó lo que actualmente se considera como la primera cuestión de carácter infinitesimal: la aparición de los irracionales. Los irracionales generaron una contradicción irresoluble para los pitagóricos, ya que estos consideraban que los números (*naturales*; sin el cero, ya que los antiguos griegos no lo conocieron; y a veces también sin el uno, ya que la unidad era el ladrillo a partir del cual se construían los números, pero no era considerado un número en sí mismo) eran intrínsecos a la realidad. Aunque en la demostración —que se atribuye a los pitagóricos— de la inconmensurabilidad entre diagonal y lado de un cuadrado, no aparecen rasgos infinitesimales, pronto los segmentos inconmensurables mostraron conexión con ciertos procesos que no tienen fin (la *antipháiresis*, o algoritmo de la división euclidea, aplicado a magnitudes conmensurables concluye después de un número finito de pasos, pero para magnitudes inconmensurables este proceso continúa *ad infinitum* (Montesinos, 2007, p. 33)). El infinito no solo se hizo presente en las investigaciones de los pitagóricos, también en los ataques dirigidos a estos que hiciera la escuela rival de los eleatas a través de las conocidas paradojas de Zenón; paradojas que cuestionaban el movimiento mismo, el cual se tornaba imposible en una concepción como la pitagórica. Estas cuestiones plantearon a los estudiosos de la matemática problemas técnicos que requerían solución.

> La dirección hacia la cual debía apuntar la solución era evidente: había que “salvar” los segmentos inconmensurables; lo contrario hubiera sido mutilar de modo fatal la geometría; y en tal sentido la alternativa era: o se investigaba la manera de tratar las propiedades de los segmentos inconmensurables (en primer lugar la proporcionalidad) utilizando los números conocidos; o se ampliaba ese conjunto de números agregándole otros entes que dieran cuenta de aquellas propiedades. De estas dos soluciones, los griegos adoptaron la primera, nosotros actualmente utilizamos la segunda. (Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas [Conicet], 1987, p. 72)

La solución a ambos problemas, el de los irracionales y el del infinito, se debe a Eudoxo de Cnido (406-355). Eudoxo da una definición por abstracción de proporcionalidad válida para cantidades conmensurables o no; un principio (el hoy llamado *postulado de Arquímedes*), y un método (más tarde llamado de *exhaución*) que permitirían resolver rigurosamente las cuestiones de carácter infinitesimal. Pero es Arquímedes, en el siglo III a.C., quien saca provecho del método de exhaución obteniendo propiedades de curvas y sólidos.

La contribución medieval, aunque puede no haber sido decisiva, es importante. Los maestros de Oxford y de París, introducen un concepto equivalente a *variación de una cualidad* (al que denominan *latitud de forma*), que incluye como caso particular la variación de la velocidad (la actual aceleración), concepto desconocido por los antiguos. El estudio de la latitud de forma les permitió una clasificación de los movimientos y algunos resultados interesantes. Otro progreso realizado por los maestros medievales surge de representar gráficamente a las latitudes de forma, lo cual implica un importante grado de abstracción ya que el ente representado no es homogéneo con su representación: los segmentos representan tiempos o velocidades, las áreas representan distancias.

A partir del siglo XV, dos acontecimientos de carácter técnico aportarán una nueva mirada sobre los conceptos infinitesimales: el Álgebra y el conocimiento cada vez más profundo que se tiene de los grandes matemáticos de la antigüedad, en especial de Arquímedes.

La labor de los matemáticos de los siglos XVI y XVII en torno a las cuestiones infinitesimales fue fecunda, pero adolecía de dos inconvenientes: por un lado, carecía de unidad; por otro de rigor. En cuanto al primero, algunos matemáticos como Fermat, Barrow y, quizás, Pascal, habían estado a punto de organizar resultados aparentemente inconexos, pero razones circunstanciales más que técnicas se lo habían impedido. Serán Newton y Leibniz quienes den unidad y estructura orgánica a toda aquella labor anterior. En cuanto al segundo de los inconvenientes, solo se sorteará un siglo y medio después.

Newton trató las cuestiones infinitesimales desde los puntos de vista algebraico, geométrico y cinemático; este último dará lugar a su contribución más original: el método de las fluxiones. En la concepción de Leibniz, el énfasis recae en el aspecto algorítmico.

> Si desde el punto de vista formal los "cálculos" de Newton y de Leibniz mostraban diferencias, desde el punto de vista de sus fundamentos revelaban igual debilidad […] Sin embargo, de la vaga penumbra de esos conceptos básicos había nacido un "cálculo", un algoritmo semejante al algebraico pero mucho más poderoso, cuyas reglas y métodos no solo proporcionaban resultados correctos sino que habían logrado exitosas aplicaciones en la geometría, en la mecánica, en la astronomía. (Conicet, 1987, p. 99)

Muchos matemáticos del siglo XVIII realizaron intentos para dar fundamento sólido a los nuevos métodos y a los resultados que se iban acumulando, pero todos fueron infructuosos. En cambio, el siglo XIX señala una nueva y última etapa en el desarrollo del Análisis Infinitesimal. Así como a finales del siglo XVIII se había logrado unificar y sistematizar un conjunto de procedimientos y problemas de carácter infinitesimal, en la primera mitad del siglo XIX se le logra dar fundamento.

> Tal fue la labor de los matemáticos del rigor del siglo pasado: Bolzano, Abel, Cauchy, Weierstrass, que, mediante recursos técnicos, definiciones precisas, y formulaciones claras del campo de validez de las fórmulas y definiciones, lograron fundar los conceptos infinitesimales como resultados de ciertas operaciones aritméticas realizadas entre números. (Conicet, 1987, p. 110)

Este proceso es el que convirtió el antiguo *Cálculo Infinitesimal* en el *Análisis Infinitesimal* actual.

Aspectos didácticos: Relevancia del tema para la enseñanza en la formación de formadores

Considero que el tema es relevante para la enseñanza en la formación de formadores por tres motivos: (1) el *propedéutico*, (2) el *pragmático* y (3) el *cultural*.

El motivo propedéutico al que hago referencia, tiene relación con la importancia y persistencia que tienen las integrales a lo largo del profesorado de matemática: el tema es abordado por primera vez en el curso de Análisis 1 y luego es un insumo necesario para los cursos de Análisis 2, Probabilidad y Estadística, y Profundización en Análisis (la información fue extraída de los programas que se encuentran en la página web del Consejo de Formación en Educación).

El motivo al que denominé pragmático tiene relación con que, Integración, es un tema presente, implícita o explícitamente, en los programas de varios cursos de matemática de la enseñanza secundaria (por lo tanto, su conocimiento resulta imprescindible para un futuro profesor de matemática): en el programa de Matemática II, de segundo año de bachillerato, diversificación científica, se presenta en forma introductoria bajo el título *Cálculo de áreas*, y se debe abordar el método de exhaución para el cálculo de áreas bajo una parábola. En el programa de Matemática de tercer año de bachillerato, diversificación biológica, opción ciencias biológicas, aparece bajo el título *Integrales*, y se debe abordar el cálculo de áreas bajo una curva, las nociones de integral definida y de primitiva de una función, y el teorema de Barrow. En el programa de Matemática I de tercer año de bachillerato, diversificación científica, opción Físico Matemática, aparece bajo el título *Integrales* e incluye: cálculo de primitivas, integral indefinida, cálculo de área bajo una curva e integral definida. (La información fue extraída de los programas que se encuentran en la página web del Consejo de Educación Secundaria.)

Por último, debido a la importancia epistemológica que el tema tiene para la matemática (como justifiqué en la sección anterior), es que considero que debe formar parte del capital cultural de un futuro profesor de matemática.

Aspectos disciplinarios y didácticos: Conceptos o ideas involucrados en el tema y estrategias

La siguiente propuesta está pensada para el curso de Análisis 1 correspondiente al segundo año del profesorado de matemática. El tema Integración se desarrollará utilizando como soporte una presentación en PowerPoint. La presentación será proyectada sobre una pizarra blanca (de este modo se pueden realizar agregados a las imágenes y al texto según lo requieran las eventuales explicaciones y comentarios que se deban hacer). Por otra parte, los estudiantes contarán con la presentación en papel de forma tal que solo deban tomar nota de alguna de las cuestiones que crean esclarecedoras para ellos.

El tema comenzará con la definición de *partición de un intervalo* seguida de varios ejemplos.

Nota: (1) Toda partición de $\left[a,b\right]$ es un conjunto finito al cual pertenecen *a* y *b*.

(2) Al conjunto formado por todas las particiones de $\left[a,b\right]$ lo notaremos $\mathscr{P}_{[a,b]}$.

Se define luego *partición más fina* que otra y se brindan ejemplos.

<u>Actividad</u>: Probar que si P_1 y P_2 son particiones de $\left[a,b\right]$, entonces $P_1 \cup P_2$ también es una partición de $\left[a,b\right]$ y es más fina o igual que P_1 y que P_2.

Se define *intervalos de una partición*, *norma de una partición* y se proponen ejemplos.

A continuación se realiza la siguiente observación:
Consideremos $P \in \mathscr{P}_{[a,b]}$ tal que $P = \left\{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\right\}$ y una función *f* acotada en $\left[a,b\right]$.

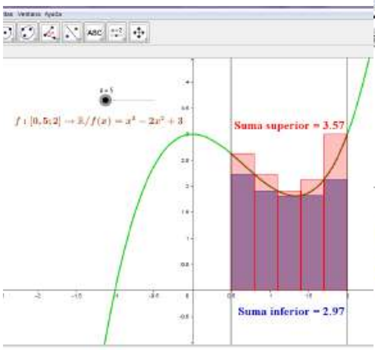
$$f \text{ está acotada en } \left[a,b\right] \Rightarrow f \text{ está acotada en } \left[x_{i-1}, x_i\right], \forall i \in \mathbb{N}^*,\ i \le n \Rightarrow \begin{cases} \exists e_i = \underline{\text{extr}}\left(f\left[x_{i-1}, x_i\right]\right) \\ \exists E_i = \overline{\text{extr}}\left(f\left[x_{i-1}, x_i\right]\right) \end{cases}$$

La observación anterior es clave para las definiciones de *suma inferior* y *superior* y, por tanto, para la definición de *función Riemann integrable*.

Luego de la observación se considera $P \in \mathscr{P}_{[a,b]}$ y una función *f* acotada en $\left[a,b\right]$, y se define *suma inferior* y *suma superior* de la función *f* correspondiente a la partición *P*; a la primera se la nota $s_f\left(P\right)$ y a la segunda $S_f\left(P\right)$.

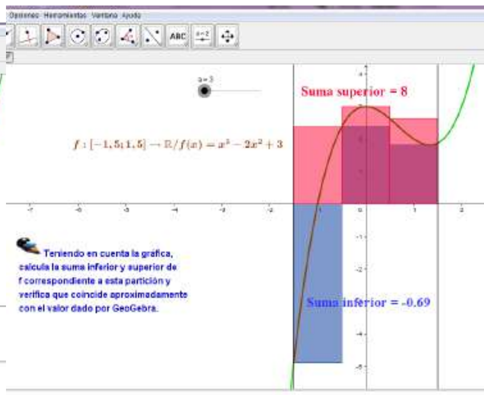
Se presentan ejemplos de sumas inferiores y superiores de una función utilizando el software GeoGebra (GG). En los mismos, a través de un deslizador, se varía la cantidad de intervalos de la partición y se puede observar cómo se modifican las sumas inferiores y las superiores. (A través de los códigos QR, o de los enlaces, se puede acceder a los archivos de GG.)

<u>Ejemplo 1</u>:



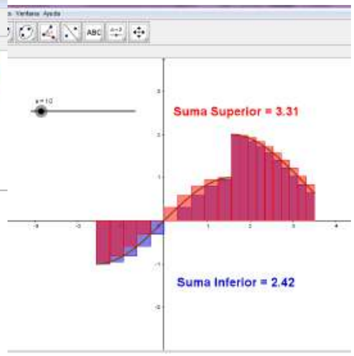
www.geogebra.org/m/gpck3byg

<u>Ejemplo 2</u>:



www.geogebra.org/m/d53dzys

<u>Ejemplo 3</u>:



www.geogebra.org/m/mfjecbkz

Es importante observar que GG trabaja solo con *particiones homogéneas*, es decir particiones en donde todos los intervalos de la partición tienen la misma amplitud. Por otra parte, se proponen tres ejemplos debido a que quise considerar funciones que tuvieran distintas particularidades: en el primero el dominio de la función es un conjunto de reales positivos, en el segundo es un conjunto al que pertenecen reales positivos, negativos y el cero, y en el tercero la función considerada no es continua. Creo importante proponer a los estudiantes ejemplos variados para evitar que generalicen aspectos irrelevantes del concepto, que eventualmente pudieran obstaculizar o dificultar la comprensión de futuros conceptos matemáticos:

> Cada ejemplo, ineludiblemente, posee también características que son atributos no requeridos, directa ni indirectamente, por la definición (atributos irrelevantes). Aunque es innegable que los ejemplos colaboran al interpretar una definición, el problema que involucran radica en que si la gama que se presenta al alumno no es lo suficientemente rica se corre el riesgo de que generalice los atributos comunes a dichos ejemplos como si fueran todos relevantes al concepto. (Calvo, 2001, p. 39)

Un último comentario, en el segundo de los ejemplos, cuando el deslizador toma el valor 3 (correspondiente a la cantidad de intervalos de la partición), se les solicita a los estudiantes la realización de una actividad: *Teniendo en cuenta la gráfica, calcula la suma inferior y superior de f correspondiente a esta partición y verifica que coincide aproximadamente con el valor dado por GeoGebra*. Esta actividad permite que los estudiantes puedan, además de poner en juego algunos de los conceptos ya trabajados en el curso (como el de extremo relativo de una función), concretar las definiciones de suma inferior y superior, lo cual considero que permite una mayor apropiación de dichos conceptos.

A continuación se prueba que: (1) toda suma inferior de una función correspondiente a una cierta partición es menor o igual que toda suma superior correspondiente a la misma partición, (2) si P_1 y P_2 son dos particiones de $\left[a,b\right]$, y P_2 es más fina que P_1, entonces $s_f\left(P_1\right) \leq s_f\left(P_2\right)$ y $S_f\left(P_1\right) \geq S_f\left(P_2\right)$, y (3) toda suma inferior es siempre menor o igual que cualquier suma superior correspondiente a cualquier partición.

<u>Actividad</u>: Consideremos una función f acotada en $\left[a,b\right]$ y los conjuntos $A=\left\{s_f\left(P\right) / s_f\left(P\right) \in \mathbb{R} \wedge P \in \mathscr{P}_{[a,b]}\right\}$ y $A'=\left\{S_f\left(P\right) / S_f\left(P\right) \in \mathbb{R} \wedge P \in \mathscr{P}_{[a,b]}\right\}$.
Prueba que existe $\overline{\text{extr}}\left(A\right)$ y $\underline{\text{extr}}\left(A'\right)$.

Para la actividad anterior es clave el hecho de que la función *f* está acotada en $\left[a,b\right]$, por lo tanto lo será para las definiciones de *integral inferior* y de *integral superior* que aparecerán a continuación, dado que se definen como el extremo superior del conjunto *A* y como el extremo inferior del conjunto *A'* respectivamente. A la integral inferior de *f* en $\left[a,b\right]$ se la nota $\underline{\int_a^b} f$, y a la superior $\overline{\int_a^b} f$.

Cuando la integral inferior es igual a la integral superior, se dice que la función es *Riemann integrable* o *R-integrable*, y al real $\underline{\int_a^b} f$ se lo denomina integral de *f* en $\left[a,b\right]$, y se lo nota $\int_a^b f$ o también $\int_a^b f(x)dx$.

En resumen, la acotación de la función *f* en $\left[a,b\right]$ permite definir la suma inferior y la suma superior y, por tanto, también la integral inferior y la superior. Entonces, la acotación de la función es central en la definición de función Riemann integrable.

Considero que las siguientes actividades permitirán afianzar el concepto de función Riemann integrable.

<u>Actividad</u>: Consideremos $g:\left[a,b\right]\to\mathbb{R}\,/\,g(x)=k\ \left(k\in\mathbb{R}\right)$.

¿*g* es Riemann integrable en $\left[a,b\right]$? En caso afirmativo halla $\int_a^b g$.

<u>Actividad</u>: Consideremos la función de Dirichlet:

$$h:\left[a,b\right]\to\mathbb{R}\,/\,h(x)=\begin{cases}1, \text{ si } x\in\mathbb{Q}\\ 0, \text{ si } x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}\end{cases}$$

¿*h* es Riemann integrable en $\left[a,b\right]$? En caso afirmativo halla $\int_a^b h$.

<u>Actividad</u>: La única condición (necesaria) que se ha impuesto para que *f* sea R-integrable en $\left[a,b\right]$ es que $f\left(\left[a,b\right]\right)$ esté acotado. Pero, ¿es condición suficiente que $f\left(\left[a,b\right]\right)$ esté acotado para que *f* sea R-integrable en $\left[a,b\right]$?

Algunas consideraciones sobre las actividades anteriores. (1) Se puede observar que tanto en la primera de las tres actividades como en la segunda se solicita, *en caso afirmativo*, hallar la integral. Si bien la función *g* es R-integrable y la *h* no, considero que no es adecuado solicitar que hallen la integral solo en el caso en que la función es R-integrable porque sugiere una respuesta. (2) Una consideración didáctica: creo central en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática contar no solo con ejemplos sino con *no-ejemplos* de un cierto concepto. (La construcción de no-ejemplos implica considerar condiciones necesarias que no son verificadas por el concepto.) Para delimitar el alcance de un concepto, es importante no solo tener ejemplos de lo que un concepto es, sino también ejemplos de lo que no es. Los no-ejemplos estarían enriqueciendo la imagen conceptual que vamos formando de los distintos conceptos. Las personas aprendemos también por contrastes: mostrar las similitudes y las diferencias nos permite una comprensión más profunda y precisa. Como señala Bishop (1999, p. 40): “Como argumenta George Kelly (1955), crecemos cognitivamente manejando contrastes. Los contrastes no solo nos proporcionan diferencias: también nos hacen reconocer similitudes porque dos fenómenos deben tener alguna similitud para que sus diferencias se puedan reconocer.” (3) La segunda actividad no solo presenta un no-ejemplo de función R-integrable sino que brinda una respuesta negativa a la pregunta de la tercera actividad: una función puede estar acotada y no ser R-integrable. (4) Las dos primeras actividades permiten considerar a la definición de función R-integrable en forma operativa, es decir, a partir de una serie de pasos que se realizan siguiendo la definición, se puede establecer si la función es o no R-integrable; además exigen repasar todos los conceptos abordados hasta el momento sobre el tema.

El siguiente ejemplo tiene la particularidad de que no usa la definición para establecer que la función $f:\left[0,b\right]\to\mathbb{R}\,/\,f(x)=x^2$ es R-integrable.

<u>Ejemplo</u>: Consideremos $f:\left[0,b\right]\to\mathbb{R}\,/\,f(x)=x^2$ y las particiones particulares (son todas homogéneas) $P_n=\left\{0,\frac{b}{n},\frac{2b}{n},\ldots,b\right\}$.

No es posible afirmar que $\underline{\text{extr}}\left\{S_f(P_n)\right\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ es $\overline{\int_0^b} f$, debido a que no estamos considerando las sumas superiores para todas las particiones posibles, sino para algunas particulares. Pero como $\lim\limits_{n\to+\infty} S_f(P_n)\geq \overline{\int_0^b} f$ y $\lim\limits_{n\to+\infty} s_f(P_n)\leq \underline{\int_0^b} f$, si $\lim\limits_{n\to+\infty} S_f(P_n)=\lim\limits_{n\to+\infty} s_f(P_n)$, entonces $\overline{\int_0^b} f=\underline{\int_0^b} f$ y, por lo tanto, f sería R-integrable en $\left[0,b\right]$.

Ahora bien: $s_f(P_n)=0+\dfrac{b}{n}.\dfrac{b^2}{n^2}+\dfrac{b}{n}.\dfrac{4b^2}{n^2}+\ldots+\dfrac{b}{n}.\dfrac{(n-1)^2b^2}{n^2}=\dfrac{b^3}{n^3}\sum\limits_{i=0}^{n-1} i^2=$

$$=\frac{b^3}{n^3}.\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}=\frac{b^3}{6}.\frac{(n-1)(2n-1)}{n^2}\underset{n\to+\infty}{\to}\frac{b^3}{3}$$

Análogamente se puede probar que $S_f(P_n)\underset{n\to+\infty}{\to}\dfrac{b^3}{3}$.

Entonces: $\overline{\int_0^b} f=\underline{\int_0^b} f$, de lo cual se puede concluir dos cosas: (1) f es Riemann integrable en $\left[0,b\right]$ y (2) $\int_0^b x^2\,dx=\dfrac{b^3}{3}$.

El teorema siguiente (así como otros que aparecerán más adelante) se solicita que sea demostrado, en forma voluntaria, por un par de estudiantes (uno la proposición directa y otro la recíproca). Considero relevante que los estudiantes realicen demostraciones en la pizarra, por dos motivos fundamentales: (1) es necesario, como futuros docentes, que los estudiantes desarrollen la capacidad de comunicarse adecuadamente, desde el punto de vista oral y escrito (la comunicación escrita implica un uso adecuado de la pizarra, de la simbología matemática, pero también de la gramática y la ortografía del castellano) y (2) es importante, dadas las condiciones actuales de aprobación de la asignatura, generar ámbitos para que los estudiantes y el profesor puedan simular la situación de una prueba oral.

<u>Teorema (Condición necesaria y suficiente para que una función sea R-integrable)</u>

Consideremos $f:\left[a,b\right]\rightarrow\mathbb{R}$ acotada.

f es R-integrable $\Leftrightarrow \forall\varepsilon\in\mathbb{R}^{+},\exists P\in\mathscr{P}_{[a,b]}\,/\,S_f\left(P\right)-s_f\left(P\right)<\varepsilon.$

El siguiente ejemplo, muestra el potencial del teorema anterior: la condición necesaria y suficiente es una herramienta que permitiría demostrar si una función es R-integrable sin tener que recurrir a la definición.

<u>Ejemplo</u>: Consideremos $c\in\left(a,b\right)$ y $f:\left[a,b\right]\rightarrow\mathbb{R}\,/\,f(x)=\begin{cases}\alpha, \text{ si } x=c\\ 0, \text{ si } x\neq c\end{cases}$ con $\alpha\in\mathbb{R}^{+}$.

Observemos que $s_f(P)=0,\ \forall P\in\mathscr{P}_{[a,b]}$ (^{1}).

Por otra parte, consideremos $Q_n\in\mathbf{P}_{[a,b]}$ tal que $Q_n=\left\{a,c-\frac{1}{n},c+\frac{1}{n},b\right\}$.

Ahora bien,

$$S_f(Q_n)=\left(c-\frac{1}{n}-a\right)0+\left(c+\frac{1}{n}-c+\frac{1}{n}\right)\alpha+\left(b-c-\frac{1}{n}\right)0\Rightarrow S_f(Q_n)=\left(\frac{2}{n}\right)\alpha\ \ (^2)$$

Por (^{1}) y (^{2}): $S_f(Q_n)-s_f(Q_n)=\left(\frac{2}{n}\right)\alpha\underset{n\to+\infty}{\rightarrow}0.$

Por lo tanto, $\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^{+},\exists Q_n\in\mathscr{P}_{[a,b]}$ tal que $S_f(Q_n)-s_f(Q_n)<\varepsilon\Rightarrow$

$\Rightarrow$ f es R-integrable y $\int_a^b f(x)dx=0,$ ya que $s_f(P)=0,\ \forall P\in\mathscr{P}_{[a,b]}$.

A continuación se solicita que un estudiante voluntariamente demuestre la siguiente proposición:

<u>Teorema (Condición suficiente para que una función sea R-integrable)</u>

$f:\left[a,b\right]\rightarrow\mathbb{R}$ es monótona, entonces f es R-integrable en $\left[a,b\right]$.

La demostración del siguiente teorema, debido a la complejidad que presenta, es comentada en la pizarra por el docente (lo comentado incluye los aspectos cruciales de la demostración). Luego, como actividad, los estudiantes deberán escribir la demostración en forma ordenada.

<u>Teorema (Condición suficiente para que una función sea R-integrable)</u>

$f:\left[a,b\right]\to\mathbb{R}$ es continua, entonces f es R-integrable en $\left[a,b\right]$.

Para probar que f es R-integrable, se utilizará la condición necesaria y suficiente, por lo tanto se debe demostrar que $\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^+,\exists P\in\mathscr{P}_{[a,b]}\,/\,S_f\left(P\right)-s_f\left(P\right)<\varepsilon$. Es útil pensar que ε es dato y que P es la incógnita: dado ε positivo (cualquiera), se debe poder encontrar una partición P que verifique la desigualdad anterior. Por tal motivo, se considera la familia de particiones del intervalo $\left[a,b\right]$: $P_n=\left\{a,a+\frac{b-a}{n},a+\frac{2(b-a)}{n},...,a+\frac{(n-1)(b-a)}{n},b\right\}$, con $n\in\mathbb{N}^*$, y se transforma el problema de hallar una partición P en las condiciones descritas anteriormente, en el problema de hallar $n\in\mathbb{N}^*$ tal que $S_f\left(P_n\right)-s_f\left(P_n\right)<\varepsilon$.

Ahora bien, $S_f\left(P_n\right)-s_f\left(P_n\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(E_i-e_i\right)\left(x_i-x_{i-1}\right)$.

Por otra parte, como por hipótesis f es continua en $\left[a,b\right]$, se puede afirmar que f es cont. en $\left[x_{i-1},x_i\right]$, $\forall i$ y, por Weierstrass:

$$\begin{cases}\exists c_i\in\left[x_{i-1},x_i\right]/\,f\left(c_i\right)=\text{máx}f\left(\left[x_{i-1},x_i\right]\right)=E_i\\ \exists d_i\in\left[x_{i-1},x_i\right]/\,f\left(d_i\right)=\text{mín}f\left(\left[x_{i-1},x_i\right]\right)=e_i\end{cases}$$

Lo cual permite escribir:

$$S_f\left(P_n\right)-s_f\left(P_n\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(E_i-e_i\right)\left(x_i-x_{i-1}\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(f(c_i)-f(d_i)\right)\left(x_i-x_{i-1}\right).$$

Si fuera posible encontrar un real k tal que $f(c_i)-f(d_i)<k,\ \forall i$, se estaría en condiciones de afirmar que:

$$S_f\left(P_n\right)-s_f\left(P_n\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(E_i-e_i\right)\left(x_i-x_{i-1}\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(f(c_i)-f(d_i)\right)\left(x_i-x_{i-1}\right)<k\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-x_{i-1}\right)=k.\left(b-a\right)$$

Pero como a su vez se quiere que $S_f\left(P_n\right)-s_f\left(P_n\right)<\varepsilon$, convendría que k fuera $\frac{\varepsilon}{b-a}$, para que así $k.\left(b-a\right)=\varepsilon$. Pero, ¿es posible, dado $\varepsilon>0$, hacer que $f(c_i)-f(d_i)<\frac{\varepsilon}{b-a}$? ¿De qué dependen $f(c_i)$ y $f(d_i)$? $f(c_i)$ y $f(d_i)$ dependen de c_i y d_i, y estos, a su vez, del intervalo $\left[x_{i-1},x_i\right]$. Es más: $\left|c_i-d_i\right|\le\left|x_i-x_{i-1}\right|=\left|a+\frac{i(b-a)}{n}-\left(a+\frac{(i-1)(b-a)}{n}\right)\right|=\frac{b-a}{n}$.

¿Alcanza con que c_i y d_i estén lo suficientemente próximos para poder garantizar que $f(c_i)-f(d_i)<\frac{\varepsilon}{b-a}$?

La respuesta es afirmativa y el motivo es la *continuidad uniforme*.

Como f es cont. en $\left[a,b\right]$ (nuevamente se utiliza la continuidad de f), es posible afirmar que f es uniformemente continua en $\left[a,b\right]$. Por lo tanto, dado el real positivo $\frac{\varepsilon}{b-a}$, se puede asegurar la existencia de un real positivo δ, tal que para todo x e y pertenecientes a $\left[a,b\right]$, si $|x-y|<\delta$, entonces $|f(x)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{b-a}$. Por lo tanto, como $|c_i-d_i|\leq|x_i-x_{i-1}|=\frac{b-a}{n}$, si se pudiera hacer $\frac{b-a}{n}<\delta$, entonces también sería $|c_i-d_i|<\delta$, de lo cual se podría concluir (como se quiere) que $|f(c_i)-f(d_i)|<\frac{\varepsilon}{b-a}$. Por tanto, la pregunta pasa a ser, ¿es posible hallar n para que $\frac{b-a}{n}$ sea menor que δ? Y la respuesta es nuevamente afirmativa, dado que $\frac{b-a}{n}\underset{n\to+\infty}{\to}0$.

En resumen, la secuencia que seguiría la demostración podría ser descrita a través de los siguientes pasos:

(1) A partir de $\varepsilon\in\mathbb{R}^+$ (cualquiera), se considera el real positivo $\frac{\varepsilon}{b-a}$.

(2) Dado $\frac{\varepsilon}{b-a}$, como la función f es uniformemente continua en $[a,b]$, es posible encontrar un real positivo δ, de modo tal que si $|x-y|<\delta$, entonces $|f(x)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{b-a}$.

(3) Ahora bien, dado δ, se considera n tal que $\frac{b-a}{n}<\delta$ (ya que, como $|c_i-d_i|\leq|x_i-x_{i-1}|=\frac{b-a}{n}$, si $\frac{b-a}{n}<\delta$, entonces $|c_i-d_i|<\delta$ y, por lo tanto, $|f(c_i)-f(d_i)|<\frac{\varepsilon}{b-a}$)

(4) Por último, como $S_f(P_n)-s_f(P_n)=\sum_{i=1}^{n}\left(f(c_i)-f(d_i)\right)\left(x_i-x_{i-1}\right)$ y $|f(c_i)-f(d_i)|<\frac{\varepsilon}{b-a}$, se tiene que $S_f(P_n)-s_f(P_n)=\sum_{i=1}^{n}\left(f(c_i)-f(d_i)\right)\left(x_i-x_{i-1}\right)<\frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-x_{i-1}\right)=\varepsilon$. Con lo cual se encontró, como se quería, una partición P_n que verifica $S_f(P_n)-s_f(P_n)<\varepsilon$.

Considero que la presentación de la demostración anterior permite ver desde dentro cómo funciona la demostración. En otras palabras, muestra los engranajes que iluminan el resultado, por lo cual puede considerarse como una prueba que explica. Hanna (1989) propone una distinción entre pruebas matemáticas que *prueban* y pruebas matemáticas que *explican*. Según la autora, si bien ambas sirven para establecer la validez de una proposición matemática, las últimas no solo muestran que una proposición es verdadera, sino también por qué lo es. Hanna (1989), siguiendo a Steiner (1978), prefiere decir que una prueba *explica* cuando muestra cuáles son las «propiedades características» vinculadas con lo que se desea probar. En este artículo, la autora concluye que las pruebas que explican deben ser favorecidas en la enseñanza de la matemática sobre las pruebas que prueban. Por su parte, de Villiers (1993), indica que para la mayoría de los matemáticos es seguramente más importante el aspecto explicativo de la demostración, que el de verificación: importa más «explicar el porqué» que «asegurarse».

Por otra parte, considero que la forma en que muchas veces se presentan las demostraciones en la clase de matemática genera, en los estudiantes, la idea errónea de que los matemáticos cuando realizan una prueba razonan de un modo secuencial, ordenado y conciso. Tradicionalmente las demostraciones en el aula se presentan en su forma acabada, desconociéndose que un matemático no llega de un modo lineal a demostrar por primera vez un cierto resultado; más bien lo consigue luego de realizar una serie de conjeturas, de ensayar y errar, etc. Esta forma tradicional de presentar las demostraciones, creo que genera una idea inadecuada en los estudiantes, que no contribuye a que ellos sean partícipes en la construcción del conocimiento matemático, ya que estas presentaciones no guardan relación con lo que les sucede al momento de enfrentarse a la hoja en blanco para realizar una prueba. Ahora bien, y para matizar la consideración anterior, según de Villiers (1993), una de las funciones de la demostración es la de *comunicación*. El autor señala que la demostración es una manera única de comunicar resultados matemáticos entre profesionales, entre profesores y alumnos y entre los propios alumnos. La demostración como forma de interacción social, indica de Villiers (1993), permite la negociación subjetiva, no solo del significado de los conceptos concernidos en la demostración, sino también, y de forma implícita, de los criterios para aceptar una demostración como válida. Por lo tanto, considero que es importante presentar también demostraciones en su forma acabada, porque permite establecer implícitamente, en la comunidad matemática del aula, cuáles son las demostraciones que serán aceptadas como válidas, pero seguramente sea conveniente que aparezcan a posteriori de una presentación menos rígida.

A continuación se proponen algunas propiedades de la integral como por ejemplo *aditividad*, *linealidad* y *comparación*, y algunas actividades de aplicación.
Se solicita que un estudiante demuestre voluntariamente la siguiente proposición:

<u>Teorema de valor medio para integrales</u>
Consideremos f R-integrable en $\left[a,b\right]$.

Si $E=\overline{\text{extr}}\left(f\left(\left[a,b\right]\right)\right)$ y $e=\underline{\text{extr}}\left(f\left(\left[a,b\right]\right)\right)$, entonces $e\leq\frac{\int_a^b f}{b-a}\leq E$.

<u>Nota</u>: Al número real $\frac{\int_a^b f}{b-a}$ se lo denomina *valor medio* de f en $\left[a,b\right]$.

A continuación se considera una función f R-integrable en $\left[a,b\right]$ y se define *área de la superficie plana limitada por las curvas de ecuaciones* $y=f(x)$, $y=0$, $x=a$ y $x=b$, y se solicita como actividad interpretar gráficamente dicha definición.

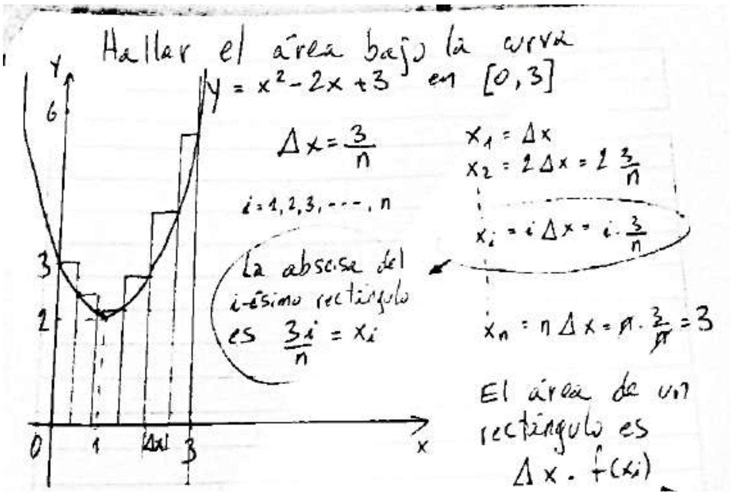
Muchas propuestas didácticas incluyen la visualización como parte de la actividad matemática, debido a varias razones. Polya (1965) recomienda recurrir a los diagramas porque entiende que es una importante herramienta heurística para la resolución de problemas. Otros autores argumentan que las múltiples representaciones de un concepto y el pasaje entre los diferentes tipos de registros favorecen la conceptualización y el progreso cognitivo de los estudiantes. Además un cambio de registro puede ayudar a abordar un problema desde una óptica diferente. La siguiente actividad, al igual que la inmediata anterior, busca que los estudiantes pasen de un registro algebraico a uno gráfico.

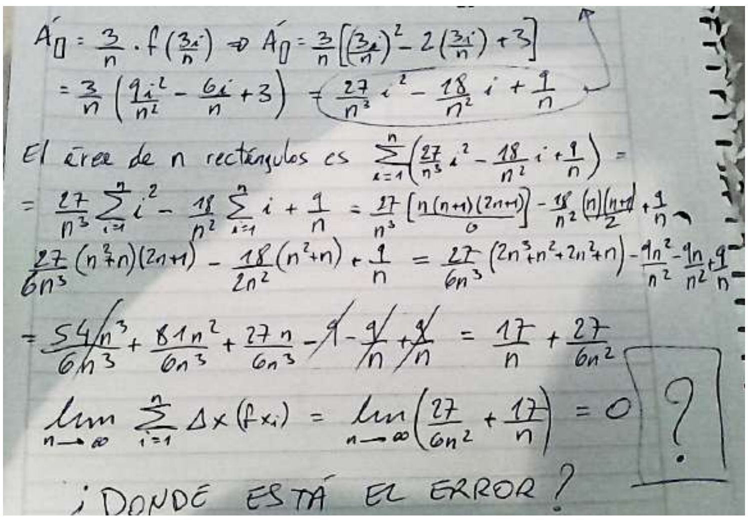
Actividad: Consideremos $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) \geq 0, \forall x \in [a,b]$.

Interpreta gráficamente el valor medio de *f* en $[a,b]$.

La siguiente actividad tiene como objetivo conectar al estudiante con su futuro rol docente. Para resolverla debe poner en juego varios conceptos matemáticos, pero sobre todo tiene que abrirse a la forma de razonar de otro individuo, sumergirse en un pensamiento que quizás le resulte ajeno, lo cual exige una cierta flexibilidad que creo importante en un futuro docente.

Actividad: Un estudiante del profesorado de matemática está pensando una actividad para sus alumnos de la práctica docente. Su idea es pedirles que hallen el área de la superficie limitada por las curvas de ecuaciones $y = f(x)$, $y = 0$, $x = 0$ y $x = 3$, siendo $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2 - 2x + 3$; pero se encuentra con un problema: el área le da cero, lo cual, según la gráfica, es imposible. ¿Puedes indicarle en dónde está el error?





A continuación se considera dos funciones f y g R-integrables en $\left[a,b\right]$ y se define *área de la superficie plana limitada por las curvas de ecuaciones* $y=f(x),\ y=g(x),\ y=0,\ x=a$ y $x=b$, y se solicita como actividad interpretar gráficamente dicha definición.
La siguiente actividad es una aplicación del teorema de Darboux y del teorema del valor medio para integrales.

Actividad: Demuestra la siguiente proposición:

$$f \text{ continua en } \left[a,b\right] \Rightarrow \exists c \in \left(a,b\right) / f(c) = \frac{\int_a^b f}{b-a}$$

La siguiente definición es clave para extender el concepto de integral que se viene desarrollando y permitirá definir la integral indefinida.

Definición: Consideremos una función $f: X \to \mathbb{R}$ $\left(X \subseteq \mathbb{R}\right)$ y $a,b \in X$, con $a<b$.

(1) Definimos $\int_a^a f = 0$ (2) Si f es R-integrable en $\left[a,b\right]$, definimos $\int_b^a f = -\int_a^b f$

La definición anterior permite generalizar algunas propiedades vistas anteriormente como por ejemplo la de linealidad: $\int_a^b \left(\alpha f + \beta g\right) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g$, la cual pasa a ser válida incluso cuando a no es menor que b.

La proposición que aparece en la siguiente actividad permite generalizar la propiedad de aditividad vista anteriormente: $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$, la cual pasará a ser válida para tres reales a, b y c cualesquiera.

Actividad: Prueba la siguiente proposición (*Identidad de Chasles*):
Si f es R-integrable en $\left[p,q\right]$, y a, b y c son tres puntos cualesquiera pertenecientes a $\left[p,q\right]$, se tiene que: $\int_a^b f + \int_b^c f + \int_c^a f = 0$.

Considero que la presentación de algunos fragmentos extraídos de libros de texto de matemática podría colaborar a que los estudiantes se acerquen a consultarlos, y a naturalizar su uso. El siguiente texto, que está extraído del libro *Principios de Análisis Matemático* de Linés (1983), introduce de una manera clara y amena el concepto de integral indefinida:

> Un progreso decisivo en el estudio de las integrales de funciones se consigue al introducir el concepto de *integral indefinida.*

Dada una función $f:\left[a,b\right]\to\mathbb{R}$ positiva y R-integrable, su integral mide el área del "conjunto de ordenadas" limitado por el eje *x*, el grafo de *f* y las rectas $x=a$ y $x=b$; y fijo el intervalo $\left[a,b\right]$ el valor de la integral es un *número.* Sin embargo, si se considera fijo el extremo *a* y variable el *b* del intervalo $\left[a,b\right]$ sobre el que se efectúa la integración, el área será una *función* del extremo *b.* Precisamente esta función, prescindiendo del carácter positivo de *f*, y del aspecto geométrico de la integral, es la llamada *integral indefinida* de f.
Antes de precisar los términos de esta definición, conviene introducir algunos cambios en los símbolos empleados para escribir la integral. La variable de integración, que hasta ahora se había designado por *x,* se cambiará por *t*, mientras que para el extremo variable *b* del intervalo de integración se empleará la letra *x*. (p. 429)

Definición: Consideremos una función *f* R-integrable en $\left[a,b\right]$ y $c\in\left[a,b\right]$.

A la función $\varphi:\left[a,b\right]\to\mathbb{R}\ /\ \varphi(x)=\int_c^x f(t)d(t)$, la llamaremos *integral indefinida* de *f* en $\left[a,b\right]$.

A continuación se observa que existen infinitas integrales indefinidas de *f* en $\left[a,b\right]$, una para cada *c* elegido. Por otra parte, se solicita a los estudiantes que prueben que dos integrales indefinidas de *f* en $\left[a,b\right]$ cualesquiera difieren entre sí en una constante, y que interpreten gráficamente este resultado. También se observa que una vez fijado *c*, si $a<c<b$, *x* puede ser menor, igual o mayor que *c*, por lo que la definición previa a la Identidad de Chasles es imprescindible.

Consideremos f R-integrable en $\left[a,b\right]$ y $F:\left[a,b\right]\to\mathbb{R}$ tal que $F(x)=\int_a^x f$. "Hemos visto que *f* puede ser integrable incluso no siendo continua… El comportamiento de *F* es, por lo tanto, una sorpresa muy agradable." (Spivak, 1992, p. 373). La sorpresa a la que se refiere Spivak (1992) es que *F* siempre es continua en $\left[a,b\right]$. Lo cual queda establecido en la primera parte del *Teorema Fundamental del Cálculo Integral* (TFCI):

Consideremos *f* R-integrable en $\left[a,b\right]$, $c\in\left[a,b\right]$ y $\varphi:\left[a,b\right]\to\mathbb{R}\ /\ \varphi(x)=\int_c^x f$.

Entonces:
(1) φ es continua en $\left[a,b\right]$.

(2) Si *f* es continua en $x_0\in\left[a,b\right]\Rightarrow\varphi$ es derivable en x_0 y $\varphi'\left(x_0\right)=f\left(x_0\right)$.

(Si $x_0=a$ o $x_0=b$, entonces $\varphi'\left(x_0\right)$ se entiende que representa la derivada por la derecha o por la izquierda de φ.)

(Debido a las dificultades técnicas de la demostración de este teorema, la misma será realizada por el docente en la pizarra.)

Una lectura posible de la parte (2) del teorema anterior es que si *f* es continua en $\left[a,b\right]$, entonces *f* es la derivada de una cierta función (φ); a la función φ se la denomina *primitiva* o *antiderivada* de *f* en $\left[a,b\right]$. Se define primitiva de una función *f* en $\left[a,b\right]$ y se observa nuevamente que si la función *f* es continua en $\left[a,b\right]$ entonces, según el TFCI, toda integral indefinida de *f* en $\left[a,b\right]$ es una primitiva de *f* en dicho intervalo.

Considero que la presentación de textos vinculados con la historia de la matemática puede hacer, entre otros, dos grandes aportes: (1) brindar una visión más humana de la matemática, y (2) contextualizar el conocimiento matemático. En cuanto al primero de los aportes, señalan Gil y De Guzmán (1993, p. 107): "[…] la historia le puede proporcionar [al profesor] una visión verdaderamente humana de la ciencia y de la matemática, de lo cual suele estar también el matemático muy necesitado." En relación al segundo de los aportes, creo que un uso adecuado de la historia puede contribuir a *unir los objetos* matemáticos, *poniéndolos en su contexto natural y situándolos respecto de un conjunto*:

> Nuestra civilización y, por consiguiente, nuestra enseñanza, privilegiaron la separación en detrimento de la unión, el análisis en detrimento de la síntesis. Unión y síntesis quedaron subdesarrollados… Como nuestro modo de conocimiento desune a los objetos, tenemos que concebir qué los une. Como aísla a los objetos de su contexto natural y del conjunto del que forman parte, constituye una necesidad cognitiva poner en su contexto un conocimiento particular y situarlo respecto de un conjunto. (Morin, 1999, p. 26)

El texto que aparece a continuación ejemplifica tibiamente (debido a la necesidad de no excederme en el número de páginas) las consideraciones realizadas anteriormente:

> Junto a la geometría y el álgebra, que figuraban como respetables ancianas, surgió el joven *Análisis*, nuevo dominio que reunía el cálculo diferencial y el cálculo integral, paradigma de todas las hermosuras. […]
>
> Ahí intervinieron los dos verdaderos fundadores del Análisis... Newton y Leibniz, padres enemigos que se destrozaron para que fuese reconocida su paternidad. Se les deben dos descubrimientos esenciales.
>
> El primero: Descubrieron que las dos direcciones distintas en que los matemáticos habían estado trabajando hasta entonces, determinación de tangentes y cálculo de áreas, constituían de hecho las dos caras de un mismo fenómeno y se podía pasar de una a otra […]
>
> La segunda: Newton y Leibniz hicieron de ese nuevo campo un «cálculo», provisto de reglas, el *cálculo infinitesimal*. La derivación se convirtió en una operación. Operación de nuevo género que actuaba no sobre números sino sobre cantidades variables relacionadas con curvas. Operación que se podía realizar con un algoritmo sistemático.
>
> Después de siglos en los que el mundo disponía solo de las cuatro operaciones de la aritmética y de la extracción de raíces, surgieron en pocos años la

> *diferenciación* y la *integración*. Del mismo modo que las primeras iban en parejas de inversas —adición/sustracción, multiplicación/división, elevación al cuadrado/raíz cuadrada—, el nuevo dúo funcionaba de manera similar, diferenciación e integración eran inversas la una de la otra. (Guedj, 2013, pp. 376-377)

Por otra parte, algunos productos audiovisuales pueden colaborar en el mismo sentido que los textos literarios vinculados con la historia de la matemática. El siguiente video da cuenta de la invención del Cálculo Infinitesimal:
Universo Matemático: Sobre hombros de gigantes; Newton y Leibnitz.
www.youtube.com/watch?v=nom1GxrGx8U

A continuación se solicita que un estudiante, en forma voluntaria, demuestre el teorema de Barrow.

Para finalizar el tema, se abordan los métodos para el cálculo de primitivas: (1) *sustitución*, método basado en la regla de la cadena, (2) *integración por partes*, método basado en la fórmula de derivación del producto y (3) integración por *descomposición en fracciones simples*.
Por último, un recurso interesante (además de la bibliografía recomendada para el curso) para que los estudiantes puedan repasar algunos de los conceptos abordados sobre integrales es el Proyecto Descartes:
proyectodescartes.org/Un_100/materiales_didacticos/_Un_101_CalculoIntegral/index.html

Aspectos didácticos: evaluación
Para la evaluación se tendrá en cuenta el desempeño de los estudiantes que hayan realizado demostraciones en la pizarra, el grado de avance de las actividades que se propusieron a lo largo de la unidad y el desempeño en la prueba parcial.
Una vez culminada la unidad, los estudiantes deberán:

- Saber la definición de función Riemann integrable y el desarrollo conceptual previo que permite tal definición. Conocer ejemplos y no ejemplos.
- Tener un conocimiento cabal de la Condición Necesaria y Suficiente para que una función sea R-integrable y ser capaces de aplicarla.
- Conocer condiciones suficientes para que una función sea R-integrable.
- Saber la definición de integral indefinida y la definición previa que la habilita.
- Tener un conocimiento profundo del Teorema Fundamental del Cálculo Integral.
- Saber aplicar la Regla de Barrow.
- Saber aplicar, para casos no muy complejos, los métodos para el cálculo de primitivas.

Proyección en líneas de investigación
Según mi experiencia como docente, el concepto de integral indefinida presenta dificultades para muchos estudiantes. Considero que, por lo menos en parte, la dificultad radica en que para su comprensión se necesitan tener concepciones, en términos de la teoría APOE, *proceso* y *objeto* de función, y alternar entre ellas.

Antes de avanzar en el planteo del problema, desarrollaré en forma breve algunos elementos de la teoría APOE. La teoría APOE se desarrolla a partir del trabajo de Jean Piaget y sus ideas fundamentales fueron introducidas por Ed Dubinsky a principios de los años ochenta. La teoría establece modelos que permiten comprender lo que podría estar ocurriendo en la mente de un individuo cuando está tratando de aprender un cierto concepto matemático.

Existen tres etapas básicas involucradas en la construcción de conceptos matemáticos: *acción*, *proceso* y *objeto*. Las acciones, los procesos y los objetos son organizados en estructuras llamadas esquemas (el acrónimo APOE está formado por las iniciales de las palabras: acción, proceso, objeto y esquema).

De acuerdo a Piaget, y adoptado luego por la teoría APOE, un concepto se concibe primero como una acción, es decir, como una manipulación, repetible, física o mental, de objetos concebidos previamente, para obtener otros objetos. Una acción es una reacción a estímulos que el individuo percibe como externos, en el sentido de que cada paso de la transformación necesita, para ser realizada por el individuo, instrucciones externas explícitas y guiadas; además cada paso estimula al siguiente, esto es, los pasos de la acción no pueden aún ser imaginados y no pueden ser salteados por el individuo. Por ejemplo, una persona que requiere una expresión algebraica para trabajar con el concepto función, y puede hacer poco más que sustituir la variable en la expresión, se considera que tiene una concepción acción de función (la expresión algebraica actúa, en este caso, como una señal externa que le indica al individuo cómo se debe realizar la acción, paso a paso, mediante la sustitución de valores específicos).

Cuando un individuo repite y reflexiona en torno a una acción, esta puede *interiorizarse* en un proceso mental: una acción interiorizada es un proceso. El proceso se caracteriza por la capacidad del individuo de: (1) imaginar la realización de los pasos sin tener necesariamente que realizarlos uno por uno, (2) omitir pasos y (3) invertir los pasos. (El individuo pasa de depender de señales externas a tener control interno sobre las acciones.) Así, por ejemplo, un individuo con una comprensión proceso de función pensará en términos de entradas, posiblemente no específicas, y transformaciones de esas entradas para producir salidas.

Cuando un individuo puede concebir al proceso como una totalidad y se da cuenta que las transformaciones pueden actuar sobre esa totalidad, entonces se dice que ha *encapsulado* el proceso en un objeto cognitivo. Como lo reportan varios estudios basados en le teoría APOE, el mecanismo de encapsulación es el más difícil. Para el concepto función, la encapsulación permite al individuo aplicar transformaciones a las funciones y concebir, por ejemplo, un conjunto de funciones, definir operaciones en dicho conjunto, equiparlo con una topología, etc.

Por otra parte, en la teoría APOE existe un concepto clave que es el de *descomposición genética*. Una descomposición genética es un modelo hipotético que describe las estructuras y los mecanismos mentales que un individuo necesitaría construir para aprender un concepto matemático específico (Arnon et al., 2014). En Arnon et al. (2014) por ejemplo, se reporta una descomposición genética para el concepto función.

Antes mencioné que considero que, por lo menos en parte, la dificultad que entraña el concepto de integral indefinida está vinculada con el hecho de que exige alternar entre concepciones proceso y objeto de función, pero, además, hay dos funciones distintas en juego. Explicaré esto con más detalle. Comencemos por recordar la definición de integral indefinida: Consideremos una función f R-integrable en $\left[a,b\right]$ y $c \in \left[a,b\right]$.

A la función $\varphi : \left[a,b\right] \to \mathbb{R}$ / $\varphi(x) = \int_{c}^{x} f(t)d(t)$, la llamaremos *integral indefinida* de f en $\left[a,b\right]$.

Para comprender el concepto de integral indefinida creo que es necesario poder considerar a la función f como un objeto, es decir, como una totalidad sobre la cual se puede definir otra función: la integral indefinida; la que, pensada en términos de proceso, permite obtener, a partir de datos de entrada (x perteneciente a $\left[a,b\right]$) datos de salida ($\varphi(x)$). Creo que considerar a la función f en términos de acciones y procesos no colabora en la conceptualización de la integral indefinida (es más, es posible que obstaculice su comprensión). El objetivo específico de la investigación sería: Determinar cómo las concepciones de función, en términos de la teoría APOE (es decir, en términos de acciones, procesos y objetos), influyen en la construcción del concepto integral indefinida.

En cuanto a los aspectos metodológicos, para alcanzar el objetivo propuesto se seguirán los siguientes pasos:

- Diseño e implementación de un cuestionario vinculado con funciones, en particular con la integral indefinida, que será propuesto a un grupo de estudiantes de segundo año del profesorado de matemática del curso Análisis 1, luego de abordado el tema Integrales. Para el diseño de las actividades se tendrá en cuenta la descomposición genética de función existente en la literatura.
- Análisis a priori de las actividades en el que se describirán las estructuras mentales (acciones, procesos y objetos) que un estudiante podría poner en juego al resolverlas.
- Análisis de las respuestas de los estudiantes al cuestionario propuesto.
- Selección de algunos estudiantes para realizarles entrevistas —que serán audio grabadas— para profundizar en sus respuestas. La selección de los estudiantes se hará de modo que sean representativos del grupo en lo referente a: (1) las estructuras mentales que evidencien respecto al concepto función y, particularmente, al de integral indefinida, y (2) el nivel de rendimiento.
- A partir de la información emergente del trabajo de los estudiantes y de las entrevistas, y teniendo como referencia: (1) el análisis a priori de las actividades y (2) la descomposición genética de función, se buscará establecer cómo las concepciones de función, en términos de acciones, procesos y objetos, influyen en la construcción del concepto integral indefinida.

Referencias bibliográficas

Arnon, I., Dubinsky, E., Cottrill, J., Oktaç, A., Roa-Fuentes, S., Trigueros, M., & Weller, K. (2014). *Apos Theory. A Framework for Research and Curriculum Development in Mathematics Education.* New York: Springer.

Bishop, A. (1999). *Enculturación matemática. La educación matemática desde una perspectiva cultural*. Buenos Aires: Paidós.

Calvo, C. (2001). *Un estudio sobre el papel de las definiciones y las demostraciones en cursos preuniversitarios de Cálculo Diferencial e Integral*. (Tesis de doctorado no publicada). Universitat Autònoma de Barcelona. España.

Consejo de Educación Secundaria. (s.f.). Programas de asignaturas. Recuperado de https://www.ces.edu.uy/index.php/propuesta-educativa/20234

Consejo de Formación en Educación. (s.f.). Planes de Estudio y Programas. Recuperado de http://www.cfe.edu.uy/index.php/planes-y-programas/planes-vigentes-para-profesorado/44-planes-y-programas/profesorado-2008/380-matematica

Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas. (1987). *Análisis matemático. Su enseñanza. Volumen II.* Buenos Aires: Autor.

De Villiers, M. (1993). El papel y la función de la demostración en matemáticas. *Epsilon*, 26, pp. 15-30.

Edumates. (2012, febrero 4). Sobre hombros de gigantes; Newton y Leibnitz. [Archivo de video]. Descargado de https://www.youtube.com/watch?v=nom1GxrGx8U

Gil Pérez, D. y De Guzmán, M. (1993). *Enseñanza de las ciencias y la matemática. Tendencias e innovaciones*. España: Popular S.A.

Guedj, D. (2013). *El teorema del loro. Novela para aprender matemáticas* (8va. ed.). Barcelona: Anagrama.

Hanna, G. (1989). Proofs That Prove and Proofs That Explain. En G. Vergnaud, J. Rogalski, & M. Artigue (Eds.), *Proceedings of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. II, pp. 45-51.

Linés, E. (1983). *Principios de Análisis Matemático*. España: Editorial Reverté.

Montesinos Sirera, J. (2007). *Historia de las matemáticas en la enseñanza secundaria*. Madrid: Síntesis.

Morin, E. (1999). *La cabeza bien puesta*. *Repensar la reforma. Reformar el pensamiento.* Buenos Aires: Nueva visión.

Polya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas.

Spivak, M. (1992). *Calculus. Cálculo infinitesimal* (2a. ed.). México: Editorial Reverté.

Continuidad

Matías Guichón

Para el desarrollo de este proyecto para la sección Análisis en la Formación de docentes, se opta por el Tema 2: Continuidad. El mismo se enmarca en un curso de Topología, correspondiente al tercer año del profesorado de matemática. La estructura sigue las pautas del artículo 20 de las bases particulares de este concurso (Acta Ext. N° 14, Resolución N°1 de fecha 8 de noviembre de 2018).

1. Aspectos disciplinarios: conceptos o ideas involucrados en el tema, fundamentación epistemológica de su relevancia disciplinaria

Las funciones continuas están presentes en distintas ramas de la matemática. Por ejemplo en espacios métricos, la función distancia es una función continua. Más precisamente, si (M,d) es un espacio métrico, la función distancia $d: M\times M \to R$ es continua. Las isometrías también son funciones continuas. Esto es, si (M,d_M) y (N,d_N) son espacio métricos, las funciones del tipo $f: M\to N$ que verifican la condición $d_M(x,y)=d_N(f(x),f(y))$ para $x,y\in M$ cualesquiera, son funciones continuas.

Por otro lado, en espacios vectoriales normados son continuas las operaciones de suma de vectores y producto de un escalar por un vector, así como la norma. Más precisamente, si $(E,\|\ \|)$ es un espacio vectorial normado sobre el cuerpo R las funciones $s: E\times E\to E; s(x,y)=x+y$, $m: R\times E\to E;\ m(k,x)=k.x$ y $n: E\to R;\ n(x)=\|x\|$ son funciones continuas. En los espacios vectoriales normados, la continuidad global de las transformaciones lineales es equivalente a la continuidad de las mismas en el origen. Dicho de otra forma: Si X, Y son espacios vectoriales normados y $T: X\to Y$ es una transformación lineal, entonces T es continua en 0 si y solo si T es continua. En el caso que el dominio es de dimensión finita, cualquier transformación lineal como la anterior es continua. Las funciones de probabilidad también son funciones continuas.

Por otro lado, la continuidad de funciones permite asegurar la existencia de soluciones a ciertos problemas como los siguientes.

Problemas de Optimización: En ciertas condiciones la existencia de extremos absolutos de funciones queda asegurada por la continuidad, como lo afirma el siguiente teorema de Weierstrass:

> Si $X\subseteq R^n$ compacto y $f: X\to R$ continua, entonces f presenta máximo y mínimo absolutos en X, es decir, existen $x_m, x_M\in X$ tales que $f(x_m)\le f(x)\le f(x_M)$ para todo $x\in X$.

El resultado anterior puede ser generalizado como sigue:

> Si X es un espacio topológico compacto, Y es un conjunto ordenado, dotado de la topología del orden, y $f: X\to Y$ es continua entonces existen $x_m, x_M\in X$ tales que $f(x_m)\le f(x)\le f(x_M)$ para todo $x\in X$.

Integrales: La continuidad ofrece una condición suficiente para la integrabilidad Riemann de una función como lo aseguran los siguientes teoremas:

Si $f:[a,b] \to R$ es continua, entonces es integrable Riemann en $[a,b]$.

Si $f: I \to R$ es continua, siendo $I \subseteq R^n$ es un intervalo, entonces f es integrable Riemann en I .

En caso de que la función f sea discontinua, la integrabilidad Riemann puede asegurarse en el caso que los puntos de discontinuidad de la función tenga medida de Jordan nula.
La continuidad también permite establecer vínculos entre la derivación y la integración como lo asegura el Teorema fundamental del cálculo:

Si $f:[a,b] \to R$ es R integrable, f continua en $c \in [a,b]$ entonces la función $F:[a,b] \to R$ definida por la fórmula $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ es derivable en c y $F'(c) = f(c)$.

Diferenciabilidad: En relación a la diferenciabilidad, la continuidad no ofrece una condición suficiente sino una condición necesaria. Sin embargo, la continuidad de algunas derivadas parciales de una función de varias variables permiten asegurar su diferenciabilidad.

Sea $f:U \to R$ siendo $U \subseteq R^n$ abierto. Si f tiene n-1 derivadas parciales definidas en alguna bola $B_\varepsilon(a) \subseteq U$, continuas en a, y la restante derivada parcial existe en a, entonces f es diferenciable en a.

Ecuaciones diferenciales: Con respecto a las ecuaciones diferenciales, la continuidad permite asegurar la existencia de soluciones al problema de valores iniciales $x' = f(t,x)$, como lo afirma el siguiente teorema de Peano:

Si $f:\Omega \to R \times R^n$ es continua, entonces para cada $(t_0,x_0) \in \Omega$ existe al menos una solución (I,φ) de la ecuación $x' = f(t,x)$.

Para asegurar la unicidad de la solución por el punto $(t_0,x_0) \in \Omega$ la continuidad no es suficiente, sino que se debe exigir que la función f sea localmente Lipschitz en la segunda variable (Teorema de Picard).

Continuidad uniforme: la continuidad de funciones en ciertos dominios es una condición suficiente para la continuidad uniforme:

$f: X \to Y$ es una función continua del espacio métrico completo (X,d_X) al espacio métrico (Y,d_Y), entonces f es uniformemente continua.

En cuanto a la topología la continuidad ocupa un papel central. Según Kline (2016, p. 1533) “la tarea básica de la topología general es entonces la de descubrir propiedades que sean invariantes bajo transformaciones continuas u homeomorfismos”. Estas propiedades reciben el nombre de propiedades topológicas, o invariantes topológicos. En la misma línea afirma Armstrong (1987, p. 10) “la topología se refiere a aquellas propiedades de los espacios que permanecen invariantes frente al tipo de transformaciones que hemos llamado equivalencias topológicas u homeomorfismos.” Algunas de las propiedades topológicas que se abordan en el curso de Topología son las siguientes:

Axiomas de Numerabilidad

$$\left.\begin{array}{l} Si\ \ f: X \to Y\ es\ \text{continua y abierta} \\ X\ es\ 1N\ (resp.\ 2N) \end{array}\right\} \Rightarrow f(X)\ es\ 1N\ (resp.\ 2N)$$

Separabilidad

$$\left.\begin{array}{l} Si\ \ f: X \to Y\ \text{es continua y sobreyectiva} \\ X\ es\ separable \end{array}\right\} \Rightarrow Y\ es\ separable$$

Lindelöf

$$\left.\begin{array}{l} Si\ \ f: X \to Y\ es\ continua \\ X\ es\ Lindel\ddot{o}f \end{array}\right\} \Rightarrow f(X)\ es\ es\ Lindel\ddot{o}f$$

Axiomas de Separación

$$\left.\begin{array}{l} Si\ \ f: X \to Y\ es\ \text{hom}\,eomorfismo \\ X\ es\ un\ espacio\ T_0\ \ (resp.\ T_1\ o\ T_2) \end{array}\right\} \Rightarrow Y\ es\ un\ espacio\ T_0\ \ (resp.\ T_1\ o\ T_2)$$

Compacidad

$$\left.\begin{array}{l} Si\ \ f: X \to Y\ es\ continua \\ X\ es\,compacto \end{array}\right\} \Rightarrow f(X)\ \ es\ \ compacto$$

Conexidad

$$\left.\begin{array}{l} Si\ \ f: X \to Y\ es\ continua \\ X\ es\,conexo \end{array}\right\} \Rightarrow f(X)\ \ es\ \ conexo$$

Metrizabilidad

$$\left.\begin{array}{l} Si\ \ f: X \to Y\ \text{es homeomorfismo} \\ X\ es\,metrizable \end{array}\right\} \Rightarrow Y\ es\,metrizable$$

En topología algebraica, los caminos son funciones continuas, la relación de equivalencia homotopía es una función continua que da lugar al grupo fundamental que es otro invariante topológico.

A continuación se presentan los conceptos y teoremas a trabajar en esta unidad. La selección ha sido realizada en base a Munkres (2002), Croom (2008) y Adams y Franzosa (2009). Se asume que previo al trabajo con esta unidad del curso, se habrán trabajado los siguientes contenidos de la asignatura: topología sobre un conjunto, base y subbase de una topología, topología generada. Espacios Métricos. Topología Producto. Interior, clausura, frontera de un conjunto. Conjuntos cerrados. Convergencia de sucesiones. Relación entre clausura de un conjunto y convergencia de sucesiones. Espacios de Hausdorff y espacios 1 numerables. Por la extensión de este trabajo no se han incluido ejemplos ni demostraciones en el desarrollo siguiente.

Definición - Función continua.
Sean (X,τ_X) e (Y,τ_Y) espacios topológicos. Una función $f:(X,\tau_X)\rightarrow(Y,\tau_Y)$ se dice continua si para cada $V\in\tau_Y$ se tiene que $f^{-1}(V)\in\tau_X$.
Se trabajarán también las siguientes definiciones de continuidad en términos de bases, subbases, y en términos de distancias.

- Si (X,τ_X) e (Y,τ_Y) espacios topológicos, y $B=\{B_\alpha\}_{\alpha\in K}$ es una base para τ_Y. Una función $f:(X,\tau_X)\rightarrow(Y,\tau_Y)$ es continua si y solo si para cada básico $B_\alpha\in B$ se tiene que $f^{-1}(B_\alpha)\in\tau_X$.
- Si (X,τ_X) e (Y,τ_Y) espacios topológicos, y $S=\{S_\alpha\}_{\alpha\in K}$ es una subbase para τ_Y. Una función $f:(X,\tau_X)\rightarrow(Y,\tau_Y)$ es continua si y solo si para cada $S_\alpha\in S$ se tiene que $f^{-1}(B_\alpha)\in\tau_X$.
- Si (X,d_X) e (Y,d_Y) son espacios métricos. Una función $f:(X,d_X)\rightarrow(Y,d_Y)$ es continua si y solo si para cada $a\in X$ y para cada $\varepsilon>0$ existe $\delta>0$ tal que si $d_X(x,a)<\delta\Rightarrow d_Y(f(x),f(a))<\varepsilon$.

Teorema:
Si (X,τ_X) e (Y,τ_Y) son espacios topológicos, y $f:(X,\tau_X)\rightarrow(Y,\tau_Y)$ es una función. Entonces f es continua si y solo si para todo $a\in X$ y todo entorno V de $f(a)$ se cumple que $f^{-1}(V)$ es un entorno de a.
El teorema anterior permite definir la continuidad puntual como sigue:

Definición (Continuidad puntual):
Sean (X,τ_X) e (Y,τ_Y) espacios topológicos, y sea $a\in X$. Una función $f:(X,\tau_X)\rightarrow(Y,\tau_Y)$ se dice continua en $a\Leftrightarrow$ para entorno V de $f(a)$ se cumple que $f^{-1}(V)$ es un entorno de a.
La definición anterior permite reformular el enunciado del teorema previo de la siguiente forma: $f:X\rightarrow Y$ continua si y solo si f es continua en a para todo $a\in X$.

Los teoremas que siguen establecen relaciones entre la continuidad y otros conceptos trabajados en el curso como conjuntos cerrados, clausura, interior, frontera y exterior de un conjunto, y convergencia de sucesiones. La relación de la continuidad con conceptos como espacio 1 numerable, espacio de Hausdorff o espacio metrizable podrán ser abordados al tratar propiedades topológicas, mientras que la relación con espacios compactos y conexos será tratada en otras unidades del curso.

Teorema - Relación de la continuidad con el interior, clausura y frontera de un conjunto.
Si (X,τ_X) e (Y,τ_Y) espacios topológicos, y $f:(X,\tau_X)\to(Y,\tau_Y)$ es una función, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:
(1) f es continua.
(2) Para cada conjunto B cerrado de Y se cumple que $f^{-1}(B)$ es cerrado en X.
(3) Para cada subconjunto A de X se tiene que $f(\overline{A})\subseteq\overline{f(A)}$.
(4) Para cada $B\subseteq Y$ se tiene que $f^{-1}(\overline{B})\supseteq\overline{f^{-1}(B)}$.
(5) Para cada $B\subseteq Y$ se cumple $f^{-1}(\operatorname{int}(B))\subseteq\operatorname{int}(f^{-1}(B))$.
(6) Para cada $B\subseteq Y$ se cumple $Fr(f^{-1}(B))\subseteq f^{-1}(Fr(B))$.
(7) Para cada $B\subseteq Y$ se cumple $f^{-1}(ext(B))\subseteq ext(f^{-1}(B))$.

Teorema - Relación de la continuidad con la convergencia de sucesiones.
Si (X,τ_X) e (Y,τ_Y) espacios topológicos, y $f:(X,\tau_X)\to(Y,\tau_Y)$ es una función:
(1) Si f es continua y (x_n) es una sucesión con límite x en (X,τ_X), entonces la sucesión $(f(x_n))$ converge a $f(x)$ en (Y,τ_Y).
(2) Recíprocamente. Si para todo $x\in X$ y toda sucesión (x_n) con límite x en (X,τ_X), se cumple que $(f(x_n))$ converge a $f(x)$ en (Y,τ_Y) y además el espacio (X,τ_X) es 1 numerable, entonces la función f es continua.

Corolario:
Si (X,τ_X) es 1 numerable e (Y,τ_Y) es un espacio topológico, entonces:
Una función $f:(X,\tau_X)\to(Y,\tau_Y)$ es continua $\Leftrightarrow$ para toda sucesión (x_n) con límite x en (X,τ_X), se cumple que $(f(x_n))$ converge a $f(x)$ en (Y,τ_Y)

Los teoremas que siguen establecen algunos “mecanismos” para obtener funciones continuas a partir de otras funciones continuas.

Teorema – Restricción y extensión de funciones continuas, relación con la comparación de topologías.
Sean X,Y son espacios topológicos:

(1) (Restricción del dominio) Si $f: X \to Y$ es una función continua, y A es un subespacio de X entonces la función restringida $f\big|_A : A \to Y$ es continua.
(2) (Restricción del recorrido) Si $f: X \to Y$ es una función continua, Z es un subespacio de Y que contiene al conjunto imagen $f(X)$, entonces la función $g: X \to Y$ obtenida al restringir el rango de f, es continua.
(3) (extensión del recorrido) Si Z es un espacio que contiene a Y como subespacio, entonces la función $h: X \to Z$ obtenida al extender el codominio de f es continua.
(4) Si $\tau_X \subseteq \tau_X'$, $\tau_Y' \subseteq \tau_Y$ y la función $f:(X,\tau_X) \to (Y,\tau_Y)$ es continua, entonces la función $f:(X,\tau'_X) \to (Y,\tau'_Y)$ también es continua.

<u>Teorema</u> – Composición de funciones continuas:
Si (X,τ_X), (Y,τ_Y) y (X,τ_Z) son espacio topológicos, $f:(X,\tau_X) \to (Y,\tau_Y)$ y $g:(Y,\tau_Y) \to (Z,\tau_Z)$ son funciones continuas, entonces la función compuesta $g \circ f:(X,\tau_X) \to (Z,\tau_Z)$ es continua.

<u>Teorema</u> – Formulación Local de la Continuidad:
Sean (X,τ_X) e (Y,τ_Y) espacio topológicos, y $f:(X,\tau_X) \to (Y,\tau_Y)$ una función. Si X puede escribirse como unión de conjuntos abiertos U_α tales que las restricciones $f\big|_{U_\alpha}$ son funciones continuas para todo α, entonces la función f es continua.

<u>Teorema</u> – Lema del Pegamiento:
Sean (X,τ_X) e (Y,τ_Y) espacio topológicos, y sean $A,B \subseteq X$ cerrados tales que $X = A \cup B$. Si las funciones $f: A \to Y$ y $g: B \to Y$ son continuas, y además se cumple que $f(x) = g(x)$ para todo $x \in A \cap B$, entonces la función $h: X \to Y$ definida por la fórmula $h(x) = \begin{cases} f(x) & si \;\; x \in A \\ g(x) & si \;\; x \in B \end{cases}$ es continua.

<u>Teorema</u> – Aplicaciones Continuas en Productos.
Sea $f: A \to X \times Y$ definida por la fórmula $f(a) = (f_1(a), f_2(a))$. Entonces f es continua si y solo si son continuas las funciones $f_1: A \to X$ y $f_2: A \to Y$. Las funciones f_1 y f_2 se llaman funciones coordenadas de f.

<u>Teorema</u> – Álgebra de Funciones Continuas

Sean $\left(X,\tau_X\right)$ un espacio topológico, $\left(R,\tau_U\right)$ es el conjunto de números reales dotado de la topología usual, y $f,g:\left(X,\tau_X\right)\rightarrow\left(R,\tau_U\right)$ son funciones continuas. Entonces las funciones $f+g$, $f-g$, $f.g$ son continuas, y si $g(x)\neq 0$ para todo $x\in X$ entonces la función ${}^{f}\!/_{g}$ es continua.

Definición:
Sean $\left(X,\tau_X\right)$ e $\left(Y,\tau_Y\right)$ espacio topológicos, y $f:X\rightarrow Y$ una función biyectiva. Si la función f y la función inversa $f^{-1}:Y\rightarrow X$ son ambas continuas, entonces f se dice que es un homeomorfismo.

En caso que exista un homeomorfismo entre los espacios Sean $\left(X,\tau_X\right)$ e $\left(Y,\tau_Y\right)$ se dice que ellos son homeomorfos, o topológicamente equivalentes.

Teorema – Definiciones equivalentes de homeomorfismo
Si $f:\left(X,\tau_X\right)\rightarrow\left(Y,\tau_Y\right)$ es una función biyectiva, entonces son equivalentes:

i. f es un homeomorfismo,
ii. f es continua y abierta,
iii. f es continua y cerrada,
iv. $U\in\tau_X \Leftrightarrow f(U)\in\tau_Y$,
v. $V\in\tau_Y \Leftrightarrow f^{-1}(V)\in\tau_X$,
vi. $F\in C_X \Leftrightarrow f(F)\in C_Y$,
vii. $G\in C_Y \Leftrightarrow f^{-1}(G)\in C_X$,
viii. para cada $A\subseteq X$ se cumple $f\left(\overline{A}\right)=\overline{f(A)}$,
ix. para cada $B\subseteq Y$ se cumple $f^{-1}\left(\overline{B}\right)=\overline{f^{-1}(B)}$
x. para cada $A\subseteq X$ se cumple $f\left(\operatorname{int}(A)\right)=\operatorname{int}\left(f(A)\right)$,
xi. para cada $B\subseteq Y$ se cumple $f^{-1}\left(\operatorname{int}(B)\right)=\operatorname{int}\left(f^{-1}(B)\right)$

Definición:
Una propiedad relativa a espacios topológicos es una propiedad topológica o un invariante topológico, si se conserva bajo homeomorfismos.
Según la definición anterior, si un espacio X posee la propiedad topológica P, cualquier espacio homeomorfo a él también posee dicha propiedad. Un ejemplo de propiedad topológica es la propiedad de Hausdorff como lo indica el siguiente teorema.

Teorema
Si $f:\left(X,\tau_X\right)\rightarrow\left(Y,\tau_Y\right)$ es un homeomorfismo, y $\left(X,\tau_X\right)$ es Hausdorff, entonces $\left(Y,\tau_Y\right)$ es Hausdorff.

2. Aspectos didácticos: relevancia del tema para la enseñanza en la formación de formadores, incluidas estrategias y evaluación
A diferencia de otros conceptos trabajados en el curso de Topología (como el concepto de espacio 1 numerable), el concepto de función continua y algunas de sus propiedades han

sido estudiadas por los estudiantes que cursan la asignatura Topología, tanto en el curso de Análisis 1 así como en cursos de bachillerato. Más precisamente en estos cursos se estudia la continuidad de funciones del tipo $f:(X,\tau_X)\to(R,\tau_U)$ siendo τ_U la topología usual en R y τ_X la topología que $X\subseteq R$ hereda como subespacio de (R,τ_U). Algunos de los conceptos que los estudiantes han trabajado en cursos anteriores son los siguientes:

- Definición puntual de función continua (definición $\varepsilon-\delta$). Relación entre límite de una función cuando $x\to a$ y continuidad en $x=a$. Propiedades de conservación del signo. Relación entre continuidad de funciones y convergencia de sucesiones.
- Continuidad de funciones elementales.
- Operaciones algebraicas y composición de funciones continuas. Continuidad de la función inversa.
- Teoremas de Bolzano, Darboux (valor medio) y Weierstrass para funciones continuas en intervalos compactos.

A partir de sus experiencias en cursos anteriores, los alumnos habrán construido ideas acerca de la continuidad de funciones que constituyen el punto de partida para el trabajo con la continuidad en el curso de topología. Tall y Vinner (1981) desarrollan la noción de *imagen conceptual* para referirse a

> … toda estructura cognitiva que está asociada a un concepto, la cual incluye todas las fotos mentales y las propiedades y procesos asociados. Esta se construye a lo largo de años a través de experiencias de todo tipo y va cambiando a medida que el individuo madura y se encuentra con nuevos estímulos.

En este sentido, la imagen conceptual de un objeto matemático es evocada por los alumnos al resolver problemas, y en distintos contextos podrían ser evocadas diferentes partes de dicha imagen conceptual. Estos autores investigan la imagen conceptual que tienen los alumnos al ingresar a la universidad sobre el objeto función continua, entre las que encuentran: una función es continua si su gráfico no tiene agujeros ni saltos (o desfasajes), el gráfico de una función continua está compuesto de una sola pieza, las funciones continuas están definidas por una sola fórmula

A partir de la experiencia de los estudiantes de profesorado de matemática, en cursos de bachillerato y en el curso de análisis 1 podríamos establecer algunas ideas que conforman las imágenes conceptuales de los estudiantes respecto al concepto de continuidad, al ingresar al curso de topología:

- La continuidad de una función depende de la fórmula que la define.
- La continuidad de las funciones partidas depende de la continuidad en el "punto de corte del dominio".
- Existen familias de funciones (como las polinómicas) que son continuas.
- Algunas operaciones entre funciones continuas, mantienen la continuidad (operaciones algebraicas, composición, inversión).
- La imagen de un intervalo a través de una función continua, es un intervalo.
- Las funciones continuas en intervalos de la forma $[a,b]$ tienen máximo y mínimo.
- La imagen de un intervalo de la forma $[a,b]$ a través de una función continua, es un

intervalo del mismo tipo.
- Si f es continua en un intervalo, y toma valores negativos y positivos en dicho intervalo, entonces tiene una raíz.

Tal como se plantea en el programa de Topología (ANEP/CFE 2008, p.1), este curso busca

> … una refundamentación y reordenamiento de las bases con que el alumno llegó al tercer año de profesorado. Esta asignatura se presta y ha de ser utilizada fuertemente para romper con las falsas imágenes conceptuales que frecuentemente el alumno genera y reconstruir nuevas imágenes que se adapten mejor a los diferentes conceptos que las imágenes intentan representar.

Así, las imágenes conceptuales mencionadas anteriormente constituyen un punto de partida para el trabajo en esta asignatura, y corresponde al curso de topología resignificar algunos conceptos y relativizar algunas propiedades y teoremas.

Ejemplifiquemos algunas de las ideas anteriores que corresponde relativizar. Por ejemplo, a la afirmación “la continuidad de una función depende de la fórmula que la define” es de alguna forma cierta cuando se trabaja con funciones reales de variable real (con la topología usual en R), es decir que las funciones definidas por algunas fórmulas (como por ejemplo las polinómicas) son continuas en este contexto. Sin embargo cuando trabajamos en otros espacios, por ejemplo en R con la topología del punto incluido $\tau_0 = \{U \subseteq R / 0 \in U\}$ este hecho ya no es cierto. Una función no constante $f:(R,\tau_0) \to (R,\tau_0)$ es continua si y solo si $f(0)=0$. Este hecho cuestiona la dependencia de la continuidad exclusivamente de la fórmula. Se hace necesario entonces discutir la relación que existe entre la continuidad de las funciones y los espacios en las que se definen. La afirmación “La imagen de un intervalo de la forma $[a,b]$ a través de una función continua, es un intervalo del mismo tipo” es un caso particular de la afirmación “la imagen de un compacto y conexo a través de una función continua, es un conexo y compacto”. La primera afirmación es cierta en el contexto de R con la topología usual, pues los intervalos de la forma $[a,b]$ son los únicos conexos y compactos de este espacio, pero corresponde relativizar este hecho estableciendo los límites de su validez y generalizarlo.

Es importante entonces que los alumnos construyan una concepción topológica (El Bouazzoui, 1988) de la continuidad, es decir una idea de función continua relacionada con las propiedades que conserva, y vincular los “nuevos conceptos” trabajado en este curso con aquellas ideas que los estudiantes han construido anteriormente acerca de las funciones continuas. A partir de esto, el desarrollo del tema “Funciones Continuas” en el curso de Topología tiene entre otros los siguientes objetivos:
- Introducir el concepto de función continua en términos de conjuntos abiertos, e introducir el concepto de homeomorfismo.
- Trabajar con relaciones entre continuidad y otros conceptos como convergencia de sucesiones, y establecer formas de definir funciones continuas a partir de otras.
- Introducir el concepto de propiedad topológica.

Estrategias de enseñanza

Los bajos aprendizajes en matemática de los alumnos de enseñanza primaria y media (INEED 2017) obligan a una reflexión en torno a la enseñanza. Estas y otras evaluaciones colocan las prácticas de enseñanza de profesores y maestros en la mira por lo que los institutos de formación de docentes no pueden quedar ajenos a una reflexión en torno a la enseñanza de la matemática.

Con respecto a las prácticas de enseñanza de los profesores y sus concepciones, algunas investigaciones muestran el vínculo que existe entre las mismas y la forma en que los profesores aprendieron siendo alumnos. Incluyo en este trabajo algunas citadas por Dalcín, Ochoviet y Olave (2017).

Por ejemplo, Furió (1994) menciona algunas investigaciones que afirman que los profesores de ciencias tienen concepciones sobre la ciencia y la forma de enseñarla y aprenderla, muy arraigadas y producto de su historia escolar. Las investigaciones que reporta Furió muestran que la forma en que se les enseñó a estos profesores tiene un gran impacto en sus prácticas como docentes. En línea con lo anterior Mellado (1996) reporta una serie de trabajos que dan cuenta de que los estudiantes de formación docente ingresan a estos cursos con creencias sobre la enseñanza y el aprendizaje de las ciencias. Agrega además que sus experiencias como estudiantes influyen en sus concepciones pedagógicas. Ball y Wilson (1990, referido en Blanco, 1996) explican las prácticas tradicionales que utilizan los profesores principiantes a través de sus creencias y su experiencia. En este sentido afirman que las creencias acerca de la enseñanza y el aprendizaje de estos noveles profesores tienen su origen en sus experiencia como estudiantes, y que estas perdurarán aun terminada su formación inicial.

Las referencias anteriores dan cuenta de la estrecha relación que existe entre la experiencia de los profesores en su etapa alumnos, y las prácticas que desarrollan en su rol como profesores. Esto indica que quienes fueron alumnos pasivos, o fueron enseñados por medio de metodologías tradicionales serán entonces profesores tradicionales, y considerarán a sus alumnos “pasivos”. Ahora bien, si tomamos conciencia de que los profesores enseñan a sus alumnos en base a cómo se les enseñó a ellos, parece obvio que si se enseña a los futuros profesores utilizando metodologías tradicionales, estos serán profesores tradicionales. Dicho de otra forma, si pretendemos que los profesores desarrollen metodologías no tradicionales, y asumimos que los profesores se desarrollarán como tales según sus experiencias como alumnos, entonces deberíamos enseñar en los centros de formación de docentes utilizando metodologías no tradicionales. Al respecto señala Mellado (1996, p. 57):

> Si los profesores en formación toman como referencia, positiva o negativa, para la enseñanza de las ciencias, a los profesores que han tenido a lo largo de su etapa escolar, es fundamental que la metodología utilizada durante la formación inicial sea consistente con los modelos teóricos que propugnan. En caso contrario, los estudiantes para profesores aprenderán más de lo que ven hacer en clase, que de lo que se les recomienda hacer.

Desde mi lugar como formador de futuros profesores de matemática y como profesor adscriptor he tenido la oportunidad de observar clases de los practicantes, y he notado que la mayoría de ellos “se planta” en la clase desde una postura tradicional. En este sentido los estudiantes buscan la forma de “transmitir claramente” los contenidos, la forma de explicar a los estudiantes de forma clara para que estos reciban de forma pasiva lo que ellos

presentan. Subyace a este modelo normativo (Charnay, 1994) la concepción de matemática estática, como conjunto de reglas acabadas.
Lo anterior desafía a los centros de formación de docentes a desarrollar en sus cursos de matemática, metodologías alineadas con las recomendaciones para la enseñanza de la matemática. Así lo afirma Santaló (1994, p.211):

> No se debe, por ejemplo, dar un curso de Álgebra Lineal o de Cálculo Infinitesimal para futuros profesores, de igual manera que para licenciados en matemática, ingenieros o economistas. La enseñanza en el profesorado debe ser coherente, salvando los niveles y la extensión de los temas, con la que los alumnos, futuros profesores, deberán luego impartir a sus alumnos.

Con respecto a lo que se espera de las prácticas de enseñanza de matemática en centros de formación de futuros profesores, partimos de la idea de que la matemática es un bien cultural y social, y por ende los alumnos deben tener la oportunidad de crear matemática en la clase. Esta visión rescata a la matemática como una ciencia que es producto de una civilización, es una invención humana, y en línea con esto creemos en la clase como un espacio para producir, para hacer matemática. Al decir de Bernard Charlot (1986):

> … estudiar matemáticas es efectivamente HACERLAS, en el sentido propio del término, construirlas, fabricarlas, producirlas, ya sea en la historia del pensamiento humano o en el aprendizaje individual… No se trata de hacer que los alumnos reinventen las matemáticas que ya existen sino de comprometerlos en un proceso de producción matemática donde la actividad que ellos desarrollen tenga el mismo sentido que el de los matemáticos que forjaron los conceptos matemáticos nuevos.

En línea con lo anterior el Grupo Cero (1987) plantea que el centro de atención de la enseñanza debería desviarse de los contenidos matemáticos a la actividad matemática. “Es importante que los estudiantes desarrollen capacidades como generalizar, abstraer, formular hipótesis y someterlas a prueba, comunicar sus ideas” (Dalcín, Ochoviet y Olave, 2017, p. 9).
En línea con lo anterior y en base a las recomendaciones del NCTM (1991), Blanco (1996) recomienda:

> Los futuros profesores de matemática deben ser enseñados en forma parecida a como ellos habrán de enseñar –explorando, elaborando conjeturas, comunicándose, razonando, y todo lo demás-. Por consiguiente los centros de formación del profesorado y los departamentos de ciencias matemáticas deben reconsiderar sus programas a la luz de estos criterios curriculares. (p.259)

Investigaciones uruguayas como Ochoviet y Olave (2017) y Dalcín, Ochoviet y Olave (2017), que estudian los modelos docentes de un instituto de formación de profesores, dan cuenta que en la mayoría de las clases de matemática para futuros profesores el trabajo que se propone a los estudiantes no está alineado a las recomendaciones anteriores en el sentido que no se configuran las clases como ámbitos de producción de conocimientos.
Para ejemplificar el enfoque anterior se presentan dos actividades para el desarrollo de esta unidad, que podrían formar parte de una secuencia. Las mismas no son pensadas como “ejercicios” de aplicación de definiciones o teoremas, sino que son motivadores de debates. En este sentido se planifica proponer estas actividades que permitan a los alumnos poner en

juego sus conocimientos, aflorar sus imágenes conceptuales. A partir de estas resoluciones discutir con los alumnos, y en función de ello, las definiciones y los teoremas que se pretende enseñar serán las conclusiones de estos debates. Las actividades propuestas son del tipo "de final abierto" (Zaslavsky, 1995). Este tipo de actividades admiten variedad de soluciones correctas, y según la autora permiten que los alumnos tomen decisiones y exploren en base a criterios personales. Esta variedad de respuestas es la que da lugar a mantener debates en torno a las respuestas elaboradas por los estudiantes.

Actividad 1:
Considera la siguiente tabla, de la que se han completado algunas entradas. Tu tarea consiste en encontrar ejemplos de funciones $f: R \to R$ y conjuntos $A \subseteq R$ para completarla, de modo que se verifique la condiciones planteadas en cada fila. Discute con tus compañeros varias alternativas:

Función f	Conjunto A	¿f es continua?	Conjunto $f^{-1}(A)$
		No	*Abierto*
		No	*No abierto*
		Si	*Abierto*
		Si	*No abierto*

Esta actividad es la primera actividad del tema. El objetivo de la misma es introducir la definición topológica de continuidad. Al finalizar el debate se espera que quede probada la equivalencia entre la definición $\varepsilon - \delta$ de continuidad y la definición topológica, para funciones reales de variable real. El énfasis en funciones reales de variable real se debe a la necesidad de establecer la equivalencia entre la definición que manejan los estudiantes, y la definición que se pretende introducir.
Algunas estrategias que podrían desarrollar los estudiantes, y las posibilidades de debatir son las siguientes:
Para completar las dos primeras filas los estudiantes deben encontrar funciones no continuas y conjuntos abiertos que tengan preimagen abierta y preimagen no abierta. Los alumnos podrían explorar a partir de ejemplos. Por ejemplo, un estudiante podría trabajar a partir de la función $f: R \to R$ definida por $f(x) = \begin{cases} x-1 & si \ x \le 0 \\ x & si \ x > 0 \end{cases}$. Para este caso se podrían encontrar soluciones como las siguientes:

- En este caso podría surgir que $f^{-1}(\varnothing) = \varnothing$ y $f^{-1}(R) = R$, y el hecho de que estos resultados son independientes de la continuidad de la función. Esto permite probar más adelante que si $f: X \to Y$ es una función, e Y es el espacio indiscreto, entonces f es continua independientemente de la regla de asignación de la función, y de la topología definida en X.
- A partir de una exploración libre los estudiantes podrían concluir que algunos abiertos tienen preimagen abierta, y otros no la tienen.

- También se podría estudiar las preimágenes por f de intervalos de la forma (a,b), lo que podría originar lugar a una familia de soluciones. A partir de ello podrían conjeturar que la preimagen de un intervalo de esa forma que no contiene al -1, es abierto.
- Una exploración más ordenada podría llevar a establecer que si A es abierto y $-1 \notin A \Rightarrow f^{-1}(A)$ es abierto. Si A es abierto y $-1 \in A \Rightarrow f^{-1}(A)$ puede ser abierto o no, por ejemplo si $A \subseteq R^-$ entonces $f^{-1}(A)$ no es abierto, por ejemplo $f^{-1}\left(\left(-2,-\frac{1}{2}\right)\right)=\left(-1,0\right]$. Pero si $A \not\subseteq R^-$ entonces su preimagen es abierta. Por ejemplo, si $a<-1, b>0 \Rightarrow f^{-1}((a,b))=(a+1,b)$. A partir de esto los alumnos podrían identificar que "hay un problema en -1", y esto orientar la discusión hacia una definición de continuidad puntual en términos de conjuntos abiertos.

Las filas tres y cuatro de la tabla exigen a los alumnos explorar el comportamiento de las preimágenes continuas de conjuntos abiertos. La imposibilidad de encontrar una función y un conjunto A para el que $f^{-1}(A)$ no sea abierto exige a los estudiantes argumentar acerca de esta imposibilidad, es decir que ofrece la oportunidad para que los estudiantes conjeturen que "la preimagen de un abierto a través de una función continua es abierta" y establecer argumentos para probar esta afirmación y su recíproca.

La exploración con ejemplos de funciones continuas, al igual que con funciones no continuas podría desarrollarse estudiando las preimágenes de intervalos de la forma (a,b). Esto podría llevar a la discusión acerca de las preimágenes de abiertos cualesquiera, para concluir que si $f^{-1}((a,b))$ es abierto, entonces $f^{-1}(U)$ es abierto para cualquier abierto U.
Esta afirmación habilita una discusión de continuidad en términos de básicos.
Una vez establecida la definición de continuidad en términos de abiertos, se propondrá a los estudiantes estudiar la continuidad de funciones en otros espacios ya estudiados.

<u>Actividad 2</u>: Sabiendo que f y g son funciones continuas, de ejemplos de otras funciones continuas que se puedan obtener a partir de ellas.

Esta actividad tiene por objetivo establecer algunos teoremas acerca de la construcción de funciones continuas. No se explicitan dominio y codominio de las funciones f y g, lo que exige a los alumnos determinarlos según la forma en que decidan obtener una nueva función. Esto permite discutir condiciones para construir funciones continuas. Veamos algunos ejemplos:
- Los estudiantes conocen de cursos anteriores la posibilidad de operar funciones continuas para obtener nuevas funciones continuas. Así por ejemplo, si plantean obtener la función continua $f+g$, definida puntualmente por la fórmula $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$ deberán discutir:

- El dominio de ambas funciones debe ser el mismo.
- El codominio de ambas funciones debe ser el mismo, y en el mismo debe haber definida una operación suma. Al mismo tiempo, deben tener en cuenta que no alcanza con que exista una operación. Por ejemplo si $\tau_0 = \{U \subseteq R / 0 \in U\} \cup \{\varnothing\}$ es la topología del punto incluido en R, entonces $f:(R,\tau_0) \to (R,\tau_0)$ no constante es continua si y solo si $f(0)=0$. Entonces las funciones definidas por las fórmulas $f(x)=x^2$ y $g(x)=5$ son continuas, pero la función $f+g$ no es continua.

- Los estudiantes también conocen la composición de continuas como una forma de obtener una función continua. En este caso se hace necesario discutir la relación entre los dominios y codominios de las funciones, así como la relación entre las topologías definidas en ellos.
- Otra forma de construir funciones continuas consiste en construir funciones partidas, es decir funciones $p: A \cup B \to Y$ definidas por fórmulas del tipo $p(x)=\begin{cases} f(x) & si\ x \in A \\ g(x) & si\ x \in B \end{cases}$.

  La exploración conduce a discutir condiciones para los conjuntos A y B, lo que podría dar lugar al "lema del pegamiento" o al teorema de "formulación local de la continuidad".

Evaluación:
En cuanto a la evaluación, el Plan 2008 (SUNFUD) distingue la evaluación de la certificación. "Mientras que la primera tiene sentido educativo, dado que puede y debe contribuir a ayudar a aprender, la segunda refiere a necesidades institucionales, insoslayables por otra parte" (p. 86).
En términos de evaluación, las actividades de exploración son una herramienta para ello además de una herramienta de enseñanza. En este sentido, dichas actividades (como las ejemplificadas antes) permiten que los alumnos pongan en juego sus conocimientos y por tanto, que afloren sus ideas previas. Los debates en torno a las estrategias que desarrollan los estudiantes representan una retroalimentación para los estudiantes y por tanto, una oportunidad para resignificar las ideas previas y revisar las imágenes conceptuales de los estudiantes. En este sentido, las actividades como las anteriores son además de actividades de enseñanza, actividades de evaluación.
También se propone a los estudiantes una actividad de evaluación al inicio de la unidad. La consigna de la misma es la siguiente:

Actividad: Escriba todo lo que conozca sobre funciones continuas. Puede incluir definiciones, interpretaciones, gráficos, ejemplos, propiedades, formas de definir funciones continuas, y todo aquello que recuerde.

Esta actividad es pensada para el comienzo de la unidad por dos motivos. Por una parte, permite al docente conocer aquellas ideas sobre funciones continuas que tienen disponibles los estudiantes. Por otra parte, la actividad, o más precisamente las respuestas de los estudiantes, pueden ser revisitadas para "revisar" aquellas ideas iniciales de los estudiantes.

En este sentido, la actividad será devuelta a los estudiantes algunas veces durante el desarrollo de la unidad, con el fin de relativizar algunas propiedades, resignificar algunos conceptos, agregar propiedades que no fueron incluidas por ellos, entre otras cosas. En definitiva, la actividad permite establecer vínculos entre lo que los estudiantes saben al comienzo de la unidad y los ideas tratadas durante el desarrollo de la misma.
También se propone al finalizar la unidad una prueba de carácter escrito, que permita a los estudiantes dar cuenta de los avances logrados durante el desarrollo del mismo.
La bibliografía recomendada para los estudiantes, incluye los libros Munkres (2002), Croom (2008) y Adams y Franzosa (2009). Los mismos son seleccionados por una parte, porque el desarrollo teórico de la unidad ha sido diseñado en base a estos libros. Por otra parte, estos libros tienen una variedad de ejemplos y explicaciones útiles a los estudiantes para un primer curso de topología.

3. Proyección en líneas de investigación

El Plan 2008 (SUNFUD) al referirse a la investigación, dice que "se debe priorizar la investigación en el área de la docencia, ya que es esperable que de sus resultados se desprenda una reflexión crítica que redunde en el mejoramiento de la calidad de la enseñanza den todo el sistema educativo" (p.78). En este sentido, se plantea una investigación acorde al planteo de programa de la asignatura en lo que refiere a imágenes conceptuales. El mismo menciona que el curso de Topología busca

> … una refundamentación y reordenamiento de las bases con que el alumno llegó al tercer año de profesorado. Esta asignatura se presta y ha de ser utilizada fuertemente para romper con las falsas imágenes conceptuales que frecuentemente el alumno genera y reconstruir nuevas imágenes que se adapten mejor a los diferentes conceptos que las imágenes intentan representar.

Teniendo en cuenta que las investigaciones de Tall y Vinner (1981) estudian las imágenes conceptuales de los estudiantes al ingresar a la universidad, importa estudiar las imágenes conceptuales de los estudiantes al terminar un curso de topología. Precisamente el objetivo de la investigación es "indagar las imágenes conceptuales sobre funciones continuas que tienen los estudiantes que aprueban el curso de topología".
Los resultados obtenidos podrían arrojar luz para el diseño e implementación de futuras acciones de enseñanza en dicho curso. A partir de estos resultados se podrían organizar discusiones con colegas de topología de distintos centros a fin de definir estrategias de enseñanza que permitan mejorar los aprendizajes de los estudiantes.
Para la recolección de datos se diseñarán cuestionarios y entrevistas, a proponerse a alumnos que tengan aprobado el curso de topología.

Bibliografía consultada

Adams, C. y Franzosa R. (2009). *Introduction to topology. Pure and applied.* Primera Edición. India: PEARSON PRENTICE HALL.

ANEP/CFE (2008): Programa de la Asignatura Topología del Plan 2008. Disponible en http://www.cfe.edu.uy/images/stories/pdfs/planes_programas/profesorado/plan_2008/matematica/tercero/topologia.pdf

Armstrong, M.A. (1987). *Topología Básica.* Edición en español. España: Editorial Reverté S.A.

Blanco, L. (1996). Aprender a enseñar Matemáticas. Tipos de conocimientos. En Giménez, J.; Llinares, S.; y Sánchez, M.V. (eds.): El proceso de llegar a ser un profesor de primaria. Cuestiones desde la educación matemática. Granada. 199-221.

Brousseau, G. (1983). Los obstáculos epistemológicos y los problemas en matemáticas·, en Recherches en Didactique des Matémetiques. 4(2). DIE-Cinsestav. pp .165-198. México,

Charlot, B. (1986). La epistemología implícita en las prácticas de enseñanza de las matemáticas. Conferencia dictada en Cannes.

Charnay, R. (1994). Aprender (por medio de) la resolución de problemas. En C. Parra e I. Saiz (Eds.), Didáctica de matemáticas. Aportes y reflexiones, 51-63. Buenos Aires: Paidós Educador.

Croom, F. H. (2008). Principles of Topology. Primera reimpresión. India: Cenage Learning.

Dalcín, M., Ochoviet, C. y Olave, M. (2017): Una mirada a las prácticas de los formadores de la especialidad matemática: el profesor, el conocimiento y la enseñanza. ANEP/CFE. Departamento de Matemática. Disponible en línea en: http://www.cfe.edu.uy/images/stories/pdfs/publicaciones/2017/invest_2.pdf

El Bouazzoui, H. (1988). Conceptios des éleves et des peoresseurs a propos de la notion de continuité d'une fonction. PHD, Univertisé de Bordeaux.

Furió, C. (1994). Tendencias actuales en la formación del profesorado de ciencias. Enseñanza de las ciencias, 12 (2), 188-199.

Grupo Cero de Valencia (1987). De 12 a 16. Un proyecto de currículum de matemáticas. Valencia: Mestral Libros.

INEED (2017): Informe sobre el estado de la Educación en Uruguay 2015-2016). Disponible en https://www.ineed.edu.uy/images/pdf/Informe-sobre-el-estado-de-la-educacion-en-Uruguay-2015-2016.pdf

Kline, M. (2016). *El pensamiento matemático. De la antigüedad a nuestros días.* Primera edición, primera reimpresión. Madrid: Alianza Editorial.

Marcelo, C. (1994). Investigaciones sobre prácticas en los últimos años: qué nos aportan para la mejora cualitativa de las prácticas. Ponencia presentada al III Symposium Internacional sobre Prácticas Escolares, Poio.

Mellado, V. (1996). Concepciones y prácticas de aula de profesores de ciencias, en formación inicial de primaria y secundaria. Enseñanza de las ciencias, 14 (3), 289-302.

Munkres. J. (2002). *Topología.* Segunda edición. Madrid: PEARSON EDUCACIÓN.

Ochoviet, C. y Olave, M. (2017). Los modelos docentes en la formación de profesores de matemática: elementos para repensar los ambientes didácticos. ANEP/CFE. Departamento de Matemática. Disponible en línea en: http://www.cfe.edu.uy/images/stories/pdfs/publicaciones/2017/invest_1.pdf

Tall, D. & Vinner S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. Educational Studies in Mathematics, 12 (2), pp 151-169.

Santaló, L. y colaboradores. (1994). Enfoques. Hacia una didáctica humanista de la matemática. Buenos Aires: Troquel Educación.

Sistema Único Nacional de Formación Docente (SUNFD). Plan Nacional Integrado de Formación Docente (2008)

Zaslavsky, O. (1995). Open-ended tasks as a trigger for mathematics teachers' professional development. For the Learning of Mathematics, 15(3), 15-20.

Ecuaciones diferenciales

Ana Maldonado

Aspectos disciplinarios

Ecuaciones diferenciales es uno de los temas centrales del Análisis. Muchos autores plantean que esta rama de la matemática tiene sus orígenes en el siglo XVII con Newton y Leibniz. Sin embargo, Agarwal y O'Regan (2008) menciona a Bhaskara II y Madhava como los científicos de la antigüedad que introdujeron las primeras ideas del Análisis. Los conceptos básicos del teorema del valor medio y el cálculo de área de superficies curvas, entre otros temas, fueron trabajados por Bhaskara II en el siglo V. Posteriormente, en el siglo XIV, Madhava aportó avances en el estudio de series infinitas.

La primera idea sobre ecuación diferencial se puede hallar en los trabajos de John Napier, entre los siglos XVI y XVII, cuando inventó los logaritmos desarrollando la solución numérica de una ecuación diferencial. Alrededor de la misma época, podemos considerar que Galileo Galilei utilizó ecuaciones diferenciales para resolver el problema del espacio recorrido por un cuerpo en caída libre.

Las ecuaciones diferenciales aparecen de forma simultánea al cálculo infinitesimal con los trabajos de Isaac Newton (1642-1727) y Gottfired Leibniz (1646-1716). La idea innovadora, en su época, desarrollada por estos matemáticos, consistió en que si una variable y depende de otra variable x, y se conoce la tasa de variación de y respecto de x para cambios muy pequeños de x, entonces la determinación de y respecto de x se puede realizar mediante el cálculo de un área.

El concepto de ecuación diferencial fue "tomando forma" en el correr de los años, siendo entendidas como cualquier ecuación en la que interviene una variable dependiente y sus derivadas con respecto a una o más variables independientes. En particular, una ecuación diferencial ordinaria es una igualdad en que la incógnita es una función desconocida $y = f(x)$ definida y derivable hasta orden n para todo x en un intervalo abierto de reales, además aparece en la ecuación alguna de las derivadas de dicha función desconocida ($y' = f'(x)$, $y'' = f''(x)$, …y/o la derivada de orden n de $f(x)$). La terminología y el grado de generalidad en la definición de ecuación diferencial ordinaria de orden n es diversa en los libros de texto. En consecuencia, se presenta este concepto tomado de Imaz y Vorel (1968): "diremos que una ecuación diferencial ordinaria de orden n es una relación entre una variable independiente t, una variable dependiente x y sus derivadas $\frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, \ldots, \frac{d^nx}{dt^n}$, esto es una relación de la forma

$$F\left(t, x, \frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, \ldots, \frac{d^nx}{dt^n}\right) = 0$$

en donde F es una función con dominio en E^{n+2} [espacio euclideano de dimensión $n+2$] y valores en E^1." (Imaz & Vorel, 1968, p. 13)

Una solución en (a, b) es una función $x(t)$ definida en dicho intervalo con derivadas hasta orden n, si el punto

$$\left(t_0, x(t_0), \frac{dx(t_0)}{dt}, \ldots, \frac{d^nx(t_0)}{dt^n}\right)$$

pertenece al dominio de F para todo $t_0 \in (a, b)$ y además

$$F\left(t_0, x(t_0), \frac{dx(t_0)}{dt}, \ldots, \frac{d^nx(t_0)}{dt^n}\right) = 0$$

En muchos procesos naturales las variables se relacionan con sus ritmos de variación generando ecuaciones diferenciales que explican fenómenos físicos, químicos, biológicos o astronómicos. Este tema no solo posee gran cantidad de aplicaciones, tanto en la propia matemática (por ejemplo la geometría) como también en ingeniería y economía, sino que también tiene una importancia histórica en el desarrollo de la Matemática y gran vigencia.
El estudio de la dinámica del punto y del sólido rígido, fue lo que motivó los descubrimientos de Isaac Newton, sentando las bases del Cálculo Diferencial e Integral. Toma la derivada como operación básica y formula métodos analíticos que resolvían problemas tales como encontrar áreas, tangentes, longitudes de curvas, máximos y mínimos. Según Agarwal y O'Regan (2008), Newton colocó la primera piedra de las ecuaciones diferenciales a través de sus trabajos en velocidad del cambio, o fluxión de magnitudes que varían de manera continua tales como áreas, longitudes, distancias o temperaturas. Trabajó también con algunas ecuaciones diferenciales, en la segunda ley escribió $mv' = mg - kv$ (m, g y k constantes reales mayores que cero) que expresa la evolución del sistema donde una piedra cae por acción de la gravedad en diferentes medios (aire, agua, aceite, entre otros). Además, clasifica las ecuaciones diferenciales en tres tipos: el primero consistía en ecuaciones en las cuales la derivada es una función de una sola variable (tales como $\dot{y} = f(x)$ e $\dot{y} = f(y)$ con $\dot{y} = y'(x)$), el segundo eran ecuaciones en las que la derivada es una función que depende de dos variables (por ejemplo $\dot{y} = f(x, y)$ donde $\dot{y} = y'(x)$) y el tercero estaba formado por ecuaciones diferenciales parciales de primer orden (por ejemplo $\dot{u} = f(x, y)$ donde $u = u(x, y), \dot{u} = \frac{du}{dx}$). El método de resolución utilizado por Newton se basaba en desarrollar funciones por series de potencias, derivar y sustituir término a término. En 1687, publica su teoría física y su aplicación a la astronomía donde presenta el movimiento de n cuerpos, bajo la fuerza de gravitación, a través de ecuaciones diferenciales fundamentadas en su segunda ley.
En 1676 el matemático Gottfired Leibniz introduce el término "ecuación diferencial" para referirse a la relación entre dx y dy de dos variables x e y. Unos años antes, notó que la determinación de la tangente a una curva depende de la razón entre las diferencias entre las ordenadas y las abscisas, cuando las diferencias se hacen infinitamente pequeñas. Con esta teoría estudió, desde lo geométrico, el problema de la tangente inversa. Es decir, determina la curva (asociada al gráfico de una función) cuya tangente en un punto $P(x, y)$ de ella corta a $\overrightarrow{Ox}$ en un punto Q, tal que la distancia entre dichos puntos es una constante a, sabiendo que y debe satisfacer:

$$y' = -\frac{y}{\sqrt{a^2 - y^2}}$$

Asimismo, el primero en utilizar, de forma implícita, el método de separación de variables fue Leibniz en 1691, según Agarwal y O'Regan (2008). El matemático trabajó en la resolución de ecuaciones homogéneas de primer orden y de ecuaciones lineales de primer orden, y utiliza el cambio $y = z^{1-n}$.
El término "separación de variables" se debe esencialmente a John Bernoulli que, junto con su hermano Jame Bernoulli, desarrollan este método y también "cambio de variables". De manera que, este periodo se caracteriza por el esfuerzo en la búsqueda de métodos particulares de resolución, aplicables a tipos concretos de ecuaciones diferenciales. Los hermanos Bernoulli, seguidores de Leibniz, jugaron un papel importante en dicha búsqueda y la aplicación de la teoría en la solución de problemas físicos. Así pues, estudiaron el problema

del braquistocrono (el descenso más rápido), que consiste en determinar la curva que une dos puntos A y B (de distinta abscisa) en un mismo plano vertical, tal que una partícula (sometida únicamente a la gravedad) emplee el menor tiempo posible en recorrerla. Este problema es resuelto por una ecuación ordinaria de primer orden, que se obtiene utilizando la ley de Snell de la refracción y el principio de Fermat del tiempo mínimo.

Según Agarwal y O'Regan (2008) a fines del siglo XVII ya se habían desarrollado varios métodos para resolver ecuaciones diferenciales de primer orden. Primeramente, se centraron en reducir ecuaciones de primer orden a ecuaciones de variables separadas. Leibniz redujo la ecuación homogénea mediante la sustitución $y = ux$ y la lineal de primer orden mediante $y = uv$, y los Bernoulli redujeron a lineal la ecuación que hoy lleva su nombre ($a\,dy = yp\,dx + bqy^n\,dx$ con a y b constantes, p y q funciones de x continuas en un mismo intervalo y n natural distinto de cero y uno). También fueron utilizados factores integrantes y se probó que la ecuación que hoy se denomina de Euler puede reducirse de orden multiplicando por un factor x^k.

Asimismo, se dirigió la atención hacia las ecuaciones diferenciales de orden superior y las ecuaciones en derivadas parciales. En el siglo XVIII, la herramienta fundamental de investigación en problemas de mecánica, geometría diferencial y cálculo de variaciones fue la ecuación diferencial, y se relacionó con la teoría de funciones de variable compleja y con las series trigonométricas.

El matemático italiano Jacobo Riccati dedicó gran parte de su vida al análisis de fenómenos hidrodinámicos. Consideró ecuaciones de la forma $f(y, y', y'') = 0$, además se la ecuación particular $y'(x) = p(x)y^2(x) + q(x)y(x) + r(x)$, llamada por D´Alembert ecuación de Riccati, que ha sido estudiada por varios matemáticos de la época (Vincenzo, hermanos Bernoulli, el propio Riccati). Alrededor de 1723 se determina que no puede ser resuelta por métodos elementales. Posteriormente, Euler plantea que si se conoce una solución particular $y_1(x)$, con la sustitución $y = y_1 + z^{-1}$ convierte a la ecuación de Riccati en una de primer orden en z pudiendo así alcanzar la solución general. Asimismo, señaló que se puede obtener la solución general si se conocen dos soluciones particulares.

Mientras en Francia, Alexis Clairaut y Jean D´Alembert desarrollan una clase de ecuaciones diferenciales, que llevan sus respectivos nombres, al trabajar en sus aplicaciones a la física:

$$y(x) = xy'(x) + f(y'(x)) \qquad y(x) = xg(y'(x)) + f(y'(x))$$

En esa época, el matemático Leonhard Euler contribuyó en gran medida al estudio de las ecuaciones diferenciales, por ejemplo plantea: varios métodos de reducción de orden, método de variación de parámetros (que consideró posteriormente Lagrange), aportes en la teoría de ecuaciones lineales de segundo orden y el método de resolución por series de potencias. Cabe destacar que profundiza en la segunda ley de Newton dándole la forma analítica: $F = m\frac{d^2P(t)}{dt^2}$ con $F = (F_1, F_2, F_3)$ y $P(t) = (x(t), y(t), z(t))$.

En 1739 Euler planteó un tratamiento general de las ecuaciones diferenciales lineales ordinarias con coeficientes constantes encontrando una solución exponencial, en 1743 dio el método más general de la ecuación característica, y posteriormente profundiza en la ecuación no homogénea.

La generalización del método de variación de parámetros (creado por Euler) para encontrar una solución particular de una ecuación diferencial ordinaria no homogénea de orden n, o de un sistema, conociendo la solución general de la homogénea asociada, fue un desarrollo de Joseph-Louis Lagrange. Otra de sus contribuciones es el cálculo de variaciones, trata de encontrar una relación funcional $y = f(x)$ para que una integral $\int_a^b g(x, y, y')dx$ tome un valor máximo o mínimo. Asimismo, realiza aportes a la formalización del trabajo en mecánica, realizado por Newton, que incluye las ecuaciones generales del movimiento de un sistema dinámico (que hoy llevan su nombre).

En la misma época, se abordan problemas de hidrodinámica, elasticidad y electromagnetismo con la ecuación desarrollada por Pierre Simon de Laplace. Quien también realiza aportes en la resolución de numerosas ecuaciones lineales desarrollando su transformada.

Por su parte, la visión geométrica de Gaspard Monge le permitió realizar aportes a las ecuaciones diferenciales que, posteriormente, tuvieron su lugar en campos como la termodinámica y la mecánica clásica; varios matemáticos continuaron extendiendo los aportes de Monge.

A principios del siglo XIX, Joseph Fourier desarrolla su trabajo sobre la difusión del calor, para obtener la solución de la siguiente ecuación del calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

plantea de forma sistemática el método de separación de variables, alcanzando la representación de soluciones en series trigonométricas. De esta forma hace amplio uso de las series que ahora llevan su nombre y, utilizando razonamientos que otros matemáticos consideraron faltos de rigor, busca probar la convergencia de sus series a las correspondientes funciones periódicas. Algunos consideran que este trabajo originó los primeros pasos hacia la época del rigor, de esta manera, muchos de los descubrimientos matemáticos más importantes del siglo XIX están íntimamente ligados a la teoría de series de Fourier.

La idea de que no todas las ecuaciones diferenciales se pueden resolver, pues nada garantiza que la serie sea convergente o que, siendo convergente, sea hacia la función deseada, tuvo sus resultados. En 1820 cuando Augustin Louis Cauchy presenta la prueba rigurosa de existencia de las soluciones del problema del valor inicial (problema de Cauchy) $y' = f(x, y)$; $y(x_0) = y_0$. Para su demostración, Cauchy adapta el polígono de Euler, posteriormente, el matemático Rudolf Lipschitz realiza aportes simplificándola y aclarándola.

Como se puede observar, existen dos vías principales en el desarrollo histórico de las ecuaciones diferenciales. La más antigua se concentra en buscar soluciones explícitas (a través de fórmulas exactas o en términos de series de potencias), mientras que la segunda se caracteriza por obtener información sobre el comportamiento general de las soluciones. Según Simmons (1998), hacia 1880 Jules Henri Poincaré inicia la teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales en relación con sus trabajos en mecánica celeste.

En el siglo XIX se desarrolla los aportes de Cauchy y Lipschitz, con una perpectiva constructiva realizada por Émile Picard en su teoría de existencia basada en un método de aproximaciones sucesivas. Este método tuvo varios aportes de otros matemáticos, como: Joseph Liouville, Lazarus Fuchs, Giuseppe Peano y Maxime Bôcher.

Resulta pertinente, dada la relevancia histórica y su influencia a nivel epistemológico en el cambio de rumbo en el estudio de las ecuaciones diferenciales, plantear un bosquejo de dos métodos para construir soluciones del problema de valores iniciales para una ecuación diferencial ordinaria del tipo

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f\big(t, x(t)\big) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

donde f es una función continua en un abierto $U \subset \mathbb{R}^2$ y (t_0, x_0) es un punto de U.
Se utilizará funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, para apoyarnos en la visualización, sin embargo lo que se presentará es válido si sustituimos el codominio por $\mathbb{R}^n$. Asimismo, la condición que cumple f ($f \in C(U)$) se especificará en el proceso del segundo método.

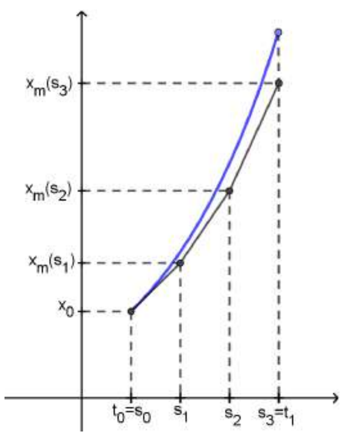
Método de Euler
El primer método que se presenta resuelve la existencia de la solución en un intervalo $[t_0, t_1]$, haciendo una discretización del tiempo que conduce a su aproximación por una poligonal.
La condición inicial junto con la ecuación nos determina la derivada de la solución en tiempo $t = t_0$: $\dot{x}(t_0) = f(t_0, x_0)$. Esto permite aproximar $x(t)$ cerca de t_0 de la siguiente forma: $x(t) \simeq x_0 + f(t_0, x_0)(t - t_0)$. Dividiremos el intervalo $[t_0, t_1]$ en intervalos $[s_i, s_{i+1}]$, donde. $s_0 = t_0$ y $s_i = s_0 + ih$ (con $i = 1, 2, \dots, m$) siendo $h = \frac{t_1 - t_0}{m}$.
De esta forma, para un m fijo, generamos una poligonal x_m fijando primero su valor en los puntos s_i de la siguiente manera:

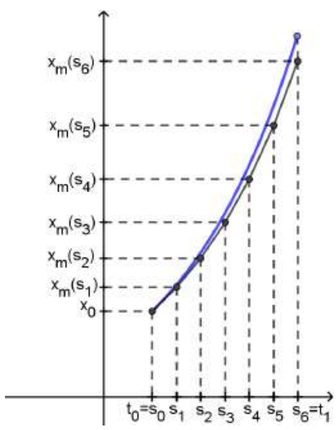
en $s_0 = t_0$ tomamos $x_m(s_0) = x_0$
en s_1 tomamos $x_m(s_1) = x_0 + f(t_0, x_0)h = x_m(s_0) + f(s_0, x_m(s_0))h$
en s_2 tomamos $x_m(s_2) = x_m(s_1) + f(s_1, x_m(s_1))h$,
$\vdots$
en s_{i+1} tomamos $x_m(s_{i+1}) = x_m(s_i) + f(s_i, x_m(s_i))h$.

Ahora se extiende la poligonal a todo $[t_0, t_1]$ definiendo x_m en cada intervalo (s_i, s_{i+1}), de la siguiente forma:

$$x_m(t) = \frac{t - s_i}{h} x_m(s_{i+1}) + \frac{s_{i+1} - t}{h} x_m(s_i), \qquad t \in (s_i, s_{i+1})$$

Cuando $m \to \infty$ la longitud h, de los intervalos, tiende a cero y, bajo hipótesis adecuadas, la poligonal x_m converge a la solución.
Este método presenta el inconveniente de que las aproximaciones x_m no son derivables, pues siendo una poligonal, no tiene tangente en s_i para todo i de 1 a m. El método iterativo que se presenta a continuación no tiene este problema, considerándose mejor a los efectos teóricos.





Método iterativo o de Picard
El segundo método que se presenta muestra una versión local de un resultado de existencia y unicidad de solución del problema de valores iniciales. Se tendrá que imponer la hipótesis adicional que f satisface la condición de Lipschitz en R, rectángulo compacto centrado en (t_0, x_0), es decir $|f(t, x) - f(t, y)| \leq L|x - y| \;\; \forall (t, x), (t, y) \in R$.

El primer paso es transformar el problema, ya que la ecuación diferencial y la condición inicial son equivalentes a que se satisfaga la ecuación integral

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds$$

Por un lado: $x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds = x_0 + \int_{t_0}^{t} \dot{x}(s)\, ds = x_0 + x(t) - x(t_0) = x(t)$.

Por el otro, $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds$, entonces se obtiene la condición inicial evaluando en t_0 ($x(t_0) = x_0 + \int_{t_0}^{t_0} f(s, x(s))\, ds = x_0$) y al derivar se obtiene $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$.

El segundo paso es interpretar el lado derecho de la igualdad del paso anterior, como el resultado de aplicar una transformación T a partir de la función $x(s)$, es decir

$$x(t) \longmapsto T(x) \quad con\, T(x)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds$$

El operador integral T es una transformación entre conjuntos de funciones continuas, de ahí que $T(x)(t)$ es el valor en t de la nueva función $T(x)$, que se obtiene aplicándole a x la transformación T.

La existencia de soluciones de la ecuación diferencial que buscamos radica en la existencia de punto fijo para un cierto operador T, en ciertas condiciones. Mientras que la unicidad de solución quedará sujeta a la unicidad de dicho punto fijo.

Para buscar un punto fijo de T se utiliza un método iterativo que consiste en llegar a la solución por sucesivas aproximaciones.

Se genera una sucesión (z_m), definida por $z_{m+1} = T(z_m), m = 0, 1, \ldots$

Para poder afirmar que (z_m) converge, es necesario probar previamente que es de Cauchy en un espacio completo*, y para ello T debe ser una contracción. Entonces, se buscará restringir el dominio de T para que $d\big(T(x_1), T(x_2)\big) \leq kd(x_1, x_2)$ con $k < 1$.

[*Nota: Se considera $C([a,b],[c,d])$, conjunto de las funciones continuas de $[a,b]$ en $[c,d]$, completo por ser cerrado en $C([a,b])$, que se asume completo con la distancia del supremo. Se plantea que $C([a,b],[c,d])$ es cerrado en $C([a,b])$ ya que: dada una sucesión de funciones continuas (g_n) con dominio $[a,b]$ y codominio $[c,d]$ tal que converge a una función g en $C([a,b])$, entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe n_0 tal que para todo $n > n_0$ $d(g_n, g) < \varepsilon$, utilizando la distancia del supremo significa que para todo $x \in [a,b]$ $|g_n(x) - g(x)| < \varepsilon$, asegurándonos así que (g_n) converge uniformemente a g y por lo tanto $g([a,b]) \subset [c,d]$.]

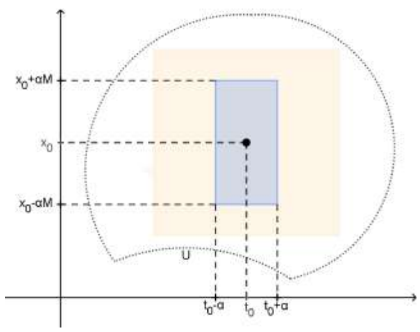
Utilizando la distancia del supremo, y nombrando $y_1 = T(x_1)$ e $y_2 = T(x_2)$:

$$d\big(T(x_1), T(x_2)\big) = d(y_1, y_2) = sup_{t\in[a,b]}\{|y_1(t) - y_2(t)|\}$$

Considerando la transformación T definida previamente:

$$\begin{aligned}
|y_1(t) - y_2(t)| &= \left| x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x_1(s))\, ds - \left(x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x_2(s))\, ds \right) \right| \\
&\leq \left| \int_{t_0}^{t} \big| f\big(s, x_1(s)\big) - f\big(s, x_2(s)\big) \big|\, ds \right| \underbrace{\leqq}_{f\ lips.} \left| \int_{t_0}^{t} L |x_1(s) - x_2(s)|\, ds \right| \\
&= L \left| \int_{t_0}^{t} |x_1(s) - x_2(s)|\, ds \right| \underbrace{\leqq}_{t\in[t_0-\alpha, t_0+\alpha]} \overbrace{L\,\alpha}^{k}\ sup_{s\in[t_0-\alpha, t_0+\alpha]}\{|x_1(s) - x_2(s)|\}
\end{aligned}$$

Sea α tal que $\alpha L < 1$, entonces $d\big(T(x_1), T(x_2)\big) \leq \alpha L\, d(x_1, x_2)$ con $x_1, x_2 \in C([t_0 - \alpha, t_0 + \alpha])$, así T es una contracción. Por otro lado, sabemos que $|f(t, x)| < M\ \forall (t, x) \in R$ y debemos asegurarnos que $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \times [x_0 - \alpha M, x_0 + \alpha M] \subset R$. Para simplificar la notación representaremos con X al conjunto de las funciones continuas de $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ en $[x_0 - \alpha M, x_0 + \alpha M]$. Debemos asegurarnos que $T(X) \subset X$, para ello se toma $x \in X$ y se considera $y = T(x)$ donde $y(t_0) = x_0$ e $\dot{y}(t) = f(t, x(t))$, entonces $|\dot{y}(t)| < M$. Por el teorema del punto medio de Lagrange:



$$\left|\frac{y(t) - y(t_0)}{t - t_0}\right| < M \Rightarrow |y(t) - x_0| < \alpha M$$

A continuación, veremos que la sucesión definida previamente es de Cauchy. Recordemos que $z_m = T(z_{m-1})$, con $z_m \in C([a, b], [c, d])$

$$\left.\begin{array}{c} d(z_n, z_m) \leq d(z_n, z_{n+1}) + d(z_{n+1}, z_{n+2}) + \cdots + d(z_{m-1}, z_m) \\ d(z_{m-1}, z_m) = d\big(T(z_{m-2}), T(z_{m-1})\big) \leq \alpha L d(z_{m-2}, z_{m-1}) \ldots = (\alpha L)^{m-n-1} d(z_n, z_{n+1}) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{c} \Rightarrow d(z_n, z_m) \leq (1 + \alpha L + (\alpha L)^2 + \cdots + (\alpha L)^{m-n-1}) d(z_n, z_{n+1}) \leq \dfrac{1}{1 - \alpha L} d(z_n, z_{n+1}) \\ d(z_n, z_{n+1}) = d\big(T(z_{n-1}), T(z_n)\big) \leq \alpha L d(z_{n-1}, z_n) \ldots = (\alpha L)^n d(z_0, z_1) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d(z_n, z_m) \leq \frac{(\alpha L)^n}{1 - \alpha L} d(z_0, z_1)$$

De esta forma dado $\varepsilon > 0$, tomo n_0 tal que $\frac{(\alpha L)^{n_0}}{1-\alpha L} d(z_0, z_1) < \varepsilon$; por lo tanto $d(z_n, z_m) < \varepsilon$ si $n, m \geq n_0$.

Estamos en condiciones de decir que la sucesión (z_n) es de Cauchy en $C([a, b], [c, d])$ completo, entonces converge a $z \in C([a, b], [c, d])$.

z es un punto fijo de T pues $z = \lim_{n \to +\infty} z_n = \lim_{n \to +\infty} z_{n+1} = \lim_{n \to +\infty} T(z_n) = T(z)$, la última igualdad se obtiene considerando T una contracción, por tanto uniformemente continua y entonces continua.

Para comprobar que este punto fijo es único, se considera w punto fijo de T. Como T es una contracción $d(T(z), T(w)) \leq k d(z, w)$, considerando los puntos fijos obtenemos $d(z, w) \leq k d(z, w)$ con k entre cero y uno. Por lo tanto $d(z, w) = 0$, obteniendo así $z = w$ y comprobando la unicidad de la solución.

Para finalizar, resulta pertinente destacar que gran cantidad de matemáticos han profundizado el estudio cualitativo de las ecuaciones diferenciales en los siglos XX y XXI. Desde los trabajos de Aleksandr Lyapunov y Henri Poincaré se han realizado grandes avances, los problemas con mayor relevancia de la teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales se han focalizado en el estudio de la naturaleza de los puntos críticos, de los ciclos límites, en la teoría de las bifurcaciones y en los conceptos de estabilidad estructural.

Aspectos didácticos

El estudio de las ecuaciones diferenciales proporciona, al estudiante de formación docente, un espacio donde desarrollar el dominio de estructuras matemáticas, comprendiendo su formalidad y argumentación. Además, promueve las conexiones entre conceptos trabajados en Análisis elemental y nos permite abordar diversos problemas intramatemáticos. También promueve la vinculación del Análisis y Topología a través de algunos teoremas, como ser: unicidad, punto fijo y Picard.

Otro aspecto relevante para la enseñanza de este tema en la formación docente es la gran cantidad de aplicaciones extramatemáticas, es decir en diversas ramas del conocimiento como la Física, Química y Biología.

Por lo expuesto anteriormente, es comprensible que las ecuaciones diferenciales se encuentren en los contenidos de varios programas de asignaturas del profesorado como también del maestro técnico, vigentes en nuestro país. Este tema permite a los estudiantes abordar diversos problemas, con una base de conocimiento sólido y focalizar en aspectos específicos de otras ciencias.

Dado que, los aspectos didácticos referidos a estrategias y evaluación que se considerarán posteriormente, están enmarcados en un modelo de formador de formadores. Se considera relevante profundizar en dicho modelo.

Olave (2013), en su tesis doctoral, desarrolla tres modelos docentes identificados en su investigación realizada con un grupo de formadores de profesores de Matemática, de materias específicas, en un Instituto de Formación Docente de Uruguay. Estos han sido determinados de acuerdo a los vínculos que se establecen desde la dimensión disciplinar con las dimensiones pedagógica y didáctica, identificándolos a partir de: visitas de clase, entrevistas a los profesores (previa y posterior a la clase), análisis de los textos recomendados por los profesores a los estudiantes y entrevistas a los estudiantes.

Los modelos identificados por Olave (2013) son: Disciplinar, Pedagógico y Didáctico-pedagógico. Se bosquejarán algunas de las características del tercer modelo pues vincula la dimensión disciplinar tanto con la dimensión pedagógica como la didáctica. Una característica es que el profesor y estudiantes organizan y transforman el conocimiento, a través de un proceso interactivo donde prevalece la construcción de conceptos por parte del estudiante, generando espacios para ello. La otra característica consiste en que el profesor es un facilitador del aprendizaje, y el conocimiento es considerado como una construcción social y acordada.

La relevancia del modelo de formadores de docentes se encuentra planteada por Shulman (2005) citado en Olave (2013), que recurre a dicho autor (entre otros) para elaborar los instrumentos de observación e interpretar la información obtenida. Olave presenta una tabla con una breve descripción de las fuentes del conocimiento base, desarrollada por Shulman, que refiere a un profesor o formador de profesores de cualquier asignatura. En dicha tabla, describiendo la formación académica de la disciplina a enseñar determina que “el FPM [Formador de Profesores de Matemática] debe ser consciente de que transmite valores y modelos docentes que afectarán a los EPM [Estudiante del Profesorado de Matemática] en la forma de comprender qué es la matemática, su enseñanza y su aprendizaje” (Olave, 2013, p. 54).

Las estrategias didácticas que se presentarán se basan en el modelo Didáctico-pedagógico pues atienden a las diferentes dimensiones del proceso de enseñanza aprendizaje, lo que es importante en la formación de los futuros docentes. Asimismo, en las conclusiones de la investigación de Olave (2013), propone promover instancias que permitan una mejora permanente de las prácticas desde el dicho modelo. Como todo, y este no es la excepción, el modelo tiene aspectos débiles, la autora destaca que no siempre se logra transmitir a los estudiantes la institucionalización de los conocimientos; es posible que la instancia de evaluación pueda ayudar en esto.

Un aspecto relevante para favorecer un aprendizaje constructivo es conocer los errores y dificultades de los estudiantes en los cursos. Distintas investigaciones (en diferentes entornos sociales y variados rangos de habilidad) han reportado la presencia de procedimientos, en la resolución de ecuaciones diferenciales, asociados a estructuras cognitivas pobres y manejados a un nivel puramente algorítmico. Asimismo, Dreyfus (2002), en su trabajo referido al pensamiento matemático avanzado con estudiantes universitarios, destaca la escaza visualización de los conceptos involucrados, la ausencia de conexiones cognitivas entre lo visual y lo simbólico, tanto para representar objetos como procesos matemáticos.
Según el autor, es importante que el estudiante tenga varias representaciones de un concepto acompañado de una correcta vinculación entre ellos, así podrá pasar de una representación a otra más eficiente en cada contexto. Para lograrlo plantea utilizar distintas representaciones en la enseñanza, enfatizando el proceso de cambio, que se ha logrado con éxito a través del uso de entornos informáticos en el currículo de ecuaciones diferenciales reportado por Artigue (1987) citado por Dreyfus (2002). Asimismo, plantea que los problemas aplicados son una buena herramienta, lo ejemplifica considerando un problema de oscilación (posiblemente con fricción) para ecuaciones diferenciales de segundo orden con coeficientes constantes. Otra aplicación es la de los circuitos eléctricos, aquí el estudiante no solo necesita comprender el contexto del problema aplicado, sino que también necesita establecer una correspondencia clara entre conceptos referidos a circuitos eléctricos y ecuaciones diferenciales. Incluso Dreyfus (2002) enfatiza que esta correspondencia es una tarea difícil para el estudiante y necesita ser apoyado por la acción explícita del docente.
Se presentan, a continuación, dos actividades que, por sus características, ejemplifican diferentes estrategias didácticas en el marco del modelo Didáctico-pedagógico. Estas fueron diseñadas y planteadas en trabajos de investigación en matemática educativa, referida a la enseñanza del tema ecuaciones diferenciales a partir de las dificultades en el aprendizaje y las recomendaciones reportadas. Desde los ochenta a la actualidad muchos investigadores han profundizado en estos aspectos como también, de forma general, en la enseñanza del Cálculo (Análisis). Sin embargo, a decir de Artigue (1995) “el mundo de la investigación, por un lado, y el de la innovación, por el otro, están lejos de establecer vínculos estrechos” (Artigue, 1995, p. 98). Se considera que llevar al salón de clase de formación docente estas propuestas promueven la relación entre dichos mundos y enriquecen la formación del futuro profesor.
Por un lado, se presenta una situación didáctica rediseñada por Quiroz y Rodríguez (2016), basada en el contexto de circuitos eléctricos RC (el circuito eléctrico RC consta de por lo menos una resistencia y un capacitor, entre otros elementos de él) para la enseñanza del modelo ecuación diferencial ordinaria lineal a estudiantes universitarios. En la misma se desarrolla el papel de la tecnología en la modelación matemática, para ello modifican una actividad planteada en Rodríguez (2010).
La actividad original busca modelar el funcionamiento de un desfibrilador cardíaco a través de los siguientes enunciados (Rodríguez, 2010, pp 200-201):

A. Se desea modelar el desfibrilador con ayuda de un circuito eléctrico (similar a aquellos estudiados en clase). Dibuje un circuito eléctrico y realice el diagrama justificando su elección.
B. Establecer un modelo (ED [ecuación diferencial]) para la evolución del voltaje en el desfibrilador. Justifique las leyes empleadas para el establecimiento del modelo.

C. Verificar que $Ae^{-t}/_{RC}$ es solución de la ED. Determinar el valor de la constante A usando una condición inicial.
D. Se sabe que solo el 4% de la corriente eléctrica es recibida por el paciente. Se necesita precisar el valor máximo de la corriente recibida por el corazón del paciente.
E. Comparar el resultado del inciso D con los datos de la tabla proporcionada. Con base en esta comparación, determinar si el paciente tiene posibilidades de sobrevivir.

Para la realización de la actividad se le entregó a los estudiantes: una breve descripción sobre el funcionamiento del desfibrilador, una imagen donde se ejemplifica el uso del aparato y una tabla con información sobre el tipo de reacción que presenta el cuerpo humano al recibir corriente eléctrica.

Se añade cuatro tareas a la actividad inicial, las que se basan en las siguientes herramientas tecnológicas a utilizar: una calculadora TI Nspire CX CAS, un sensor de voltaje TI (Texas Instruments), navegador TI, capacitor, resistencia (foco), baterías y conectores. La primera tarea que se incorpora, sustituye el dibujo solicitado en el enunciado A por el armado guiado del circuito eléctrico RC. La calculadora y el sensor son utilizados al agregar la tarea de obtener la gráfica de carga y descarga del capacitor. La tercera tarea que se incluye se centra en el análisis de la gráfica de carga y descarga del capacitor relacionando así los modelos físico y matemático. Por último, la cuarta tarea incorporada busca una relación entre el resultado matemático, el resultado físico y la respuesta a la situación real.

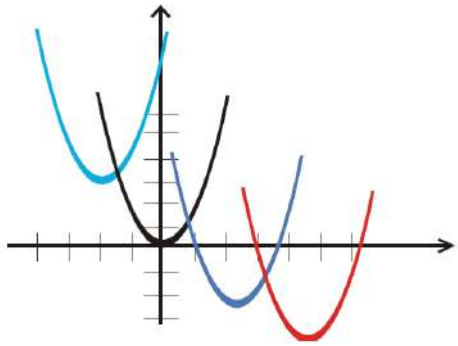
Las autoras reportaron que la estrategia didáctica desarrollada, centrada en la modelación matemática, permitió a los alumnos acercarse a problemas en contexto donde es posible la utilización de la matemática para dar respuesta al fenómeno estudiado. Asimismo, el contexto utilizado provee la oportunidad de comprender la manera de utilizar el método de ecuaciones diferenciales lineales y el funcionamiento de un circuito eléctrico RC. A su vez, el uso de herramientas tecnológicas permitió superar dificultades y resultó motivante para los estudiantes.

Por otro lado, dada la importancia de las distintas representaciones ya planteadas, se considerará la tesis, enmarcada en la socioepistemología, de Pérez (2009).

Este estudio aborda, mediante la utilización de situaciones problema, dificultades cognitivas en la visualización del teorema de existencia y unicidad y el campo de direcciones de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden. Uno de los principales problemas detectados fue que los estudiantes no lograron realizar la conversión de registros de representación, entre el registro algebraico, numérico y gráfico. A su vez, se logró enriquecer el conocimiento y la comprensión de los estudiantes a través del uso de un software de carácter libre. Pérez (2009) plantea, en las conclusiones, que se debe introducir una dinámica de interacción social en la clase, que promueva la coordinación de registros de representación necesarios para lograr el aprendizaje. Para que esto se cumpla las nociones deben ser aprendidas a partir de su uso en planeamiento y solución de problemas, donde se necesite un contenido visual, complementando así los tratamientos algebraicos, algorítmicos y numéricos. Es decir, la noción que se desea aprender es el conocimiento necesario para la solución óptima de la situación que el docente presenta. Igualmente, propone combinar los diferentes registros de representación (numérico, algebraico y geométrico) en un ambiente donde prevalezca la visualización, enriqueciendo así el contenido de la clase.

A continuación, se presenta una de las actividades diseñadas en la investigación de Pérez (2009). El objetivo de la tarea es verificar la comprensión del estudiante de las hipótesis del teorema de existencia y unicidad, y determinar si logra explicar las conclusiones del mismo.

Situación Problema número Tres (Pérez, 2009, p. 53): Considera la siguiente familia de curvas que se ilustra en la gráfica. Explica por qué estas no pueden ser una familia de curvas solución de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$, donde f es una función polinomio en las variables x, y.



Los saberes que moviliza esta situación son: continuidad, derivabilidad de una función de dos variables e intervalos de solución de una ecuación diferencial. Los saberes nuevos que se incorporan son: interpretación visual del teorema de existencia y unicidad, significado de la unicidad en la solución desde la interpretación gráfica, la imposibilidad de corte de curvas solución en una ecuación diferencial que cumple las hipótesis del teorema.
Por último, es necesario precisar que la evaluación es un reto para los docentes de forma constante y desde la teoría se han realizado varios aportes, entre los que se encuentra la evaluación formativa. Para comprender su significado se cita a Andrade (2010, citado en Martínez, 2012, p. 864):

> Toda definición de evaluación formativa debe basarse en su propósito, que deberá incluir informar sobre el aprendizaje de los alumnos a maestros y directivos para orientarlos en la planeación de la enseñanza y retroalimentar a los alumnos sobre su propio avance para ayudarlos a definir cómo cerrar las brechas entre su desempeño y los objetivos establecidos. La esencia de la evaluación formativa es la acción informada.

Es necesario precisar que, por un lado, explicitar los objetivos esperados promueve la reflexión de los estudiantes sobre su propio desempeño, y por otro, obtener información sobre el aprendizaje orienta al docente en la planificación.

Proyección en líneas de investigación

Varias investigaciones han reportado, citadas por Rodriguez y Quiroz (2016), que la enseñanza de las ecuaciones diferenciales basada en la presentación de una serie de procedimientos analíticos y algebraicos, que respondan a problemas puramente matemáticos, genera en los estudiantes un aprendizaje parcial que se reduce a lo algorítmico sin alcanzar una formación integral.
En particular, en Francia esta forma de enseñanza de las ecuaciones diferenciales en el ciclo básico universitario promovió la investigación de ingeniería didáctica, desarrollado por Artigue (1995) reportando los trabajos de Artigue y Rogalski (1990), Artigue (1992) y Artigue (1994). Elaboraron una ingeniería didáctica acorde con la epistemología del campo, por medio de la integración a la enseñanza de enfoques numéricos (asociado a la resolución aproximada) y

cualitativos (resolución abordada desde el cuadro geométrico). Detectaron una serie de restricciones que se imponían en la enseñanza de las ecuaciones diferenciales. Las restricciones en el plano cognitivo (asociado a la característica de los estudiantes) que reporta son dos: la movilidad entre el registro de las ecuaciones y el de las gráficas (funciones y las derivadas) y el manejo apropiado del cálculo elemental. El predominio histórico del cuadro algebraico, el hermetismo de las diferentes problemáticas de resolución y la dificultad de los problemas que dan origen a la resolución cualitativa, son considerados restricciones de carácter epistemológico. Por último, la restricción en el plano didáctico asociada a la enseñanza tradicional, que se encuentra ligada a las selecciones y hábitos del sistema de enseñanza. Partiendo de estas restricciones se construyó el proceso de ingeniería buscando destacar un enfoque cualitativo.

Otras investigaciones han surgido en la misma época, y posteriores, poniendo énfasis en una reforma en la enseñanza de las ecuaciones diferenciales, como lo señalan Guerrero, Camacho y Mejía (2010). Asimismo, afirman que la interpretación del proceso de resolución a través del estudio cualitativo de las soluciones de ecuaciones diferenciales fue expuesta con anterioridad por Tall (1986). Los autores destacan, citando varias investigaciones, que se ha evidenciado la mejora de aprendizajes a través de la integración de las representaciones gráfica y numérica para resolver e interpretar soluciones. Para ello, han sido de mucha ayuda para la visualización, el trabajo en paquetes computacionales (de campos de direcciones, curvas solución y expresiones algebraicas de algunas ED).

Por un lado, se desea destacar el trabajo de Pérez (2009) que evidencia la escasa visualización de ecuaciones diferenciales ordinarias en el contexto del teorema de existencia y unicidad y a partir de esto diseña una secuencia. Para el caso de un problema matemático, la importancia de la visualización se encuentra asociada con entender un enunciado mediante diferentes representaciones de la situación problema, permitiéndonos, posiblemente, realizar acciones que nos conduzcan a su solución. Dado que en la visualización se utilizan matemáticas relacionadas con varios campos (numérico, gráfico, algebraico, verbal y gestual), opera con el funcionamiento de las estructuras cognitivas, las relaciones entre las diversas representaciones de un objeto matemático e intervienen en una determinada cultura. Esta investigación se basa, desde lo teórico, en la aproximación socioepistemológica en matemática educativa, teniendo en cuenta: procesos cognitivos del estudiante, el elemento social, la componente didáctica y la epistemológica.

Se considera pertinente profundizar en esta línea de investigación pues la secuencia didáctica toma en cuenta la escasa visualización de ecuaciones diferenciales ordinarias en el contexto del teorema de existencia y unicidad y promueve la construcción de una dinámica social entorno a los conceptos, de acuerdo al modelo docente que se busca promover.

Pérez (2009) presenta una propuesta didáctica que incluye seis actividades y recurre a representaciones gráficas, geométricas y algebraicas. Comienza determinando terminología básica, tal como ecuación diferencial ordinaria, solución y solución general. Luego, bajo el título “Problema de valor inicial: TEyU” (Pérez, 2009, p.104), define la forma normal de una ecuación diferencial de primer orden y define el problema de valores iniciales de Cauchy. Posteriormente se profundiza en la no unicidad de la solución a través de una actividad generando así la necesidad de establecer la condición de Lipschitz. Por último, se trabaja en dicha condición a través de actividades donde se formaliza el concepto y se estudian algunas propiedades. También allí se plantea una actividad enfatizando en la dependencia del valor inicial en el intervalo de existencia de una solución, el teorema de existencia de Peano, el

enunciado del teorema de existencia y unicidad, y una actividad final donde se solicita encontrar el máximo intervalo que garantiza la existencia de una solución única de una ecuación diferencial concreta con condiciones iniciales.
La línea de investigación podría ir por dos caminos. Uno de ellos es el testeo de la propuesta didáctica en grupos de la asignatura Análisis II del Profesorado de Matemática. El otro camino sería enriquecer dicha propuesta incluyendo la demostración del teorema dentro del contexto que considera al conocimiento como una construcción social y acordada.
Por otro lado, es necesario precisar que algunos estudios realizados por organismos internacionales establecen la importancia del desarrollo de habilidades en los estudiantes para modelar y solucionar problemas en contexto de la vida real, desde el nivel secundario hasta el universitario. Se requiere desarrollar una serie de competencias donde no es suficiente que se adquieran conocimientos para la resolución de problemas, además habilidades para su uso en contextos cotidianos y específicos de cada profesión. Por otro lado, se ha incluido explícitamente el uso de la matemática en otras disciplinas científicas en programas curriculares de varias instituciones educativas. Como sucedió en Francia (desde el 2002), priorizando la modelación matemática como un proceso importante en el sistema de enseñanza para que el estudiante desarrolle cierta cultura matemática. Por ende, el rediseño de situaciones de aprendizaje que atiendan las necesidades actuales, pone a la modelación matemática como estrategia didáctica que tiende un puente entre la matemática escolar y la matemática de la vida cotidiana. De manera que la formación de los docentes no puede estar ajena a ello. En particular, el tema ecuaciones diferenciales propicia el desarrollo en este aspecto por sus amplias aplicaciones extramatemáticas. De esto se desprende la gran variedad de investigaciones que plantean reformular su enseñanza a través de la modelación de fenómenos diversos.
Al hacer referencia a modelación matemática, se entiende por

> Las situaciones propuestas en modelación matemática parten del establecimiento de actividades que planteen un problema en el contexto real, para el posterior armado de un modelo pseudo concreto, que se traduce en uno físico y, posteriormente, en un modelo matemático. A dichas actividades les continúan la resolución del modelo matemático, tanto en términos matemáticos como en físicos y pseudo concretos, donde se promueve la crítica del modelo y, si es necesaria su modificación. La respuesta a la pregunta establecida en un inicio completa el ciclo completo de la modelación matemática. (Quiroz y Rodríguez, 2016, p. 104)

La situación didáctica diseñada por Quiroz y Rodríguez (2016), y presentada en la sección anterior, puede ser trabajada en la asignatura Matemática Aplicada III del segundo año de la carrera Maestro Técnico en Electrónica. En Teoría de Circuitos, asignatura de primer año, se desarrollan los conocimientos previos que se requieren para la actividad. También se puede trabajar con esta propuesta en la asignatura Matemática II de la carrera Profesorado de Física ya que la asignatura Física II contiene el tema circuitos, ambas se encuentran en segundo año de la carrera. Profundizando esta línea de investigación se podría modificar la actividad agregando el uso de simuladores, ya que es una herramienta muy útil para el futuro docente en su área de conocimiento. De esta forma se puede rediseñar la actividad y testearla en distintos grupos.
Se puede profundizar en el diseño de otras situaciones de modelación matemática utilizando ecuaciones diferenciales, con el uso de tecnología para el tránsito entre sus etapas. Esto nos

podría aportar insumos en la práctica docente de los formadores de profesores, tanto para Matemática como para otras áreas donde se encuentra presente el tema en los programas.
A modo de ejemplo, se podría diseñar una situación específica (para primer año de Profesorado de Física) en el contexto de la fuerza de fricción, es un caso de fuerza de contacto presente en la interacción entre dos cuerpos a través del contacto directo entre sus superficies. La situación didáctica podría centrarse en el análisis del movimiento de una piedra al soltarla en una pecera profunda llena de fluido, en este caso la aceleración no es constante dado que actúa la resistencia del este (es la fuerza que un gas o líquido ejerce sobre un cuerpo que se mueve a través de él). Por lo tanto, si ignoramos cualquier fuerza asociada a la flotabilidad, y se considera la segunda ley de Newton se obtendrá la ecuación diferencial $m\frac{dv_y}{dt} = mg - kv_y$ que permitirá determinar la relación entre rapidez y el tiempo antes de obtener la rapidez terminal (determinada cuando la aceleración es cero, por lo tanto $v_t = \frac{mg}{k}$). Se podría filmar la caída de la piedra en estas condiciones y utilizar el tracker (programa informático específico) para obtener el análisis de la situación real.

Bibliografía

Agarwal, R., & O´Regan, D. (2008). *An Introduction to Ordinary Differential Equations.* New York: Springer.

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En P. Gómez, *Ingeniería didáctica en educación matemática.* (pp. 97-140). Ciudad de México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Dreyfus, T. (2002). Advanced Mathematical Thinking Processes. En D. Tall, *Advanced Mathematical Thinking. Mathematics Education Library, vol 11.* (págs. 25-41). New York: Kluwer Academic Publishers.

Gerrero, C., Camacho, M., & Mejía, H. (2010). Dificultades de los estudiantes en la interpreación de las soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias que modelan un problema. *Enseñanza de las Ciencias, 28*(3), 341-352. doi:10.5565/rev/ec/v28n3.431

Gil, O. (2000). *Curso introductorio a las ecuaciones diferenciales.* Montevideo: Centro de estudiantes de facultad de ingeniería.

Imaz, C., & Vorel, Z. (1968). *Ecuaciones diferenciales ordinarias.* México: Editorial Limusa Wiley.

Martínez, F. (2012). La evaluación formativa del aprendizaje en el aula en la bibliografía en inglés y francés. Revisión de literatura. *RMIE. Revista Mexicana de Investigación Educativa, 17*(54), 849-875. Recuperado el 1 de marzo de 2019, de http://www.scielo.org.mx/pdf/rmie/v17n54/v17n54a8.pdf

Olave, M. (2013). Modelos de profesores formadores de Profesores de Matemática: ¿cuáles son y en qué medida se trasmiten a los futuros docentes? Un estudio de casos. *Tesis doctoral no publicada. CICATA, IPN*. México. Obtenido de http://www.matedu.cicata.ipn.mx/tesis/doctorado/olave_2013.pdf

Perez, R. (2009). Estudio de dificultades Cognitivas en torno al Teorema de Existencia y Unicidad y el Campo de Direcciones de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias en dos contextos diferentes. Una perspectiva Visual. *Tesis de maestría no publicada. CInvEstAv, IPN*. México. Obtenido de https://www.researchgate.net/publication/275045126_Investigacion_de_dificultades_cognitivas_en_torno_al_teorema_de_existencia_y_unicidad_y_campo_de_direcciones_d e_ecuaciones_diferenciales_ordinarias_en_dos_contextos_diferentes_Una_propuesta_visual

Rodríguez, R. (2010). Aprendizaje y enseñanza de la modelación: el caso de las ecuaciones diferenciales. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 13*(4-I), 191-210. Obtenido de http://relime.org/index.php/numeros/todos-numeros/volumen-13/numero-especial-13-4-i/508-201012d

Rodríguez, R., & Quiroz, S. (2016). El papel de la tecnología en el proceso de modelación matemática para la enseñanza de las ecuaciones diferenciales. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 19*(1), 99-124. Obtenido de http://relime.org/articulos/1901/201604a/index.html

Romandía, C. (2013). Sistemas lineales de ecuaciones diferenciales y soluciones periódicas. *Tesis de grado. Universidad de Sonora*. México. Obtenido de http://lic.mat.uson.mx/tesis/CarmenRomandia.pdf

Simmons, G. (1998). *Ecuaciones Diferenciales. Con aplicaciones y notas históricas.* Madrid: McGraw-Hill.

Young, H., & Freedman, R. (2009). *Física Universitaria volumen 1.* Naucalpan de Juárez: Pearson Educación.

Sucesiones y series

José Mariño

Se expondrá a continuación un abordaje posible del tema *Sucesiones y Series* en la Sección Análisis en la Formación de Docentes. Dicho abordaje no constituye un conjunto de lineamientos que indiquen cómo trabajar la temática en un curso específico, sino que su finalidad es

- mostrar la relevancia del tema en cuestión y realizar algunas consideraciones relativas a la enseñanza de este,
- brindar ejemplos concretos de actividades que pueden ser llevadas a cabo en algunos de los cursos de la sección y
- proyectar algunas posibles líneas de investigación asociadas al tema.

El concepto de límite es central en el Análisis Matemático. En efecto, los conceptos más importantes y los principales resultados de esta disciplina se refieren directa o indirectamente a límites y dentro de estos procesos de límite, los límites de sucesiones y series ocupan un lugar destacado.

Muchos objetos matemáticos "complicados" se pueden *expresar* como el límite de una sucesión (o serie) de objetos matemáticos más "sencillos". Por ejemplo, la representación decimal de un número real perteneciente al intervalo $(0,1)$ expresa a este como la suma de una serie en la cual el término general es un número racional (de la forma $\frac{d_n}{10^n}$ con $d_n \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$), de forma similar, una función analítica puede ser representada mediante un desarrollo en serie de potencias (por ejemplo, se tiene para $|x| < 1$ que es $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$). Otro aspecto importante es que no solo podemos representar objetos conocidos mediante el límite de una sucesión de otros objetos conocidos más "sencillos" sino que, mediante este proceso de límite, podemos *extender* el conjunto de estos objetos conocidos a otro más amplio. Por ejemplo, el número e de Euler lo definimos (véase la Actividad 1) como el límite de una sucesión de números racionales. En forma similar, se puede definir, si no se desea hacer referencia a la Geometría, las funciones trigonométricas a partir de su desarrollo en serie de potencias (por ejemplo, podemos definir $\sin x$ mediante la igualdad $\sin x \coloneqq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$).

Otro aspecto para destacar del concepto de sucesión es que el universo en el cual las sucesiones pueden ser consideradas va mucho más allá de las sucesiones de números reales o las sucesiones de funciones de reales de una variable real. En efecto, puesto que las sucesiones son "funciones de dominio $\mathbb{N}$", se pueden considerar (variando el codominio) sucesiones en espacios métricos o, más genéricamente, en espacios topológicos y definir también en estos casos (ya que se dispone de un sistema de abiertos) la noción de límite de una sucesión. (La representación de objetos matemáticos como límite de una sucesión de objetos matemáticos más sencillos y la extensión del conjunto de objetos matemáticos conocidos mencionadas más arriba puede seguir realizándose en este contexto más general si se agregan hipótesis adicionales. Por ejemplo, si X es un espacio topológico y $A \subset X$ se tiene, que si una sucesión de puntos de A converge a x, entonces $x \in \bar{A}$; para que el recíproco se verifique, sin embargo, es necesario que X satisfaga el primer axioma de numerabilidad).

Por otra parte, muchos conceptos matemáticos importantes se pueden definir en términos de sucesiones (por ejemplo, trabajando con funciones reales de una variable real en un primer curso de Cálculo podría definirse la continuidad en un punto en términos de límites de sucesiones: f es continua en el punto a perteneciente al dominio de f si para toda sucesión (x_n) de puntos del dominio de f que converge a a se verifica que $f(x_n) \to f(a)$) y otros se definen en términos de sucesiones (por ejemplo, un espacio métrico completo se define como un espacio métrico en el cual toda sucesión de Cauchy es convergente).
Estos hechos, entre muchos otros (algunos otros se verán en las actividades propuestas), hacen que los conceptos de sucesión y límite de una sucesión sean extremadamente útiles en Matemática. Por otra parte, de todos los procesos de límite presentes en el Análisis Matemático, el límite de una sucesión de números reales es tal vez el más sencillo y, por este motivo, es razonable incluir este tópico al comenzar el estudio de esta materia.
Lo expuesto en los párrafos anteriores justifica la importancia de incluir el tema en la formación de docentes de Matemática.

Establecida pues la importancia del tema se detallarán los contenidos relacionados con *Sucesiones y Series* que se entiende deberían de estar presentes en la formación de docentes. Estos contenidos no hacen referencia a ningún curso específico de la sección: son contenidos con los que se considera pertinente que un estudiante que finalice la carrera haya tenido contacto en algún momento de su formación académica y que forman parte de los programas vigentes de las asignaturas de la sección. Los contenidos los agruparemos en tres niveles.
Observación. El Nivel 3 aplica únicamente a los estudiantes de los profesorados de Matemática y de Física. Por otra parte, existen carreras en las cuales el tema *Sucesiones y Series* no está presente en el currículo, tal es el caso del profesorado de Química, por ejemplo.

Nivel 1
En este primer nivel se incluyen las sucesiones y series de números reales. Una posible secuenciación de los contenidos a abordar podría ser la siguiente.
Sucesiones de números reales.

- Definición de sucesión. Con ejemplos varios, donde se muestren sucesiones en las que el término n-ésimo viene dado por una única expresión (por ejemplo, $(a_n): a_n = \frac{1}{n}$), otras en las que el término n-ésimo no viene dado por una única expresión (por ejemplo, $a_{2m} = \frac{1}{m}$; $a_{2m-1} = \frac{1}{2m}$), otras en las cuales la definición es realizada por recurrencia (como la sucesión de Fibonacci), etc. Se busca que los estudiantes se familiaricen con el concepto. Se entiende apropiado mostrar diferentes formas de representar gráficamente una sucesión y para ello los recursos informáticos pueden ser de gran utilidad. En este punto se entiende conveniente trabajar los conceptos de monotonía y acotación.
- Definición de límite de una sucesión. Con ejemplos varios, donde se muestren ejemplos de no convergencia y de convergencia, de convergencia monótona y de convergencia no monótona. Deberían presentarse algunos resultados básicos como ser, la unicidad del límite, que una sucesión convergente está acotada, que una sucesión acotada y monótona es convergente y las propiedades aritméticas de los límites. En este punto deberían incluirse también las definiciones de límite infinito y las generalizaciones de las propiedades aritméticas de los límites.

- Definición de subsucesión. Dar ejemplos y mostrar que si una sucesión tiene límite l, toda subsucesión de esta sucesión converge a l. Demostrar el teorema de Bolzano-Weierstass, definir sucesión de Cauchy y probar que (en $\mathbb{R}$) una sucesión es convergente si y solo si es de Cauchy.

Este sería según se entiende el núcleo básico temático correspondiente a sucesiones en este primer nivel. Dependiendo del curso específico en el que se trabaje podría incluirse más material. Por ejemplo, si el curso en cuestión es *Matemática II* del profesorado de Física, la lista anterior se considera exhaustiva (a menos, claro está, que inquietudes particulares por parte del grupo lleven a incluir algún tema adicional). Sin embargo, si el curso en cuestión es el de *Análisis I* del profesorado de Matemática se entiende que podrían incluirse temas como ser el límite superior y el límite inferior de una sucesión, el hecho de que una sucesión de números reales no puede ser sobreyectiva (i.e. que $\mathbb{R}$ no es numerable) pero que existen sucesiones que tienen a cada número real como valor adherente, etc.

Series.

- Definición de serie. Se deberían en este punto poner varios ejemplos de series que convergen y de series que no convergen, trabajar con series telescópicas y con la serie geométrica y demostrar la propiedad de linealidad de las series convergentes.
- Criterios de convergencia. Se entiende oportuno mencionar que la teoría de series con la que se trabajará no es superflua como podría pensarse en un primer momento ya que es muy difícil por lo general encontrar una expresión para la reducida n-ésima de una serie. Los ejemplos de las series telescópicas y geométricas son, en este sentido, excepcionales. Deberían trabajarse aquí la condición necesaria de convergencia ($\sum a_n$ convergente implica $\lim(a_n) = 0$), los criterios de comparación para series de términos no negativos, los criterios de la raíz y del cociente, la regla de Leibniz para series alternadas y las convergencias condicional y absoluta.

Nuevamente, este es núcleo básico en lo que a series numéricas se refiere. Otros contenidos deberían ser agregados según el curso específico que se esté considerando. Por ejemplo, en el caso de *Matemática II* del profesorado de Física se puede ver el criterio integral para series, puesto que los estudiantes trabajaron con integrales en el curso de *Matemática I*. En el curso de *Análisis I* del profesorado de Matemática pueden trabajarse estos temas (o al menos la parte introductoria sin incluir los criterios de convergencia) a continuación del tema sucesiones para posteriormente, luego de haber trabajado con derivadas, integrales y polinomios de Taylor, retomar con el segundo punto e incluir además algún tópico adicional como el criterio de Abel o el teorema de reordenación de series de Riemann.

<u>Nivel 2</u>

En este nivel se incluyen las sucesiones y series de funciones (reales, de una variable real) y la siguiente es una posible secuenciación de contenidos.

- Sucesiones de funciones. Ejemplos. Convergencia puntual y convergencia uniforme de una sucesión de funciones. Criterio de Cauchy para la convergencia uniforme. Se considera oportuno brindar ejemplos de sucesiones de funciones que no converjan puntualmente, de sucesiones de funciones que converjan puntualmente pero no uniformemente y de sucesiones de funciones que converjan uniformemente. La utilización de algún software de geometría dinámica (Geogebra, por ejemplo) puede ser de gran ayuda para que los estudiantes puedan visualizar lo que ocurre en cada caso (véase por ejemplo la Actividad 3).

- Teoremas de conservación de la continuidad y la integrabilidad a través de la continuidad uniforme. Debería analizarse también la relación existente entre la derivabilidad y la convergencia uniforme.
- Series de funciones. Ejemplos. Criterio M de Weierstrass.
- Series de potencias. Radio de convergencia. Uniformidad de la convergencia de una serie de potencias en un compacto contenido en el interior de su intervalo de convergencia. Teorema de Abel. Derivación e integración término a término de una serie de potencias. Series de Taylor. Funciones analíticas.

Este es el núcleo Básico de contenidos del Nivel 2. En algunos cursos en particular se entiende que algunas demostraciones debieran ser omitidas (por ejemplo, la demostración del teorema de Abel o la conservación de la integrabilidad a través de la convergencia uniforme en el caso de *Matemática II* del profesorado de Física) en tanto que otros temas pueden ser agregados en otro tipo de cursos, por ejemplo, en el curso de *Análisis II* la relación entre funciones analíticas y C^{∞} o el teorema que por estas latitudes es conocido con el nombre de Teorema de Tannery (que establece que en ciertas condiciones se conserva la "integrabilidad impropia" a través de la convergencia uniforme).

<u>Nivel 3</u>

En este nivel se incluyen las series de Fourier y los desarrollos de funciones de una variable compleja en series de potencia y en series de Laurent. Los contenidos a incluir serían los siguientes.

- Funciones periódicas. Coeficientes de Fourier y series de Fourier. Funciones seccionalmente continuas. Teorema de Fourier. Cálculo de series de Fourier. Se propone en este punto poner varios ejemplos de aplicación del teorema de Fourier y utilizar algún un software para mostrar la convergencia de una serie de Fourier. Integración de series de Fourier. Identidad de Parseval.
- Series de potencias (complejas). Disco de convergencia. Posibilidad de desarrollar en serie de potencia a una función holomorfa. Desarrollo en serie de Laurent. Clasificación de singularidades y cálculo de residuos. Se entiende pertinente comparar la posibilidad de desarrollo en serie de potencias de una función holomorfa con lo que ocurre en el caso de funciones reales de una variable real y mostrar la aplicación del cálculo de residuos al cálculo de integrales.

Este es el núcleo básico del Nivel 3. En el caso particular del curso *Matemática III* para profesorado de Física se sugiere introducir las series de Fourier a través de la formulación del problema de la conducción del calor en una barra, en tanto que las demostraciones del Teorema de Fourier y la identidad de Parseval deberían ser omitidas. Por otra parte, debería presentarse en este caso la transformada de Fourier y ver algunas aplicaciones de esta. El segundo punto, correspondiente a Análisis Complejo es exclusivo de la asignatura *Profundización en Análisis* del profesorado de Matemática.

Ahora que los contenidos a trabajar están fijados se establecerá cómo estos contenidos serán trabajados. Se dedicarán en lo que sigue algunas líneas para considerar algunos problemas con los cuales el docente se puede enfrentar al abordar estos contenidos y que pueden interferir negativamente en el proceso de aprendizaje de los estudiantes. Luego se

presentarán propuestas de aula que ejemplifiquen de manera concreta una forma posible trabajar algunos de estos contenidos matemáticos tan importantes.
En el aprendizaje de los procesos de límite los estudiantes se suelen encontrar con serias dificultades, inclusive en los casos más sencillos como el de las sucesiones de números reales. Tal como lo indica Artigue, la comprensión de estos procesos está en la mayoría de los casos, condicionada por la presencia de *obstáculos* epistemológicos que dificultan el aprendizaje. (También señala Artigue la presencia de *obstáculos* en el aprendizaje del concepto de función y en el concepto de número real, pero son aquellos asociados al aprendizaje de los procesos de límite los que más problemas traen cuando a nivel terciario se trabaja con *Sucesiones y Series*).
Los obstáculos epistemológicos que menciona Artigue en torno al concepto de límite están vinculados a la forma de concebir el conocimiento matemático. Por un lado, el sentido común que evoca el término límite (como una barrera que no puede ser traspasada ni alcanzada) constituye un freno para que el nuevo conocimiento emerja y tiende a afianzar, por ejemplo, concepciones monótonas estrictas de convergencia. Así, si se considera la sucesión $(a_n): a_n = k$ (constante) es posible que a los estudiantes les cueste reconocer a k como el límite de la sucesión. Este tipo de dificultad está emparentado con el conflicto que según Tall y Vinner puede existir entre la *imagen conceptual* (i.e. toda la estructura cognitiva asociada al concepto) de un cierto concepto matemático y la definición matemática del mismo.
Otro elemento que menciona Artigue tiene que ver con el tratar al proceso de límite como un proceso algebraico "finito" y transferir al objeto límite propiedades de los elementos del proceso (por ejemplo, considerar que, como todos los términos de la sucesión $(a_n): a_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{k!}$ son números racionales, el límite también debe ser un número racional o que, como las funciones $f_n: [0,1] \to \mathbb{R}; f(x) = x^n$ son continuas $\forall n \in \mathbb{N}$, el límite puntual de las mismas debe serlo, etc.) .
Los conocimientos adquiridos sobre los procesos de límite están además muchas veces relacionados por la geometría de las formas con que fueron asimilados, perdiendo de vista la identificación de los cuantificadores y la topología presente en el concepto y esto también se convierte en un obstáculo (en el ejemplo de la sucesión de funciones dada más arriba, "la gráfica de la función límite no es el límite de las gráficas de las funciones f_n").

Artigue señala que la cultura es un factor de influencia sobre los obstáculos epistemológicos, ya que el desarrollo del conocimiento no solo se establece a través de la evolución cognitiva del estudiante, sino que además está influenciado por las estructuras socioculturales donde se desenvuelve. Así, los obstáculos epistemológicos están ligados tanto al desarrollo personal como al medio cultural.

Ahora bien, ¿cómo manejan los estudiantes este tipo de conflictos? Según Tall existen dos formas posibles

- reconciliar el conocimiento previo con los nuevos conceptos a través de una reconstrucción de una nueva y coherente estructura cognitiva o
- mantener los elementos conflictivos en compartimentos separados y nunca traerlos simultáneamente a la mente consciente.

Puesto que la segunda opción requiere mucho menos esfuerzo, la mayoría de los estudiantes optan por la segunda "solución" separando la teoría problemática de los métodos utilizados para resolver problemas (en especial del tipo de los que se presentan en las pruebas escritas). A su vez, como los profesores saben que las preguntas de tipo conceptual son rara vez respondidas en forma acertada, proponen pruebas en las que la mayoría de los problemas se resuelven por aplicación de procedimientos rutinarios. Así, se cierra el círculo vicioso.

Estas son algunas de las dificultades que pueden presentarse a la hora de trabajar con *Sucesiones y Series*. En atención a estas dificultades se entiende que buena parte de las actividades que se desarrollen en el aula deben hacer énfasis en los aspectos conceptuales más que en aspectos rutinarios. No se quiere decir con esto que no deban trabajarse con actividades donde se deban aplicar procedimientos más o menos estandarizados. Estas en cierta medida son necesarias. Lo que se quiere hacer notar aquí es que el énfasis debe ponerse en lo conceptual y no en lo rutinario. En los párrafos siguientes ponemos a modo de ejemplo algunas actividades sobre el tema *Sucesiones y series* que podrían proponerse en algunos de los cursos de la sección y que ilustran esta visión.

Actividad 1

La siguiente actividad de clase está diseñada para ser trabajada en equipos de tres estudiantes en el curso de *Análisis I* de segundo año de profesorado de Matemática. Tiene como finalidad el fortalecer los conceptos de monotonía y acotación e introducir la definición de límite de una sucesión.

Actividad 1

1) Miren el video titulado *¿Qué es el número e?* siguiendo el enlace https://www.youtube.com/watch?v=Z5czpA-fyMU

2) Demuestren por inducción que dado un número real $h > -1$ se verifica la desigualdad $(1+h)^n \geq 1 + nh$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (esta desigualdad se conoce con el nombre de *desigualdad de Bernoulli).*

3) Prueben que las sucesiones $(a_n): a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ y $(b_n): b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ son monótonas y están acotadas.

4) En el instante 2:54 del video se afirma que *"para saber qué pasa si n va a infinito hacemos lo que se llama el límite y… malas noticias… ese dinero no crece hasta infinito, crece solo hasta 2,71828…"*
Discutan qué entienden por límite de una sucesión. A partir de la discusión, abstraigan una definición de límite de una sucesión que consideren matemáticamente precisa.

5) Lean la definición de límite de una sucesión dada en los textos [1], [2] y [3]. Cada integrante leerá la definición dada en solamente un texto. Después compartirán lo leído con los otros integrantes del equipo. ¿Son similares entre sí las definiciones dadas en los textos? ¿Son similares a la definición que elaboraron?

Evidentemente, esta actividad deberá ser complementada posteriormente con otras que fomenten un aprendizaje significativo de los estudiantes y permitan minimizar los efectos de

los *obstáculos* señalados. Se entiende conveniente, una vez que la definición de límite haya sido institucionalizada, demostrar la convergencia de sucesiones cuyo n-ésimo término venga dado por una expresión analítica más sencilla (por ejemplo, $\frac{1}{n}$); que converjan, pero no en forma monótona (por ejemplo, $\frac{(-1)^n}{n}$); o en las cuales el término n-ésimo no venga dado por una única expresión analítica.
La actividad anterior puede ser complementada con la siguiente una vez que los estudiantes se hayan familiarizado con la definición de límite y se hayan demostrado algunas propiedades básicas (en particular las propiedades aritméticas de los límites y la propiedad que establece que una sucesión monótona y acotada es convergente).

Actividad 1 (continuación)

6) Demuestren que las sucesiones (a_n) y (b_n) son convergentes.

7) Prueben que para $n > m > 0$ se verifica que es $a_m < a_n \leq a_m + \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{m!}$.
Concluyan que, poniendo $\lim(a_n) = l$, se verifica que es $a_m < l \leq a_m + \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{m!}$.

8) Utilicen la desigualdad anterior para obtener l con error menor que 10^{-6}.

9) Prueben que l es un número irracional.

10) Sea lim $(b_n) = e$. Muestren que para $m > n$ es
$$b_m > 1 + 1 + \frac{1}{2!} \cdot \left(1 - \frac{1}{m}\right) + \cdots + \frac{1}{n!} \cdot \left(1 - \frac{1}{m}\right) \cdots \left(1 - \frac{n-1}{m}\right).$$

11) Concluye que es $b_n \leq a_n \leq e$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y de aquí que es $l = e$.

Al realizar esta parte de la actividad los estudiantes pueden demostrar algunas de las afirmaciones que son hechas en el video, a saber, que las sucesiones (a_n) y (b_n) convergen ambas a un mismo número real (e), que e es un número irracional y que el número racional $r = 2{,}71828$ es una "buena" aproximación de e (más precisamente, que es $r < e < r + 10^{-6}$). Algo en lo que conviene hacer énfasis al culminar la realización de esta actividad es que el concepto de límite de una sucesión sirve en este caso para definir un nuevo número y que esta "creación" de nuevos objetos matemáticos a partir de procesos de límite volverán a verla una y otra vez en diferentes contextos, por ejemplo, cuando obtengan otras funciones distintas de las que ya conocen por integración de funciones elementales, como suma de una serie de potencias, etc. Se puede comentar también que de los resultados obtenidos se deduce que $\mathbb{Q}$ no es completo (en efecto, (b_n) es una sucesión de racionales que es de Cauchy pero que no converge a un racional).

Actividad 2

La actividad que se describe a continuación se diseñó para ser trabajada en el curso de *Análisis II* de profesorado de Matemática y está pensada para ser trabajada una vez que los estudiantes hayan trabajado con series de potencias.

El objetivo de esta actividad es reafirmar el conocimiento que los estudiantes poseen sobre series numéricas y desarrollos en serie de potencias e introducir las series de Fourier.

Al diseñar esta actividad también se estableció, como objetivo metamatemático, que los estudiantes se interioricen sobre el contexto en el cual se plantea el problema de Basilea, así como el contexto en el cual este es resuelto por vez primera, sobre los motivos de Euler para resolver el mismo y la repercusión que sobre la carrera de este gran matemático tuvo dicha resolución. Por otra parte, se pretende que los estudiantes puedan constatar cómo una herramienta diseñada para resolver otro tipo de problemas como las series de Fourier, son de utilidad para demostrar rigurosamente este famoso problema (de una manera bastante rutinaria, además). Se pretende, por otra parte, que con la realización de esta actividad los estudiantes puedan adquirir una visión más humana del quehacer matemático y percatarse de cómo condicionantes ajenos a lo estrictamente matemático influyen directamente en los avances de la Matemática. Se espera también que los estudiantes puedan apreciar cómo la percepción de la necesidad de pruebas rigurosas en Matemática se modifica históricamente.

Se pretende que los estudiantes, a la hora de buscar información, consulten fuentes diversas. Algunas serán indicadas por el docente, pero se espera que los estudiantes se sientan en total libertad de elegir las fuentes con las que trabajar. Por este motivo, se espera contar con conexión a internet. Se entiende, que el manejar diversas fuentes enriquecerá necesariamente el proceso de realización de la actividad.

Actividad 2

En esta actividad trabajaremos con el *problema de Basilea.* El problema fue propuesto en 1650 por Pietro Mengoli y consistía en hallar el valor de la suma $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$. El problema no fue resuelto sino hasta 1735 por Leonhard Euler.

Para la resolución de esta, podrían resultarte útiles las fuentes [1], [2], [3] y [4] citadas en la referencia bibliográfica.

1. Investiga qué llevo a Mengoli a formular este problema. ¿Por qué se lo conoce como *problema de Basilea?*
2. ¿Qué motivó a Euler a dedicarse a la tarea de resolver este problema? ¿Qué impacto tuvo en la vida de Euler el haber podido resolver este problema?
3. Lee en [3] la demostración original de Euler de la igualdad $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$ (*)
4. ¿Se dedica Euler en este trabajo exclusivamente a resolver el problema de Basilea?
5. ¿Cómo llegó a convencerse Euler de que los resultados que obtuvo *tenían* que ser ciertos? Estos argumentos con los que Euler se convenció a sí mismo de la veracidad de sus resultados, ¿constituyen una demostración rigurosa de los mismos? ¿Piensas que en la actualidad los matemáticos pueden llegar a convencerse de la veracidad de los resultados que obtienen con argumentos de este tipo? ¿Y tú a la hora de hacer Matemática?
6. ¿Consideras que la justificación dada por Euler de sus resultados es una demostración rigurosa? ¿Por qué?
7. Observa ahora en el vídeo [4] una justificación de (*) ¿Consideras que la misma es una demostración rigurosa de (*)? ¿Por qué? ¿Por qué consideras que este video tiene un número tan grande de reproducciones?

8. Estudia la justificación de (*) dada en [2]. ¿Consideras que esta es una demostración rigurosa?
9. Imagina ahora que ya eres profe de Matemática, estás trabajando con el curso Matemática II de segundo de BD (curso en el cual se trabaja con sucesiones de números reales) y algún estudiante te pregunta cómo se puede justificar (*). ¿Optarías por una justificación como la dada por Euler? ¿O por una demostración moderna de dicha igualdad? Justifica.
10. En grupos de tres o cuatro compañeros expliquen la igualdad (*) a compañeros que estén cursando otras especialidades. Compartan posteriormente en clase con los otros grupos qué tal resultó la experiencia.

Referencia bibliográfica de la Actividad 2
[1] Stillwell, J. (2010) *Mathematics and Its History.* Berlín. Springer-Verlag. (189-191)
[2] Guedes de Figueiredo, D. (1977) *Análise de Fourier e Equaçoes Diferenciais Parciais.* IMPA. Projeto Euclides.
[3] *On the sum of series of reciprocals.* Recuperado el 5 de marzo de 2019 en https://arxiv.org/pdf/math/0506415v2.pdf
[4] *¿Por qué está Pi aquí? ¿Y por qué es cuadrado? Una respuesta geométrica al problema de Basilea.* Recuperado el 5 de marzo de 2019 en https://www.youtube.com/watch?v=d-o3eB9sfls&t=721s

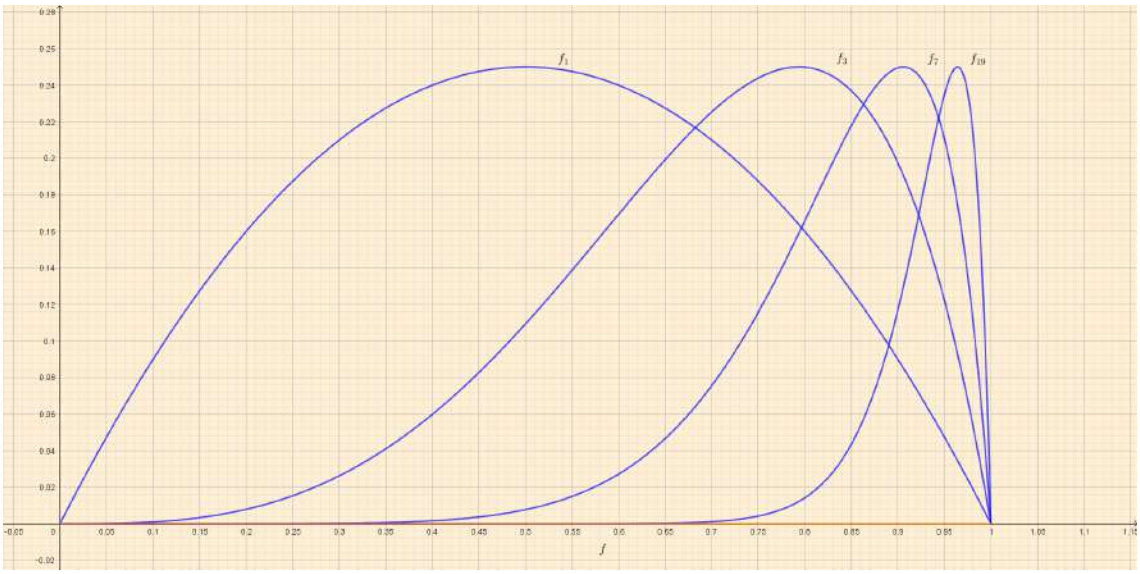
Se espera que, con la realización de esta actividad, además de alcanzar los objetivos propuestos, los estudiantes logren apreciar que la rigurosidad de una demostración matemática no da garantías de que con la misma se logre comprender la idea central de la proposición que se pretende justificar (en este sentido las fuentes primarias suelen ser una valiosísima herramienta que puede facilitar la comprensión de estas ideas centrales). Este es un hecho de suma importancia dada la especificidad que para los docentes tiene el conocimiento matemático: para estos el saber matemático no es solamente algo que debe aprenderse o aprenderse y aplicarse; es algo que debe aprenderse y debe poder ser, *a posteriori*, socializado con sus estudiantes (y no con un grupo de pares como en el caso de un investigador).
Si bien el desarrollo de esta actividad insume mucho tiempo didáctico (y "adidáctico" al decir de Brousseau), se entiende que los logros que pueden alcanzarse compensan el tiempo invertido.

Actividad 3
Esta actividad tiene por finalidad ilustrar los conceptos de convergencia puntual y uniforme de una sucesión de funciones. La actividad está diseñada para ser trabajada tanto en el curso de *Análisis II* de profesorado de Matemática como en el curso de *Matemática II* de profesorado de Física. Está pensada para ser desarrollada con el uso de Geogebra y se supone cierto grado de familiaridad con el uso de este software por parte de los estudiantes.

Actividad 1
Se considera la sucesión de funciones (f_n): $f_n(x) = x^n - x^{2n}$ con $x \in [0,1]$.

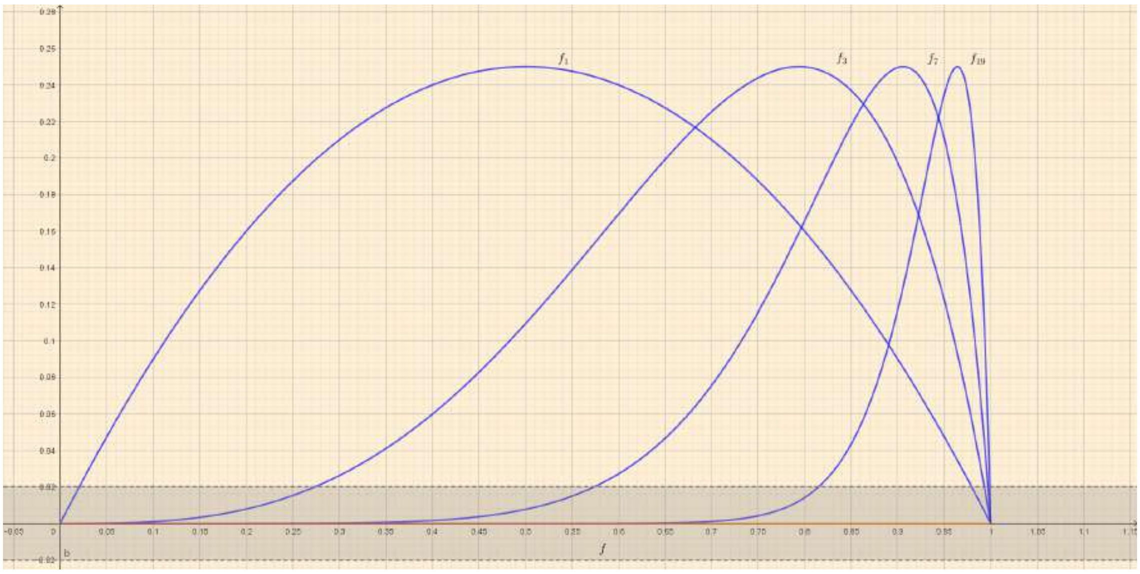
1. Crea un deslizador n que tome todos los valores naturales comprendidos entre 0 y 25 (y solamente estos valores).
2. Crea una función f_n de dominio $[0,1]$ para la cual se tenga $f_n(x) = x^n - x^{2n}$.
3. Observa cómo varía el gráfico de la función f_n al variar n.
4. Halla el límite puntual de la sucesión (f_n). ¿Está en concordancia con lo que observaste en el apartado 3?
5. Investiga si la convergencia de la sucesión de funciones es uniforme en $[0,1]$. ¿Está en concordancia tu conclusión con lo que observaste en el apartado 3?
6. ¿Cómo cambian las respuestas dadas en el apartado anterior si en vez de considerar el intervalo $[0,1]$ se considera el intervalo $[0,1)$? ¿Y si se considera un intervalo compacto contenido en $[0,1]$?
7. Considera ahora la sucesión de funciones (g_n): $g_n = \frac{1}{n} \cdot f_n$. ¿Cómo cambiarían las respuestas dadas en los apartados anteriores si se reemplaza en el enunciado de estas f_n por g_n?

Pensamos que la utilización del software puede ayudar a los estudiantes a comprender el comportamiento de la sucesión (f_n) en lo que refiere a la convergencia puntual y uniforme.
En la siguiente figura se muestran los gráficos de las funciones f_n para $n = 1,3,7,19$ así como también el gráfico de la función límite (puntual) representado en color anaranjado.



Poder visualizar estos gráficos (y más aún, el poder ver cómo estos varían *dinámicamente*) es un potente aliado para poder comprender la convergencia puntual de esta sucesión de funciones. Evidentemente, deberá probarse analíticamente que si $x \in [0,1]$, entonces $f_n(x) \to 0$, pero el poder verlo ayuda y mucho a comprender la situación que se tiene.
De la misma forma, ayuda y mucho a visualizar la no uniformidad de la convergencia (en $[0,1]$). En la siguiente figura se muestran los mismos gráficos anteriores y la "banda" $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, -\epsilon < y < \epsilon\}$ (en la figura es $\epsilon = 0{,}02$). Puede aquí apreciarse fácilmente la no uniformidad de la convergencia: no importa cuán grande sea n, existen valores de x ("cercanos a 1") para los cuales el punto $(x, f(x))$ **no** está en la banda. Obsérvese que puede apreciarse con claridad en la figura que para todo n entero positivo es

$sup\{|f_n(x) - 0|,\ x \in [0,1]\} = \frac{1}{4}$ y esto prueba la mencionada no uniformidad de la convergencia en $[0,1]$. Lo que habrá que hacer es mostrar analíticamente que se verifica $sup\{|f_n(x) - 0|,\ x \in [0,1]\} = \frac{1}{4}$. Esto, sin embargo, pueden hacerlo los estudiantes con facilidad utilizando las técnicas vistas en el curso de Análisis I.



El software es más que adecuado también a la hora de ayudar a comprender las situaciones que se plantean en las otras preguntas formuladas. En efecto, a partir de la figura anterior, por ejemplo, podemos intuir que la convergencia de la sucesión de funciones tampoco es uniforme en el intervalo $[0,1)$ pero sí lo es en intervalos compactos contenidos en $[0,1]$.
Análogos comentarios pueden ser realizados con respecto a la última pregunta.

Se finaliza este trabajo indicando dos posibles líneas de investigación asociadas con el tema *Sucesiones y Series.*
Estas líneas de investigación (y cualquier otra que pudiera desarrollarse) pueden desarrollarse en diferentes niveles. Pueden ser investigaciones llevadas a cabo por los estudiantes con la asesoría de un profesor tutor o pueden ser desarrolladas por los docentes del departamento (en forma individual o en colaboración). Un ejemplo del primer caso podría ser la profundización de algún concepto derivado del tema o el estudio de algún tópico relacionado que no se encuentra en el currículo. Un ejemplo del segundo podría ser el abordaje de algún problema abierto asociado al tema en cuestión. En este caso se entiende que sería interesante contar con el apoyo de investigadores con una trayectoria reconocida como constructores de conocimiento matemático.
Claro está que puede darse a la inversa de lo planteado en los ejemplos, esto es, que un grupo de estudiantes bajo la tutoría de un docente o equipo de docentes investiguen sobre un problema abierto o que el docente o los docentes del departamento profundicen en el estudio de tópicos relacionados con el tema sin realizar aportes a la solución de un problema abierto; es más, se entiende que esto también puede ser enriquecedor, tanto para la formación de los estudiantes como para la de los docentes.
Las siguientes líneas de investigación que se dan como ejemplo se desprenden de algunos de los temas abordados en la asignatura *Análisis I* del profesorado de matemática.

La primera está asociada al tema *Ecuaciones en diferencias.* Se entiende que el interés por este tema, que no está incluido en el programa, podría surgir por parte de los estudiantes desde el comienzo mismo del trabajo con sucesiones. Ciertamente, como se mencionó con anterioridad al comienzo de este tema conviene, a fin de que el estudiante se familiarice con el concepto de sucesión brindar ejemplos varios, donde se muestren sucesiones en las que el término n-ésimo viene dado por una única expresión y otras en las cuales la definición es realizada por recurrencia. La cuestión de si dado un cierto a_n mediante una fórmula recursiva es posible encontrar una fórmula explícita para este a_n pude surgir de forma natural y conducir al planteo de cómo resolver una de estas ecuaciones en recurrencia. De suceder esto, se entiende valioso que el docente favorezca y monitoree el estudio de este tema, pero permitiendo que sea el interés de los estudiantes el que guíe los puntos de la temática a profundizar.
Este interés podría centrarse en aspectos más o menos generales de la teoría como ser las ecuaciones en recurrencia lineales, el caso no lineal o las aplicaciones en Probabilidad a los recorridos aleatorios o problemas de ruina (de ser así se entiende conveniente involucrar a docentes de la sección *Probabilidad y Estadística-Computación*), en el primer caso; o en aspectos más particulares que pudieran llamar su atención como los números de Fibonacci o los de Catala, en el segundo; o podría centrarse el interés en el estudio de algún problema abierto dentro de la teoría.

La segunda está asociada con los diferentes conceptos de *sumabilidad* de una serie. Se entiende que inquietudes relacionadas con este tópico, podría emerger eventualmente al trabajar con series. En efecto, se entiende que podría surgir el cuestionamiento de si existen nociones de convergencia de una serie alternativas a la abordada en el curso. Nuevamente, si este fuera el caso, se entiende que el docente debe promover un estudio sobre el tema y puede motivarlo con alguna una introducción que llame la atención del estudiante (por ejemplo, se entiende que puede ser motivante el realizar una introducción mostrando en forma heurística en qué forma puede tener sentido la igualdad $1 + 2 + 3 + \cdots = -\frac{1}{12}$). Los estudiantes podrían así, guiados por el docente, profundizar en temas como la sumabilidad de Abel, de Césaro o de Borel y en la idea de *regularidad* de un determinado método de sumación.

Bibliografía

La bibliografía que se presenta a continuación fue la utilizada para desarrollar este proyecto. La misma también es recomendada como referencia para ser usada tanto por los estudiantes como por los docentes, pero no pretende ser exhaustiva.

Ahlfors, L. (1979). *Complex Analysis.* McGraw-Hill.

Apostol, T. (1996). *Análisis Matemático.* Barcelona: Reverté.

Apostol, T. (2002). *Calculus. Volumen I.* Barcelona: Reverté.

Courant, R. & John, F. (1997). *Introducción al Cálculo y al Análisis Matemático. Volumen I.* Limusa.

Guedes de Figueiredo, D. (1977). *Análise de Fourier e Equaçoes Diferenciais Parciais.* Río de Janeiro: IMPA.

Lima, E. (1970). *Elementos de Topologia Geral.* Río de Janeiro: Ao Livro Técnico.

Lima, E. (2005). *Espaços Métricos.* Río de Janeiro: IMPA.
Lima, E. (2006). *Curso de Análise. Volumen I.* Río de Janeiro: IMPA.
Linés, E. (2009). *Principios de Análisis Matemático.* Barcelona: Reverté.
Munkres, J. R. (2002). *Topología.* Madrid: Pearson. Prentice Hall.
Peláez, F. (2010). *Cálculo*. Montevideo: DeLaTaplan.
Priestley, H. (2011). *Introduction to Complex Analysis.* Oxford University Press.
Spivak, M. (2014). *Calculus.* Barcelona: Reverté.
Stillwell, J. (2010). *Mathematics and Its History.* Berlín: Springer-Verlag.

Por otra parte, lo que refiere a los obstáculos epistemológicos y a las dificultades que experimentan los estudiantes, asociadas al aprendizaje de los procesos de límite puede verse en

Artigue, M. (1995). Cap. 6: La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En Gómez, P. (Ed.) *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*, pp. 97-135. México: Grupo Editorial Iberoamericana.

Hitt, F. & Páez, R. *Dificultades de aprendizaje del concepto de límite y actividades de aula.* Recuperado el 5 de marzo de 2019 en https://www.researchgate.net/publication/268176026_Dificultades_de_aprendizaje_del_concepto_de_limite_y_actividades_de_ensenanza/download

Continuidad

Verónica Molfino

> Se puede comparar la geometría elemental con un hombre vestido con trajes multicolores, la geometría proyectiva con un cuerpo desnudo, y la topología con la osamenta humana. (Fréchet y Fan, 1959, p. 19)

El presente proyecto se inscribe en el marco del concurso de oposición y méritos para adquirir carácter efectivo en docencia directa en el Consejo de Formación en Educación, sección Análisis en la formación de docentes del Departamento de Matemática (nº 0014/2019).

El concepto matemático *continuidad* vertebra el desarrollo de las Matemáticas en la actualidad, lo que se ve reflejado en el currículo vigente para la formación de profesores. En la asignatura *Fundamentos* se abordan las funciones polinómicas que son un ejemplo paradigmático de función continua, en *Geometría* las isometrías, en *Geometría y Álgebra Lineal* se estudian las transformaciones lineales y es de interés analizar su continuidad, en *Probabilidad y Estadística* las funciones continuas son usadas a conveniencia para modelar situaciones reales y en otros cursos como *Análisis I y II, Topología y Profundización en Análisis*, el contenido estructura todo el programa. Las funciones continuas son también un contenido central en los cursos de *Matemática aplicada* en las carreras de Maestros Técnicos, dado el uso que se le da a las familias más conocidas para la modelización.

En este proyecto abordaremos el tema desde su concepción topológica por entender que nos brinda una visión amplia de los alcances de este contenido para todas las áreas de las matemáticas. Las funciones continuas en R o incluso R^n con la métrica usual son casos particulares de situaciones más generales y es formativo que así lo puedan percibir los futuros docentes.

a) Aspectos disciplinarios

a.1) Conceptos e ideas involucrados en el tema

a.1.1) Función continua en espacios métricos

Un recorrido por la definición

Los primeros intentos de definir *función continua* pueden encontrarse en los trabajos de Augustin Cauchy (1789-1857) y Bernard Bolzano (1781-1848). Si bien este concepto fue empleado anteriormente por varios matemáticos (Euler, Lagrange o D'Alembert, por ejemplo) es recién a partir de los trabajos de los dos primeros citados, inspirados en la necesidad de otorgarle rigor al análisis, que comienza a explicitarse una definición. Grattan-Guinness (1970) y Freudhental (1971) discuten sobre la posibilidad de que Cauchy estuviera influenciado por Bolzano e incluso lo plagiara. Más allá de esas controversias, nos interesa aquí analizar sus definiciones:

Según Bolzano (1817, p. 11),

> que una función f(x) varía acorde a una *ley de continuidad* para todos los valores de x dentro o fuera de cotas determinadas significa que, si x es esa variable, entonces la diferencia $f(x+\omega) - f(x)$ puede ser menor que cualquier cantidad dada, si se considera ω tan pequeño como se quiera (citado en Grattan-Guinness, 1970, p. 374, traducción propia).

Observemos que si bien no aparece explícitamente la misma notación ε-δ que en la actualidad, es consistente con nuestra definición actual. Por otro lado, Cauchy (1821, pp. 34-35) propone una definición más ambigua, haciendo uso de infinitesimales:

> La función f(x) será, entre los dos límites asignados a la variable x, *función continua de esta variable* si, para cada valor de x intermedio entre estos límites, el valor numérico de la diferencia f(x+α)–f(x) decrece indefinidamente con el de α. En otros términos, la función f(x) permanecerá *continua con respecto a x entre* los límites dados si, entre estos límites, un crecimiento infinitamente pequeño de la variable produce siempre un crecimiento infinitamente pequeño de la propia función (citado en Aizpuru y Pérez Fernández, 1999, p. 13).

Esta redacción es, además de ambigua, confusa, porque habla de continuidad en un punto y en un intervalo a la vez. Felscher (2000) explica que ambos trabajos tienen diferentes intereses, el primero se trata de un ensayo que buscaba la fundación conceptual del concepto de continuidad, mientras el segundo es un libro de texto, con intereses didácticos sin descuidar la búsqueda de rigor, lo que podría explicar las diferencias entre las definiciones.

Karl Weierstrass (1815-1897) atacó la falta de precisión de los trabajos precedentes por el uso de frases como "se hace menor que cualquier cantidad dada" o el uso de infinitesimales, que de alguna manera sugieren tiempo y movimiento. En un intento por brindar una idea más estática, propuso la definición aceptada actualmente:

> Una función f(x) *es continua en* $x=x_0$ si dado cualquier número positivo ε, existe un δ tal que para toda x en el intervalo $|x-x_0| < δ$, $|f(x) – f(x_0)| < ε$. Una función f(x) es continua en un intervalo de valores x si es continua en cada x del intervalo (citado en Kline, 1994, p. 1257).

<u>Definiciones actuales para funciones de variable real</u>

Para que las definiciones que adoptaremos de ahora en más tengan sustento, es necesario acordar las nociones de número real, valor absoluto, intervalo, punto de acumulación y límite. Adoptaremos, a tales efectos, el enfoque propuesto en Lages Lima (1982).

Lages Lima (1982, p. 174) propone la siguiente definición para funciones $f:X\to R$ siendo $X \subset R$:

> Diremos que $f:X\to R$ es *continua en un punto* $a\in X$ cuando, para todo ε>0 dado arbitrariamente, podemos hallar δ>0 tal que $x\in X$ y $|x-x_0| < δ$ implican $|f(x) – f(x_0)| < ε$.
> Diremos, simplemente, que f *es continua* cuando f es continua en todos los puntos de X.

El autor agrega observaciones que permiten vincular la idea de continuidad con la de límite:

1. Solo tiene sentido indagar la continuidad de una función para un punto *a* de su dominio.
2. Si *a* es un punto aislado de X (existe δ>0 tal que $(a-\delta,a+\delta)\cap X=\{a\}$) entonces toda función $f:X\to R$ es continua en *a*.
3. Si *a* es un punto de acumulación de X, entonces $f:X\to R$ es continua en *a* si, y solamente si, $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Por medio de un teorema introduce una definición alternativa de continuidad mediante sucesiones: "Teorema: Para que f:X→R sea *continua* en el punto a∈X es necesario y suficiente que $\lim_{x \to a} f(x_n) = f(a)$ para toda sucesión de números x_n∈X *con* $lim\, x_n = a$." (p. 177)

Extensión a espacios métricos

En la búsqueda por extender los resultados obtenidos para funciones de variable real, se han explorado otros espacios como R^n. De forma más genérica, en Apostol (1977, p. 73) se abordan los espacios métricos:

Un espacio métrico es un conjunto M, no vacío, de objetos (que llamaremos puntos) dotado de una función d:MxM→R (que llamaremos la métrica del espacio) que satisface las cuatro propiedades siguientes, cualesquiera que sean los puntos x, y, z de M:

1. d(x,x) = 0
2. d(x,y) > 0 si x≠y
3. d(x,y) = d(y,x)
4. d(x,y) ≤ d(x,z) + d(z,y).

El equivalente a los intervalos para esta generalización lo constituyen las bolas:

$$B(a,r) = \{x \in M; d(a,x) < r\}$$

Apostol extiende la definición de continuidad a funciones definidas entre espacios métricos:

> Sean (S,d_S) y (T,d_T) espacios métricos. La función f:S→T se llama *continua en un punto p de S* si para cada ε>0 existe un δ>0 tal que $d_T\big(f(x), f(p)\big) < \varepsilon$ siempre que $d_S(x,p) < \delta$.
> Si f es continua en todos los puntos del subconjunto A de S, es continua en A. (Apostol, 1977, p. 95)

Y formula también su expresión equivalente en términos de bolas:

> Una función f:S→T es *continua en p* si, y solo si, para cada ε>0 existe un δ>0 tal que f(B_S(p,δ)) ⊆ B_T(f(p),ε). (p. 95)

Las observaciones de Lages Lima referida a puntos aislados y de acumulación son válidas en esta extensión de la definición y también es posible establecer una definición en términos de sucesiones:

> Teorema. Sea f:S→T una función de un espacio métrico (S,d_S) a otro espacio métrico (T,d_T), y supongamos que p∈S. Entonces *f es continua en p* si, y solo si, para cada sucesión {x_n} de S convergente a p, la sucesión {f(x_n)} de T converge hacia f(p). (Apostol, 1977, p. 95-96).

a.1.2) Función continua en espacios topológicos

En el siglo XX los trabajos de Henri Poincaré (1854-1912) y Felix Hausdorff (1868-1942), entre otros, promovieron la generalización del concepto a nuevos contextos dentro de la matemática, mediante la consideración de los espacios topológicos como generalización de los espacios métricos, de los cuales el de la distancia habitual en el conjunto de los números reales es un caso particular. A partir de ello la noción de "cercanía" ya no descansa en aspectos geométricos ni métricos.

Espacios topológicos

Munkres (2002) introduce esta noción explicando que los matemáticos querían

> una definición que fuera lo más general posible, de manera que incluyera como casos especiales todos los distintos ejemplos que eran útiles en matemática, pero también querían que la definición fuese lo suficientemente estricta para que los teoremas habituales sobre estos espacios familiares se adaptaran a espacios topológicos en general. (p. 85).

El criterio para tal extensión se basa precisamente en la necesidad de extender la noción de continuidad para profundizar el estudio de propiedades que, aun sin conservarse mediante invariantes métricos o proyectivos, sí se conservan mediante transformaciones continuas.
Define entonces (p. 86):

> Una *topología* sobre un conjunto X es una colección τ de subconjuntos de X con las siguientes propiedades:
> 1. $\varnothing$ y X están en τ.
> 2. La unión de los elementos de cualquier subcolección de τ pertenece a τ.
> 3. La intersección de los elementos de cualquier subcolección finita de τ pertenece a τ.

Denomina a (X,τ) un *espacio topológico* y a cada conjunto U perteneciente a τ, *abierto*. Un *entorno* U de x es un conjunto abierto que contiene a x y lo escribimos U(x)[1]. Un subconjunto A de un espacio topológico X es *cerrado* si el conjunto X-A es abierto lo que permite formular una definición equivalente de espacios topológicos, en términos de conjuntos cerrados (la familia de conjuntos debe ser cerrada por intersecciones arbitrarias y por uniones finitas).
Munkres también define el *interior* de un subconjunto A de un espacio topológico X (Int(A)) como la unión de todos los conjuntos abiertos contenidos en A, lo que es equivalente a considerarlo como el conjunto de puntos x de A tales que existe un abierto U que cumple $x \in U \subset A$. Los puntos de int(A) se denominan *puntos interiores* de A.
Por otra parte, define la *clausura* de A (cl(A)) como la intersección de todos los conjuntos cerrados que contienen a A y demuestra que cl(A) es el conjunto de todos los puntos x de X tales que, para todo abierto U que contiene a x, se cumple $U \cap A \neq \varnothing$. La primera de estas caracterizaciones del conjunto clausura permite deducir que todo conjunto cerrado coincide con su clausura.
Por último, los *puntos límites o puntos de acumulación* de un subconjunto A de X son aquellos x de X para los cuales cada abierto U que contiene a x interseca a A en algún punto distinto de x.

¿Por qué los espacios métricos son también topológicos? El caso particular de (R,d_e)

Para vincular ambos conceptos podemos considerar la noción de base de un espacio topológico:
Una familia B de subconjuntos de X es *base* para una topología sobre X si:

[1] Otros autores, como Kelley (1962), definen entorno de un punto de manera ligeramente diferente: son conjuntos tales que existe un abierto que contiene al punto y está contenido en el entorno. No son necesariamente abiertos. Esto no influye en el desarrollo posterior ya que la manera de definir abierto es la misma.

i. $\forall$ x $\in$X, existe al menos un elemento básico B $\in$ B que contiene a x.
ii. Si x $\in B_1 \cap B_2$ que son elementos básicos, entonces existe un elemento básico B_3 que contiene a x y tal que $B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

Se define la *topología τ generada* por B así:
$A \in \tau \Leftrightarrow \forall x \in A$, $\exists$ un elemento básico $B \in$ B tal que $x \in B \subset A$.

Verifiquemos que es efectivamente una topología:
1. El conjunto $\varnothing$ es un abierto, cumple la condición por no tener puntos. Y X también la cumple por la parte i de la definición de base.
2. Si $x \in \cup A_\alpha$ siendo A_α abiertos, entonces pertenece a algún $A_{\alpha 0}$. Como $A_{\alpha 0}$ es abierto de τ, $\exists$ un elemento básico B $\in$ B tal que $x \in B \subset A_{\alpha 0} \subset \cup A_\alpha$.
3. Si $x \in A_1 \cap A_2$ entonces existen B_1 y B_2 de B tales que $x \in B_1 \subset A_1$ y $x \in B_2 \subset A_2$. Por condición ii) existe un elemento básico B_3 tal que $x \in B_3$ y $B_3 \subset B_1 \cap B_2$. Como $B_1 \cap B_2 \subset A_1 \cap A_2$ entonces existe B_3 tal que $x \in B_3 \subset A_1 \cap A_2$ por lo que es un elemento de τ.

Para el caso de los espacios métricos, podemos definir una base para la topología métrica de la siguiente manera, haciendo uso del concepto de bola ya introducido:
Si d es una distancia en X, entonces la colección B de todas las $B_d(x, \varepsilon)$ con $x \in X$ y $\varepsilon > 0$ es una *base para la topología métrica* sobre X inducida por d.
Puede demostrarse que se cumplen ambas condiciones de base, lo que permite definir la *topología inducida por la métrica d* como la topología inducida generada por B. Esto es, los abiertos en esta topología “métrica” son subconjuntos A tales que para cada elemento x de A, existe una bola de B (que puede ser centrada en x) contenida en A.
En particular, la distancia usual o euclídea d_e en el conjunto de los reales R genera una base de bolas B(a,r) que son los intervalos *(a-r,a+r) = {x∈R/ a-r<x<a+r}*. Esa base induce lo que generalmente denominamos la *topología usual en R*, que es el espacio métrico con el que estamos más familiarizados y en el que se alcanzaron los resultados desarrollados en el apartado a.1.1).

<u>Definiciones de función continua</u>
Recordemos la formulación por bolas de la definición actual de continuidad para espacios métricos:
Una función $f:S \to T$ es *continua en p* $\Leftrightarrow \forall \varepsilon>0, \exists \delta>0$ tal que $f(B_S(p,\delta)) \subseteq B_T(f(p),\varepsilon)$.

Considerando f^{-1}, la preimagen de la función f, y teniendo en cuenta que para todo conjunto D, $D \subseteq f^{-1}(f(D))$, de manera equivalente podemos escribir:
Una función $f:S \to T$ es *continua en p*$\Leftrightarrow \forall \varepsilon>0, \exists \delta>0$ tal que $B_S(p,\delta) \subseteq f^{-1}(f(B_S(p,\delta)) \subseteq f^{-1}(B_T(f(p),\varepsilon))$.

Lo que es equivalente a escribir: $\forall B_T(f(p),\varepsilon)$, $\exists B_S(p,\delta)$ tal que $B_S(p,\delta) \subseteq f^{-1}(B_T(f(p),\varepsilon))$.
Verbalmente podemos decir que el punto p es interior al conjunto preimagen de la bola $B_T(f(p),\varepsilon)$.

Si la función es continua en S, ese razonamiento puede generalizarse para concluir que el conjunto preimagen de $B_T(f(p),\varepsilon)$ tiene todos sus puntos interiores, esto es, es abierto. De allí que una extensión de la definición de función continua de un espacio topológico X a otro Y sea:

f : $X \to Y$ es *continua* en X si y solo si 1. $\forall$ V abierto de Y, el conjunto f^{-1} (V) es abierto en X.

Analicemos otras tres definiciones equivalentes:

f : $X \to Y$ es *continua* en X si y solo si:

2. $\forall\ x \in X$ y $\forall$ V(f(x)), $\exists$ U(x) tal que $f(U(x)) \subset V(f(x))$.
3. $\forall$ B cerrado de Y, f^{-1} (B) cerrado en X.
4. $\forall\ A \subset X$, $f(cl(A)) \subset cl\ (f(A))$

Definición 2: esta es la que nos acerca más a la definición para espacios métricos, empleando entornos en lugar de bolas.

(1)$\Rightarrow$(2): todo V(f(x)) es un abierto de Y por lo que f^{-1}(V) es abierto en X, podemos considerarlo como el propio U(x) buscado. Como $f(f^{-1}(V)) \subset V$, tenemos pues que $\exists$ U(x) tal que $f(U(x)) \subset V(f(x))$.

(2)$\Rightarrow$(1): V abierto en Y, si $f^{-1}(V)=\varnothing$ entonces es un abierto de X. De lo contrario, dado x en f^{-1}(V) por (2) $\exists$ U(x) tal que $f(U(x)) \subset V(f(x)))$ de donde $U(x) \subset f^{-1}(V(f(x)))$. De ahí que se pueda escribir a f^{-1}(V) como unión de abiertos de X, por lo que es abierto.

Definición 3: Se deduce del hecho de que $f^{-1}(B) = f^{-1}(X\text{-}A) = f^{-1}(X) - f^{-1}(A)$ con A un abierto de X.

Definición 4: Si bien es poco intuitiva, es útil en la demostración de teoremas, en particular la caracterización de una función continua por sucesiones (en espacios topológicos que cumplen el primer axioma de numerabilidad).

(1)$\Rightarrow$(4): $\forall x \in cl(A)$ y $\forall$ V un entorno de f(x). Por (1) sabemos que f^{-1}(V) es abierto en X de donde $\exists$ U(x) tal que $U(x) \subset f^{-1}(V)$. Como $x \in cl(A)$, $U \cap A \neq \varnothing$ de donde $f^{-1}(V) \cap A \neq \varnothing$. Por lo tanto, $V \cap f(A) \neq \varnothing$ por lo que $f(x) \in cl(A)$.

(4)$\Rightarrow$(3): $\forall$B cerrado en Y se cumple $f(f^{-1}(B)) \subset B$ y cl(B) = B. Sea $x \in cl(f^{-1}(B))$, $f(x) \in f(cl(f^{-1}(B))) \subset cl(f(f^{-1}(B))) \subset cl(B) = B$. De donde $x \in f^{-1}(B)$, por lo que $cl(f^{-1}(B)) \subset f^{-1}(B)$. Podemos concluir que $cl(f^{-1}(B)) = f^{-1}(B)$ y por tanto $f^{-1}(B)$ es cerrado en X.

<u>Homeomorfismo</u>

Dos figuras geométricas mantienen sus propiedades métricas cuando son congruentes, es decir, que existe una isometría que transforma una en la otra. Ahora, para que dos espacios sean "topológicamente equivalentes" la transformación debe, de alguna manera, respetar la topología, esto es, el conjunto de abiertos del espacio. Hablamos precisamente de homeomorfismos:

Dados (X,τ_X) e (Y,τ_Y), $f:X\rightarrow Y$ es un *homeomorfismo* si es biyectiva y bicontinua.
X e Y son espacios *homeomorfos*

El hecho de ser bicontinua puede expresarse también diciendo que f(U) es abierto si, y solo si, U es abierto, de ahí que se conserven los abiertos de una y otra topología.

> Como resultado, cualquier propiedad de X que se exprese completamente en términos de la topología de X nos da, vía la correspondencia de f, la propiedad correspondiente para el espacio Y. Tal propiedad de X se denomina *propiedad topológica* de X. (Munkres, 2002, p. 120).

a.1.3) Algunas propiedades topológicas

Si bien son muchas las propiedades que se conservan a través de homeomorfismos, nos centraremos en dos que permiten generalizar dos teoremas importantes: la *conexión*, que permite generalizar el teorema del valor medio atribuido a Bolzano (Freudenthal, 1971), y la *compacidad*, que permite generalizar el teorema de los valores extremos, atribuido a Weierstrass (Kline, 1994).

Conexión:

Un espacio topológico X es *conexo* si no existe una escisión (separación) no trivial: no existen dos abiertos disjuntos, no vacíos de X, tales que su unión es X.

Si bien la demostración no es trivial, un ejemplo paradigmático de espacio conexo es (R,d_e). Veremos cómo la conexión permite extender un resultado con múltiples aplicaciones en Análisis:

Teorema del valor medio (Munkres, 2002, p. 175):
$f:X\rightarrow Y$ es una función continua, donde X es conexo e Y un conjunto ordenado con la topología del orden[2]. Si *a* y *b* son dos puntos de X y *r* uno de Y que se encuentra entre *f(a)* y *f(b),* entonces existe un punto *c* en X tal que *f(c)=r*.

Demostración: Los conjuntos $A=f(X)\cap(-\infty,r)$ y $B=f(X)\cap(r,+\infty)$ son disjuntos y no vacíos porque $f(a)\in A$ y $f(b)\in B$. Cada uno es abierto en f(X) con la topología relativa a la del orden en Y. Dado que X es conexo, su imagen f(X) también lo es por ser una propiedad topológica. Entonces {A,B} no pueden constituir una separación no trivial de f(X), por lo que debe existir al menos un c en X tal que *f(c)=r.*

Compacidad:

Un espacio topológico X es *compacto* si toda familia A de subconjuntos abiertos de X cuya unión es X (recubrimiento abierto de X) admite un subrecubrimiento finito.

Es fácil ver que (R,d_e) no es un espacio compacto, pero sí lo es cualquier intervalo cerrado y acotado, resultado de demostración compleja que excede los intereses de este trabajo. Veremos cómo la compacidad permite extender el teorema de valores extremos, también con

[2] En un espacio X simplemente ordenado, la topología del orden es la generada por la base B de todos los intervalos de la forma (a,b), $[a_0,b)$ o $(a, b_0]$ siendo $a\in X$, $b\in X$ y a_0 y b_0 mínimo y máximo de X, si los hubiera.

múltiples aplicaciones en Análisis. Es un resultado que había sido empleado por matemáticos anteriores a Weierstrass, Cauchy por ejemplo (Kline, 1994), pero sin una justificación precisa.

Teorema de los valores extremos (Munkres, 2002, p. 198):
f:X$\rightarrow$Y es una función continua, donde Y es un conjunto ordenado con la topología del orden. Si X es compacto, existen puntos *c* y *d* en X tales que $f(c) \leq f(x) \leq f(d)$ para todo $c \in$X.

Demostración: Como X es compacto y f continua, f(X) es compacto. Si f(X) no tiene máximo, la familia $\{(-\infty, a) / a \in f(X)\}$ es un cubrimiento abierto de f(X) por lo que existe un subrecubrimiento finito: $\{(-\infty, a_1), (-\infty, a_2), \ldots, (-\infty, a_n)\}$ que cubre a f(X). Si a_1 es el mayor de los $a_1, \ldots, a_n$ entonces $f(X) \subset (-\infty, a_i)$, lo que es absurdo porque $a_i \in f(X)$. Análogamente se prueba que f(X) tiene mínimo.

Continuidad uniforme:
Finalmente haremos referencia a un concepto referido a espacios métricos e íntimamente relacionado con la continuidad, tanto es así que fue recién en 1870 gracias a Edward Heine (1821-1881) que se distinguió como una propiedad diferente a la continuidad puntual.

Una función f del espacio métrico (X, d_X) al espacio métrico (Y, d_Y) es *uniformemente continua* si dado ε>0, existe δ>0 tal que para cada par de puntos x_0, x_1 de X, $d_X(x_0, x_1) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x_0), f(x_1)) < \varepsilon$. (Munkres, 2002, p. 200).

No podemos distinguir con precisión si cuando Cauchy hablaba de "los incrementos infinitamente pequeños en la variable" se refería a la definición puntual o a la uniforme. De hecho, si el dominio de la función es un intervalo cerrado y acotado de reales (o, más generalmente, un conjunto compacto), entonces una función continua será también uniformemente continua, lo que fuera explicitado por Heine en 1872 (Kline, 1994).

a.2) Fundamentación epistemológica
Existen propiedades de las figuras que las caracterizan métricamente, son las relativas a las distancias. Esas propiedades serán compartidas por dos figuras que sean geométricamente equivalentes, esto es, congruentes. Formalmente, eso implica que existe una isometría (función biyectiva que conserva distancias) que transforma una en la otra. Otras propiedades, menos exigentes, refieren a la alineación de puntos y concurrencia de rectas. Ellas serán compartidas por dos figuras proyectivamente equivalentes, esto es, que existe una cantidad finita de secciones y proyecciones que transforma una en la otra. Al decir de Poincaré (1913), "que una sea la perspectiva de la otra" (citado en Fréchet y Fan, 1959, p. 5). Por ejemplo, una circunferencia, una elipse, una parábola o una hipérbola serán equivalentes desde el punto de vista de la geometría proyectiva pero no lo serán desde el punto de vista de la geometría métrica.
Por último, existen otro tipo de propiedades que no dependen de la medida ni de la alineación. Ejemplo de ese tipo de propiedades es la involucrada en el teorema de Jordan que Fréchet y Fan (1959, p. 11) enuncian así: "toda curva cerrada de Jordan contenida en el plano divide el resto del plano en dos partes" tales que, dos puntos de una misma parte pueden unirse mediante una línea poligonal plana que no corta a la curva, y toda línea poligonal plana que tenga por extremos dos puntos pertenecientes a diferentes partes, corta a la curva. Si

ponemos atención a este tipo de propiedades, un polígono de n lados, una circunferencia o una elipse son equivalentes, son todas curvas cerradas de Jordan.
¿Qué es lo que define en este caso a dos figuras equivalentes? De forma coloquial podríamos decir que se trata de figuras tales que se puede transformar una en la otra mediante una "deformación sin desgarramiento ni adherencias" (Fréchet y Fan, p. 15). Siendo más precisos, no son esas las únicas transformaciones que permiten identificar dos figuras en esta nueva perspectiva, sino cualquier transformación tal que "a todo punto de la figura corresponde un punto y solo uno de la otra, y a dos puntos vecinos de una corresponden dos puntos vecinos de la otra" (Fréchet y Fan, 1959, p. 15). Formalmente, estas transformaciones son los homeomorfismos: funciones biyectivas y bicontinuas.
Otros ejemplos de este tipo de propiedades son el número cromático de una figura (relativo al teorema de coloración de un mapa: dos figuras homeomorfas tienen el mismo número cromático) y la característica de Euler-Poincaré para los poliedros (χ=C+V-A). La búsqueda por encontrar explicaciones y generalizaciones a una mayor cantidad de contextos de este tipo de propiedades y problemas es lo que dio origen a la necesidad de definir formalmente la continuidad, que coloquialmente enuncian Fréchet y Fan (1959) en términos de puntos vecinos.
Los problemas anteriormente mencionados dieron lugar, especialmente a partir de los trabajos de Poincaré, a la topología combinatoria. Pero de manera independiente, los trabajos de Georg Cantor (1845-1918) fundaron otra línea de pensamiento matemático, la topología conjuntista. Los cuatro problemas fundamentales que sirvieron de móvil para su desarrollo son el problema de la dimensión, el problema del continuo, el de la convergencia y el de los valores extremos (Bastán, Cuenya y Fioritti, 2006). En la resolución de todos ellos está involucrado el concepto central de la continuidad, lo que permite fundamentar epistemológicamente la importancia de su estudio, en su más amplia concepción, para el desarrollo de las matemáticas, así como la pertinencia de su enseñanza en la formación de profesores.

b) Aspectos didácticos: relevancia del tema para la enseñanza en la formación de formadores, incluidas estrategias y evaluación

<u>b.1) Prácticas de enseñanza en la formación docente</u>
Los aspectos didácticos deben ser abordados teniendo en cuenta al menos dos grandes componentes de la actividad matemática y su enseñanza: la epistemológica y la metodológica. Desde la dimensión epistemológica, por un lado, en la sección anterior hemos brindado muestras de nuestra concepción de las matemáticas: como una construcción humana en permanente proceso, del cual el concepto *continuidad* es testigo.
Por otro lado, es necesario tener en cuenta lo que Ball, Thames y Phelps (2008) denominan *conocimiento especializado del contenido* dentro de la categoría más amplia *conocimiento del contenido,* considerada por Shulman (1986) como uno de los conocimientos bases del docente. Ball et al. (2008) sostienen que los docentes tienen que aprender conocimiento *común* de las matemáticas -el mismo conocimiento que en otras carreras vinculadas con matemáticas- pero también deben aprender contenidos matemáticos que son específicos para la enseñanza. El conocimiento especializado de las matemáticas implica, entre otros, evaluar las conjeturas de los estudiantes, anticipar métodos alternativos de resolución, seleccionar representaciones adecuadas para el contenido a enseñar, comprender el sentido matemático

de las producciones de los estudiantes, formular ejemplos adecuados y presentarlos en momentos precisos, saber responder preguntas del tipo "por qué", conocer las explicaciones matemáticas de reglas y procedimientos estándares. Por ejemplo, un ingeniero debe saber que las funciones exponenciales, polinómicas y racionales son continuas en su dominio y poder aplicar ese conocimiento a la resolución de problemas en su profesión, pero un profesor de matemáticas precisa saber por qué esas funciones son continuas, conocer ejemplos de funciones que permitan a los estudiantes contrastar nuevas ideas en torno a la continuidad con ideas previamente creadas, manejar diversos registros de representación de una misma situación e identificar cuál es el más adecuado en cada situación dependiendo de los objetivos de enseñanza.
En este marco cabe preguntarnos: ¿Por qué es importante enseñar *continuidad* en la formación de profesores? Como vimos, la creación del concepto de continuidad permitió explicar con fundamentos rigurosos ciertos resultados que por ser sumamente intuitivos permanecieron aceptados sin demostración por siglos. Tal es el caso del teorema de Jordan o el teorema del valor medio, por ejemplo. Hablamos de ideas intuitivas que se manejan desde niveles iniciales de la formación de los ciudadanos, y creemos que los docentes deben tener herramientas para comprender los argumentos sobre las que se basan esas ideas.
Además, este contenido permite visualizar a la Matemática como una ciencia en construcción: la creación de nuevos conceptos favorece la explicación de relaciones entre los objetos que anteriormente se aceptaban de forma implícita. También permite vivenciar procesos de generalización de resultados a nuevos contextos. En ese proceso pueden conocerse el tipo de preguntas que se formulaban anteriormente, los modos de responderlas y también cómo algunas de ellas fueron respondidas muy recientemente o quedan aún por responder e incluso formular.
Finalmente, hemos visto que *continuidad* es un concepto central en todas las ramas de las matemáticas, no solamente en Análisis con la cual generalmente se asocia, lo que la hace de por sí necesaria para establecer conexiones significativas en la formación matemática de cualquier carrera, en particular la de profesores de Matemáticas o maestros técnicos.
Respecto a la dimensión metodológica, es importante tener en cuenta investigaciones en el campo de la Matemática Educativa que nos informan que los docentes ya poseen, incluso previo a su formación específica en educación, sistemas de creencias y concepciones pedagógicas estables, difíciles de modificar (Marcelo, 1994 y Mellado, 1996).

> Si los profesores en formación toman como referencia, positiva o negativa, para la enseñanza de las ciencias, a los profesores que han tenido a lo largo de su etapa escolar, es fundamental que la metodología utilizada durante la formación inicial sea consistente con los modelos teóricos que propugnan. En caso contrario, los estudiantes para profesores aprenderán más de lo que ven hacer en clase, que de lo que se les recomienda hacer. (Mellado, 1996, p. 299).

Ya desde 1991 la NCTM recomienda que los futuros docentes de matemática sean enseñados en forma parecida a como ellos habrán de enseñar. Esto es, que "puedan explorar ideas matemáticas, elaborando conjeturas, comunicándose, razonando" (Olave, 2013, p. 27).

<u>b.2) Conflictos cognitivos potenciales en torno al concepto de continuidad</u>

Tall y Vinner (1981) desarrollan una teoría que permite comprender los procesos cognitivos mediante los cuales las personas aprenden matemática y, específicamente, las dificultades

que se presentan en ese aprendizaje. Denominan *imagen conceptual* (IC) a la estructura cognitiva de una persona asociada a un concepto, incluye imágenes mentales, descripciones verbales, propiedades y procesos asociados. Las diversas componentes de esta IC pueden no ser coherentes entre sí, lo que puede o no ser advertido por la persona. Por otra parte, estos autores consideran la definición conceptual, conjunto de palabras empleadas por la persona para describir un concepto. En su artículo describen algunos conflictos cognitivos potenciales relativos a límites y continuidad que podrían resultar de una IC con componentes contradictorias o que no se relaciona coherentemente con la definición conceptual.
En relación a la continuidad, los autores plantean que el uso coloquial del término "continuo" en referencia a un objeto "sin huecos" promueve que las primeras aproximaciones a funciones continuas impliquen ideas similares en relación a sus gráficos. Incluso la presentación coloquial que a menudo se hace de la topología como una geometría "de caucho" puede promover esas ideas erróneas. La mención que en ocasiones se realiza a los puntos "de discontinuidad" en referencia a puntos donde la función no está definida, por ejemplo, para hipérbolas, refuerza esa idea de que el gráfico debe ser "sin huecos", trazado sin levantar el lápiz del papel. Una investigación con estudiantes que ingresaban a nivel terciario permitió a Tall y Vinner (1991) detectar otros aspectos de la imagen conceptual de continuidad: "el gráfico está compuesto de una sola pieza", "la función está dada por una sola fórmula", "sin cambios bruscos de pendiente". En particular señalan que los teoremas del valor intermedio y de los valores extremos tienen resultados evidentes intuitivamente, pero que su demostración empleando la definición conceptual es más sutil y los estudiantes pueden estar aún en una situación en la que su imagen conceptual es relativamente fuerte, pero su definición conceptual no por lo que no pueden "seguir" las demostraciones. Los autores sostienen que presentar ejemplos que cuestionen estos aspectos de la imagen conceptual puede ser útil, pero no suficiente. Es necesario que los docentes den la oportunidad a los estudiantes de hacer conscientes los aspectos contradictorios de la imagen conceptual o la definición y les brinden herramientas para racionalizar el problema.
El estudio del tema en *Topología* debería constituir un aporte en tal sentido porque al trabajar fuera del contexto usual de los números reales, ya no es posible identificar las funciones continuas con "gráficos de un solo trazado". Es un ámbito en el que pueden hacerse conscientes las contradicciones entre los diferentes aspectos de la IC y la definición conceptual que persisten en los estudiantes, aún después de haber aprobado un primer curso de Análisis.

b.3) Formación docente

b.3.1) Formación de profesores: Análisis (profesorado de Matemática) o Matemática (profesorados de Química, Física o Astronomía)

Hemos fundamentado la importancia de que las prácticas docentes de los formadores de profesores empleen metodologías que son las que después es deseable que los docentes desarrollen en sus prácticas futuras. Pero consideramos que no solo hay que atender al cómo enseñar sino también a qué es lo que se enseña de manera tal que "en cierto momento, el qué enseñar se integra al cómo enseñar y cobra un sentido didáctico la presencia de la actividad matemática en el aula" (Salinas y Alanís, 2009, p. 355).
Creemos esencial tener en cuenta las prácticas que dan origen al saber para lograr una reconstrucción significativa del mismo por parte de los estudiantes. En el caso de la continuidad, una de las prácticas que motivaron su estudio en el contexto de las funciones de

variable real es la *predicción* (Cantoral, 2013; Alanís, 2000) en el contexto del estudio del movimiento, vinculado a la resolución de problemas físicos. Respetar esas recomendaciones implica un profundo rediseño del discurso matemático escolar, dejando de considerar la tradicional secuencia límite-continuidad-derivabilidad-integrabilidad y pasando a reconocer y valorar a la predicción como hilo conductor del cálculo. Para ello es necesario partir de problemas que se originan al tratar de predecir el comportamiento de cierta realidad material, permitiendo así la generación de un ambiente de construcción matemática.
Existen a nivel internacional programas completos de la enseñanza del cálculo en el nivel superior a partir de estas consideraciones, desde la perspectiva socioepistemológica en Matemática Educativa (Salinas, Alanís y Pulido, 2011). A nivel nacional también existen antecedentes (Rey, 2016), si bien desde otra línea de investigación, la Teoría Antropológica de lo Didáctico. Rey propone un proceso de estudio basado en la modelización matemática denominado Recorrido de Estudio e Investigación para la formación de profesores, específicamente para la construcción del concepto de derivada y muestra la importancia de este tipo de experiencias para favorecer que los futuros docentes se cuestionen sobre la pertinencia de la enseñanza de determinados contenidos en el currículo oficial de Enseñanza Media.
Entendemos pertinente que este tipo de propuestas se lleven a cabo tanto en la formación de profesores de Física, Química y Astronomía, donde la vinculación entre el Análisis y otras ciencias se hace evidente, como en la propia formación del profesor de Matemática.

b.3.2) Formación de profesores de Matemática: Topología

El recorrido histórico-epistemológico realizado en torno al concepto de continuidad nos da la pauta de que, si bien en un principio el interés de los matemáticos por la búsqueda de resultados con aplicaciones prácticas fue un móvil para la creación de conceptos vinculados al análisis, más adelante vinieron etapas de cuestionamiento de los fundamentos de esos resultados, por un lado, y de intentos por generalizarlos a nuevos contextos, por otros. Eso fue posible a partir de la formalización de las nociones de “cercanía” con la definición de continuidad que actualmente es aceptada. Entendemos que este proceso debe ser experimentado por los estudiantes de profesorado para comprender las razones por las que los conceptos matemáticos tienen hoy la formulación que tienen y su rol en la construcción de las matemáticas.
En *Topología* se ofrecen oportunidades para ello: el abordaje de problemas esencialmente topológicos, como el de la característica de Euler-Poincaré para poliedros o el de las curvas de Jordan puede ser puerta de entrada para permitir que los estudiantes comprendan la necesidad de formular rigurosamente y en un contexto amplio (no restringido únicamente a espacios métricos) la definición de continuidad. Es importante brindarles la oportunidad de que ellos también vivencien el proceso de creación matemática, especialmente mediante la generalización de resultados conocidos en contextos restringidos, a nuevos contextos.
Desde el punto de vista metodológico, esto puede ser alcanzado mediante actividades de final abierto, especialmente las que ponen atención a similitudes y diferencias (Zaslavsky, 2008). Por ejemplo, se puede proponer una actividad de considerar alternativas con las cuatro definiciones de continuidad desarrolladas en el apartado a.1.3) y preguntar: *¿cuál de esas afirmaciones aceptarías como definición? Entre ellas, ¿cuál prefieres?* Promoviendo la actividad en tres etapas: primero una instancia de reflexión individual, más adelante de discusión en pequeños grupos y finalmente una puesta en común con todo el grupo donde se

podrán contrastar las diferentes respuestas. Es interesante cómo una actividad de este tipo permite aflorar muchos tipos de creencias, no solo en lo que hace a las matemáticas propiamente dichas sino también a las preferencias personales, que en ocasiones no se fundamentan únicamente en aspectos científicos. También se pueden proponer actividades de clasificación tal como las describe Zaslavsky (2008) con tarjetas en las que se presenten funciones con variados dominios y codominios y en diferentes registros de representación. Eso permitiría que afloren no solo ideas sobre la continuidad sino sobre otras propiedades de las funciones y establecer vínculos entre ellas. Otra posibilidad es plantear esta actividad con figuras, entre las cuales haya algunas que sean homeomorfas entre sí y permitir, de esa manera, que se expliciten ideas previas sobre este concepto, aun antes de haber sido tratado en clase. En estas actividades de clasificación no se establece el criterio de antemano, por eso se trata de actividades de final abierto. Son los estudiantes, trabajando en pequeños subgrupos, los que tienen que establecer criterios y a partir de ellos generar las clases.
Es claro que no basta con proponer este tipo de actividades, es imprescindible después una institucionalización del conocimiento en el sentido de Brousseau (1986) en la que los estudiantes puedan reconocer al conocimiento creado en clase como parte de una estructura más amplia, lo que les permitirá establecer nuevas conexiones y profundizar en el estudio de la topología.

b.4) Evaluación

Entendemos a la evaluación como indisociable de la enseñanza, consistentemente con lo antes expuesto. Explicitamos aquí algunos aspectos y estrategias que creemos podrían tenerse en cuenta específicamente en la formación de profesores.
Una evaluación formativa y continua permite al docente formador estar atento a las necesidades de sus estudiantes, reconocer sus intereses, debilidades y fortalezas. Es indispensable para replanificar actividades. Por otro lado, ese tipo de evaluación permite al estudiante, futuro profesor, percibir la evaluación como parte intrínseca de su aprendizaje y enriquecer su metacognición: aprender a identificar sus propias debilidades y fortalezas en la temática.
Para lograr que este tipo de evaluación sea real es necesario dejar de identificar evaluación con calificación y no concebir al parcial como única vía de devolución al estudiante sobre sus actividades. Debemos implementar otras estrategias que posibiliten una interacción constante. En el salón de clase, abandonar la tradicional postura de profesor que enseña-estudiante que aprende y facilitar un ambiente real de construcción de conocimiento, permite que el docente indague cuáles son los conocimientos previos de los estudiantes, que ellos puedan explicitarlos, y generar así que el estudiante se apropie de su propio proceso de aprendizaje. En esas dinámicas tanto estudiantes como formadores pueden identificar los aspectos dominados y aquellos sobre los que es necesario continuar trabajando. Las tareas de final abierto propuestas (Zaslavsky, 2008) se presentan como ideales para tal fin.
Además de ello, puede implementarse la entrega de tareas escritas o presentación de temas, ya sea de forma individual o en equipos que serán consideradas como instancias de evaluación en las que puede asignarse una calificación, o no. Mediante esas tareas el docente puede monitorear el avance del conocimiento de los estudiantes en la temática, sin olvidar que las presentaciones orales los fortalecen para el ejercicio de su futura profesión.

No pueden despreciarse las pruebas escritas, ya sean escritos bimensuales o parciales cuatrimestrales en las que los estudiantes deben demostrar un conocimiento integrado de la temática. Es importante que estas pruebas no se separen del contenido abordado en el curso.

c) Proyección en líneas de investigación

Entendiendo que los aspectos epistemológicos, cognitivos y didácticos están íntimamente relacionados, especialmente pensando en la formación de docentes, proponemos algunas preguntas que pueden ser abordadas teniendo en cuenta esas tres grandes dimensiones del triángulo didáctico.

- ¿Qué concepción de continuidad subyace a su enseñanza en el profesorado actual? ¿Qué rol ocupan los problemas que le dieron origen? ¿Cómo podrían tenerse en cuenta las recomendaciones que emergen de las investigaciones, por ejemplo la de Bastán et al. (2006)?
- ¿Qué ideas relativas a la continuidad tienen estudiantes de los primeros años del profesorado de Matemática y cómo evolucionan al avanzar en la carrera?
- ¿Cómo pueden rescatarse las prácticas que generaron las grandes ideas en torno a la continuidad -predecir, generalizar, formalizar- para plasmarse en secuencias de enseñanza para la formación de profesores?
- Inspirados en la investigación desarrollada por Ticknor (2012) relativa a la enseñanza de Álgebra en formación de profesores, podemos preguntarnos: ¿cómo contribuye la enseñanza del tema *Continuidad* en los cursos actuales de formación docente al conocimiento matemático especializado de los estudiantes? ¿Emplean estos el conocimiento aprendido en ese ámbito para argumentar, para resolver nuevos problemas o para resolver problemas conocidos de una nueva manera? ¿Logran esos estudiantes establecer conexiones entre lo que aprenden en las aulas de formación docente y las Matemáticas que deben enseñar en Enseñanza Media?

Referencias

Aizpuru, A. y Pérez-Fernández, F. (1999). El Cours d'Analyse de Cauchy. *Suma, 30,* 5-25.

Alanís, J. A. (2000). La predicción: un hilo conductor para el desarrollo de un curso de Cálculo. En R. Cantoral (Ed.), *El futuro del Cálculo Infinitesimal. ICME 8* (pp. 233-245). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Apostol, T. (1977). *Análisis Matemático*. Barcelona: Editorial Reverté.

Ball, D., Thames, M. y Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special? *Journal of Teacher Education 59*(5), 389-407.

Bastán, M., Cuenya, H. y Fioritti, G. (2006). Un análisis histórico-epistemológico de la topología y su vinculación con el saber enseñado en la formación de profesores de Matemática. *Revista de educación matemática, número especial*. Recuperado de: https://revistas.unc.edu.ar/index.php/REM/issue/view/971

Bolzano, B. (1817) *Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, dass zwischen je zwey Werthen, die* ein entgegengesetztes Resultat gewahren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege. Praga: Abtheilung

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des Mathématiques*. Recherches en Didactique des Mathématiques, 7*(2), 33-11.

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre la construcción social del conocimiento*. México D.F.: Gedisa.

Cauchy, A. L. (1821). *Cours d'Analyse de l'Ecole Royale Polytechnique*. Paris: Imprimerie Royale.

Felscher, W. (2000). Bolzano, Cauchy, Epsilon, Delta. *The American Mathematical Monthly, 107* (9), 844-862.

Frechet, M. y Fan, K. (1959). *Introducción a la topología combinatoria*. Buenos Aires: Eudeba.

Freudenthal, H. (1971). Did Cauchy Plagiarize Bolzano? *Archive for History of Exact Sciences, 7*(5), 375-392. Recuperado de http://www.jstor.org/stable/41133332

Grattan-Guinness, I. (1970). Bolzano, Cauchy and the "new analysis" of the early nineteenth century. *Archive for History of Exact Sciences, 6*(5), 372-400. Recuperado de https://doi.org/10.1007/BF00329818

Kelley, J. (1962). *Topología General*. Buenos Aires: Editorial universitaria.

Kline, M. (1994). *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días, III*. Madrid: Alianza Universidad.

Lages Lima, E. (1982). *Curso de Análise. Volume 1.* San Pablo: IMPA.

Marcelo, C. (1994). Investigaciones sobre prácticas en los últimos años: qué nos aportan para la mejora cualitativa de las prácticas. Ponencia presentada al *III Symposium Internacional sobre Prácticas Escolares*, Poio.

Mellado, V. (1996). Concepciones y prácticas de aula de profesores de ciencias, en formación inicial de primaria y secundaria. *Enseñanza de las ciencias*, 14 (3), 289-302.

Munkres, J. R. (2002). *Topología*. Madrid: Pearson Educación.

Olave, M. (2013). *Modelos de profesores formadores de Profesores de Matemática: ¿cuáles son y en qué medida se transmiten a los futuros docentes? Un estudio de casos.* Tesis doctoral no publicada. CICATA, IPN. México. Recuperado de http://www.matedu.cicata.ipn.mx/tesis/doctorado/olave_2013.pdf

Rey, M. (2016). *Propuesta didáctica para la formación del profesorado; el caso de la derivada como herramienta de modelización matemática*. Tesis de maestría no editada, Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada, IPN, México D.F.

Salinas, P. y Alanís, J. (2009). Hacia un nuevo paradigma en la enseñanza del cálculo dentro de una institución educativa. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa 12*(3), 355-382.

Salinas, P., Alanís, J. A. y Pulido, R. (2011). Cálculo de una variable. Reconstrucción para el aprendizaje y la enseñanza. *Revista DIDAC 56*, 62-69.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4-14.

Tall, D. Y Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics, 12* (7), 151-169.

Ticknor, C. (2012). Situated learning in an abstract algebra classroom. *Educational Studies on Mathematics 81*, 307-323.

Zaslavsky, O. (2008). Attention to similarities and differences: A fundamental principle for task design and implementation in mathematics education. Invited presentation at the *Topic Study Group (TSG34) on Research and Development on Task Design and Analysis, the 11th International Congress on Mathematics Education (ICME-11),* Monterrey, Mexico.

Continuidad y diferenciabilidad

Mariela Rey

Proyecto: Continuidad y derivabilidad en el curso de Análisis I del profesorado de matemática

1) Introducción

Este proyecto se desarrollará partiendo de la idea de que en la formación de docentes que hacen uso de la matemática, existe una codeterminación entre la construcción del conocimiento matemático y las formas en que se enseña. Esta idea es una particularización de una noción más general sobre la matemática y su enseñanza, como se señala en Bosch, García, Gascón y Ruiz Higueras (2006).

> En cada nivel se producen restricciones recíprocas entre las organizaciones matemática y las organizaciones didácticas, esto es: la estructuración de las organizaciones matemáticas en cada nivel de jerarquía condiciona las formas posibles de organizar su estudio y, recíprocamente, la naturaleza y las funciones de los dispositivos didácticos existentes en cada nivel determinan, en gran parte, el tipo de organizaciones matemáticas que será posible reconstruir en dicha institución escolar. (Bosch et al, 2006, p. 41)

Los contenidos seleccionados y su tratamiento condicionan formas de enseñanza y las miradas sobre qué y para qué enseñamos influyen sobre qué nociones y desarrollo conceptual de los diversos contenidos se seleccionan o enfatizan. Es lo que Shulman (2001) denomina *conocimiento pedagógico del contenido*, "esa especial amalgama entre materia y pedagogía que constituye una esfera exclusiva de los maestros, su propia forma especial de comprensión profesional" (Shulman, 2001, p. 174)

Unos y otros, a la vez de estar íntimamente relacionados, tienen una estrecha relación con quiénes son los sujetos destinatarios. No deberíamos enseñar la misma matemática ni de la misma manera, aunque los contenidos involucrados tengan el mismo nombre, a futuros profesores de matemática, de física o de química, por ejemplo.

> En otras palabras, creemos que la didáctica hay que practicarla continuamente, para que luego el futuro profesor la aplique en sus cursos como cosa natural, puesto que así le fue enseñada durante su carrera.
>
> No se debe, por ejemplo, dar un curso de Algebra Lineal o de Cálculo Infinitesimal para futuros profesores, de igual manera que para licenciados en matemática, ingenieros o economistas. La enseñanza en el profesorado debe ser coherente, salvando los niveles y la extensión de los temas, con la que los alumnos, futuros profesores, deberán luego impartir a sus alumnos. (Santaló, 1994, pp. 2-3)

Por lo tanto, no divorciaremos los aspectos disciplinares de los aspectos didácticos, así como tampoco consideraremos un tratamiento sobre un determinado tema de igual modo para la formación de profesores de distintas especialidades. Por lo anteriormente expuesto, consideramos inabarcable, en la extensión de este trabajo, el tratamiento del tema para todas las especialidades y asignaturas que integran la sección Análisis en la formación de docentes. El primer recorte que planteamos en este proyecto es la consideración del tema seleccionado enmarcado específicamente en la formación de profesores de matemática.

Plantearemos ahora un segundo recorte del tratamiento del tema. Pensando concretamente en la formación de profesores de matemática, las nociones de continuidad y diferenciabilidad atraviesan buena parte del trabajo (pensando en la estructura curricular del plan vigente) de los cursos de Análisis I, Análisis II, Introducción a la Topología y Profundización en Análisis. Por ser conceptos que se presentan en contextos tan diversos como por ejemplo el trabajo con funciones de una variable real, de varias variables reales, de variable compleja, creemos necesaria la realización de un recorte de esta temática para poder ser abarcada en la extensión estipulada para este trabajo. Es por esto que nos centraremos en las particularidades que adoptan para funciones de una variable real, es decir para lo que en el Plan 2008 es el curso de Análisis I.

2) Aspectos disciplinarios.

Como señaláramos en la introducción de este trabajo, los aspectos disciplinarios y didácticos se encuentran íntimamente relacionados en la enseñanza de la matemática para futuros profesores. Por ello a lo largo de esta sección, si bien se hará énfasis en las nociones abordables y la fundamentación epistemológica de su relevancia disciplinaria, aparecerán necesariamente cuestiones didácticas, entendiendo por tales algunas relacionadas con el cómo, el por qué y el para qué enseñamos.

2.a) Continuidad puntual

Presentamos una definición de continuidad puntual que es generalizable a funciones para las cuales se puedan definir conjuntos abiertos y sistemas de entornos, tanto en su dominio como en su codominio. La noción de continuidad puntual que se trabaja en el curso está asociada a la siguiente definición (Lima, 2006):

Consideramos: $X \subseteq \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$, $a \in X$. Diremos que **f es continua en a** si se cumple:

$$\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}^+, \exists\, \delta \in \mathbb{R}^+ / \left(x \in \left(E_{a,\delta} \cap X \right) \;\; \Rightarrow \;\; f(x) \in E_{f(a),\varepsilon} \right).$$

Dado que en el caso que el punto en cuestión sea de acumulación del dominio esta definición es equivalente a la habitual en la enseñanza media superior (en adelante EMS), esta es: f es continua en a si y solo si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$, la definición de límite en cuestión, para este curso, también debe ser explicitada (Lima, 2006):

Consideramos: $X \subseteq \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$, $a \in X'$. Diremos que **el número real L es el límite de la función f para x tendiendo hacia a**, y lo escribimos $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$, si se cumple:

$$\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}^+, \exists\, \delta \in \mathbb{R}^+ / \left(x \in \left(E^*_{a,\delta} \cap X \right) \;\; \Rightarrow \;\; f(x) \in E_{L,\varepsilon} \right)$$

Esta definición de límite difiere de la habitualmente trabajada en la EMS en que aquí consideramos la posibilidad de que **a** sea un punto de acumulación, no necesariamente interior ni de acumulación bilateral, pero en la EMS **a** es un punto interior al dominio o es el centro de un entorno incluido en el dominio, a excepción de él mismo. Estas diferencias tienen gran influencia en la formación de lo que Tall & Vinner (1981) denominan *imágenes conceptuales* (estructura cognitiva de un sujeto, asociada al concepto, que incluye todas las imágenes mentales, representaciones de cualquier tipo, propiedades y procesos que le caracterizan) del concepto de límite, y como consecuencia del de continuidad, para el caso de puntos no aislados. Es necesario poner en evidencia en clase dichas diferencias,

discutirlas y reflexionar sobre las consecuencias que pueden tener en la formación de imágenes conceptuales que se derivan de ellas y sobre los diferentes resultados válidos o no como consecuencia de la definición adoptada. Esto se ampliará en la sección tres con la presentación de una secuencia didáctica para trabajar la noción de continuidad puntual.
Después de trabajar con la definición de continuidad puntual se continuará el proceso de estudio con: discontinuidades, operaciones aritméticas con funciones continuas, continuidad de función compuesta de funciones continuas, continuidad de funciones elementales, continuidad lateral (Linés, 1983).

2.b) Continuidad en conjuntos
La noción de continuidad en conjuntos se extiende de la noción de continuidad puntual: una función f definida en un conjunto X de número reales es continua en X si lo es en cada punto de X. Particularmente se trabaja con X del tipo intervalos abiertos o cerrados.
Los resultados seleccionados para desarrollar el tema son los clásicos, con una referencia a los vínculos estrechos que estos resultados tienen con topología, pero sin desarrollarlos desde una mirada exclusivamente topológica. Esta decisión se fundamenta en el conocimiento práctico de las dificultades que especialmente se visualizan durante el trabajo con la unidad temática Topología en el conjunto de los reales y también las dificultades de los estudiantes con la completitud del cuerpo de los reales. Creemos adecuado un acercamiento que contemple las particularidades del conjunto de los reales, para luego ampliar los resultados a otro tipo de conjuntos en el curso de Introducción a la Topología. Consideramos beneficioso para el curso que dicha diferencia de abordajes también se haga desde cómo se estructuran las demostraciones. Por lo anterior, la idea rectora seleccionada para constituir la columna vertebral de las demostraciones de los teoremas de Bolzano y Weierstrass es la noción de supremo (o ínfimo) de un conjunto de reales y sus propiedades, en lugar de considerar demostraciones centradas en nociones más propias de la topología (propiedades de las clausuras de los conjuntos cerrados o caracterización de los conjuntos compactos en términos de las subsucesiones de sucesiones convergentes, respectivamente), como se utilizan en Lima (2006).
Presentamos un listado general, con los enunciados de los teoremas más importantes (Lima, 2006; Linés, 1983):

Continuidad de restricciones y extensiones de funciones
- Restricciones: $X \subseteq \mathbb{R},\ f: X \to \mathbb{R},\ a \in X,\ S \subseteq X \,/\, a \in S$
Si f es continua en a entonces f restringida a S también es continua en a.
- Extensiones:

$$X \subseteq \mathbb{R},\ f_0 : X \to \mathbb{R} \text{ continua, } X \text{ denso } S,\ \exists \lim_{\substack{x \to a \\ x \in X}} f_0,\ \forall a \in X$$

Entonces existe una y solo una función continua f, definida en S, que es extensión de f_0 a S.

Teoremas relativos a funciones continuas en intervalos cerrados y acotados
- Teorema de Bolzano
$f:[a,b] \to \mathbb{R}$, f continua en [a,b] , sg (f(a).f(b)) = - 1 $\Rightarrow \exists\, c \in (a,b) \,/\, f(c) = 0$
- Teorema de Weierstrass

Veamos primero la versión general que se enuncia y no se demuestra en el curso.
Sea $f: X \to Y$ una función continua. Entonces se cumple que si X es compacto, también lo es f(X).
Una versión particular a intervalos cerrados y acotados de $\mathbb{R}$ que se enuncia y demuestra en el curso es:
Toda función continua en [a,b] tiene máximo y mínimo en [a,b].
- Continuidad uniforme
Definición: Sean $X \subseteq \mathbb{R}$, $f: X \to \mathbb{R}$. Se dice que f es **uniformemente continua en X** si

$$\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}^+, \exists\, \delta \in \mathbb{R}^+ / \left(\left. \begin{array}{l} x' \in X, x'' \in X \\ |x' - x''| < \delta \end{array} \right\} \Rightarrow \left| f(x') - f(x'') \right| < \varepsilon \right).$$

Se prueba en forma inmediata que si f es uniformemente continua en X entonces f es continua en X. El recíproco, que no es cierto en general, se prueba en la situación: sea $X \subseteq \mathbb{R}$, X *compacto*, $f: X \to \mathbb{R}$ / f *continua en* X. Entonces f es uniformemente continua en X.

2.c) Derivabilidad en un punto y en conjuntos
La definición de derivada en un punto que se considerará es la siguiente (Lima, 2006): sean $X \subseteq \mathbb{R}, f: X \to \mathbb{R}, a \in (X \cap X')$. Diremos que **f es derivable en a** si el siguiente límite es un número real: $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$. En ese caso diremos que ese real es la derivada primera de la función f en a y lo escribimos f ’(a).
Al depender de la definición de límite que se adopte en el curso, sucederá en este caso lo mismo que ya señalamos con la continuidad puntual: será necesario un trabajo de discusión y reflexión sobre las diferentes imágenes conceptuales que se generan a partir de la definición de límite del curso y la definición de límite habitual en la EMS, así como también de las diferencias en los resultados que se derivan de una y otra definición.
Los contenidos que se trabajan a continuación serán (Linés, 1983): recta tangente al gráfico de una función en un punto, función derivada, derivadas de funciones elementales, derivadas laterales, relación entre continuidad y derivabilidad, puntos singulares, operaciones aritméticas con funciones derivables, composición de funciones derivables, monotonía y extremos locales, condición suficiente de extremos locales, derivada de función inversa.
La noción de derivabilidad en un intervalo, al igual que la de continuidad, se extiende naturalmente de la definición de derivada puntual. Una función es derivable en un intervalo si lo es en cada punto del mismo.
En este punto del trabajo queremos plantear una apreciación sobre parte del cómo debemos trabajar las nociones y teoremas precedentes, aunque este comentario es válido también para los siguientes, y por qué no, para todo el curso. Según Vergnaud (1990) las habilidades matemáticas están sostenidas por esquemas organizadores de la conducta. En estos esquemas siempre están presentes conocimientos que él denomina *conceptos en acto* y *teoremas en acto* (conocimientos que ponemos en uso sin que medie una reflexión sobre su origen o validez, sean verdaderos o no). Estos conceptos y teoremas en acto no necesariamente coinciden con los conceptos y teoremas que queremos que los estudiantes aprendan, muchas veces los contradicen pero conviven con ellos. Veamos un ejemplo. Uno

de los teoremas que demostraremos se puede formular como sigue: si una función es derivable en un punto interior de su dominio y en ese punto la función presenta un extremo relativo, entonces la derivada de la función en ese punto vale cero. En muchos estudiantes, ese teorema convive con los siguientes teoremas y conceptos en acto: el recíproco de ese teorema, la validez general del teorema aun en puntos que no sean interiores o la noción de que solo hay extremos relativos en puntos que la función es derivable. Es por todo esto que creemos de capital importancia hacer visibles para nosotros y para los estudiantes los conceptos y los teoremas en acto que circulan en el desarrollo de la conceptualización de una determinada noción o de un teorema para que los conceptos y teoremas en acto se alineen con los efectivamente desarrollados en clase. En ese sentido, tenemos variados ejemplos de situaciones del curso de Análisis I como la del ejemplo, pero resulta imposible referirlas todas en este espacio. De todos modos sí queríamos hacer referencia a este tipo de trabajo a lo largo de todo el tema por la importancia que tiene en el proceso de aprendizaje de los estudiantes (visibilizar, cuestionar y reflexionar sobre los conceptos y teoremas en acto que tanto docente como estudiantes ponemos en juego en nuestros razonamientos).

2.d) Teoremas sobre funciones derivables en intervalos

- Teorema de Darboux

$$\left.\begin{array}{l} f:\left[a,b\right]\to\mathbb{R} \\ f \;\; derivable \;\; en \;\; \left[a,b\right] \\ f'\left(a\right)<f'\left(b\right) \\ d\,/\,f'(a)<\mathrm{d}<f'(b) \end{array}\right\} \quad\Rightarrow\quad \exists\, c\in(a,b)\;\;/\;\;f'(c)=d$$

- Teorema de Rolle

$$\left.\begin{array}{l} f:\left[a,b\right]\to\mathbb{R} \\ f \;\; continua \;\; en \;\; \left[a,b\right] \\ f \;\; derivable \;\; en \;\; (a,b) \\ \qquad f(a)=f(b) \end{array}\right\} \quad\Rightarrow\quad \exists\, c\in(a,b)\;\;/\;\;f'(c)=0$$

- Teorema de Lagrange

$$\left.\begin{array}{l} f:\left[a,b\right]\to\mathbb{R} \\ f \;\; continua \;\; en \;\; \left[a,b\right] \\ f \;\; derivable \;\; en \;\; (a,b) \end{array}\right\} \quad\Rightarrow\quad \exists\, c\in(a,b)\;\;/\;\;f'(c)=\frac{f\left(b\right)-f\left(a\right)}{b-a}$$

Consecuencias del teorema de Lagrange: condición suficiente de existencia de extremos relativos, monotonía en intervalos.

- Teorema de Cauchy

$$\left.\begin{array}{l} f:\left[a,b\right]\to\mathbb{R},\;g:\left[a,b\right]\to\mathbb{R} \\ f \;\; y \;\; g \;\; continuas \;\; en \;\; \left[a,b\right] \\ f \;\; y \;\; g \;\; derivables \;\; en \;\; (a,b) \\ \forall\;\mathrm{x}\in\left(a,b\right),\;g'\left(x\right)\neq 0, \\ g\left(a\right)\neq g\left(b\right) \end{array}\right\} \quad\Rightarrow\quad \exists\, c\in(a,b)\;\;/\;\;\frac{f'(c)}{g'\left(c\right)}=\frac{f\left(b\right)-f\left(a\right)}{g\left(b\right)-g\left(a\right)}$$

- Regla de L'Hôpital

Para plantear el enunciado en forma compacta, unas aclaraciones previas: f y g están definidas de manera que tengan sentido los límites planteados, g'(x) es diferente de cero en todo el conjunto en que tenga sentido que esté definida, cuando nos referimos a A, puede ser un real a, un real a por derecha o por izquierda, o puede ser más o menos infinito y cuando nos referimos a B puede ser cero o infinito. En esos casos:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to A} f(x) = \lim\limits_{x\to A} g(x) = B \\ \exists \lim\limits_{x\to A} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} \end{array}\right\} \Rightarrow \exists \lim\limits_{x\to A} \frac{f(x)}{g(x)} \wedge \lim\limits_{x\to A} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to A} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Se concluye la temática con: Derivadas sucesivas. Derivada segunda y concavidad. Derivada segunda y puntos de inflexión. Gráficos de funciones derivables en intervalos.

2.e) Fundamentación epistemológica de la relevancia disciplinaria del estudio de la continuidad y la derivabilidad.

En este punto plantearemos una brevísima revisión histórica de la evolución de estos conceptos. Ella nos permitirá poner en foco la relevancia actual de estos temas para la disciplina. Este desarrollo de más de quince siglos, con sus estancamientos y sus avances, sus idas y venidas, permitió generar definiciones y conceptualizaciones con la suficiente potencia como para que el análisis matemático y la topología se hayan desarrollado exponencialmente en este último siglo, con el consecuente crecimiento de las disciplinas que de su desarrollo dependen (particularmente la física).

- Continuidad

Ya en la época de los griegos aparecen las primeras ideas intuitivas asociadas a la continuidad, aunque no asociadas a la noción de función puesto que no estaba desarrollado ese concepto en ese momento. Los pitagóricos caracterizaban el espacio y el tiempo formados por puntos e instantes, ambos dotados de una propiedad que conocían como continuidad (Boyer, 1968). También Zenón, en las respuestas de sus paradojas referidas a la imposibilidad del movimiento (por ejemplo la de Aquiles y la tortuga) involucraba una noción intuitiva de continuidad.

En la Edad Media, Oresme presentó un gráfico en el que representaba la velocidad en función del tiempo de un cuerpo en movimiento con aceleración uniforme. En una línea horizontal representó puntos, considerados instantes de tiempo, y en cada punto un segmento perpendicular a la línea horizontal representando la velocidad (Boyer, 1968). Al respecto de esta representación, Oresme escribió "todo lo que varía lo podemos imaginar como una cantidad continua" (Boyer, 1968, p. 290).

En el Renacimiento con la aritmetización de la geometría y con los trabajos de Descartes y Fermat, se pasa de una noción geométrica intuitiva de función, a una concepción algebraica. La noción de continuidad tiene un carácter geométrico, ligado a las curvas. Más tarde, con Newton y Leibniz, la continuidad mantiene su carácter geométrico pero asociada al tiempo con el primero y al espacio con el segundo.

Ya en el siglo XVIII, con Euler, aparece una noción de función: "una expresión analítica formada de cualquier manera a partir de esta cantidad variable y números o cantidades constantes" (Boyer, 1968, p.485). Después de una polémica con D'Alembert, desaparece de su definición la condición de expresión analítica y la formula como sigue: "si x es una cantidad variable, entonces toda cantidad que dependa de x de cualquier manera o que esté determinada por aquella se llama función de dicha variable" (González y López, 1998, p. 10). Para Euler, las funciones continuas son aquellas definidas por una sola expresión analítica. Lo que hoy para nosotros es una función definida a trozos, para Euler era una función discontinua. Esta concepción de la continuidad provoca contradicciones, aun para la época, como por ejemplo la solución obtenida por Bernouilli al problema de la cuerda vibrante en la que una serie de funciones seno y coseno no da como resultado una función continua (González y López, 1998).

En el siglo XIX será Bolzano el primero en proponer una definición de continuidad no asociada a cuestiones geométricas o temporales, como lo eran las de sus antecesores.

> Decir que una función real f de la variable x es continua para todos los valores de x pertenecientes a un intervalo dado, no significa otra cosa que esto: si x es un tal valor cualquiera, la diferencia f(x-w) – f(x) se hace más pequeña que cualquier cantidad dada si se toma w tan pequeña como queramos. (González y López, 1998, p. 12)

Es Cauchy quien sienta las bases para el desarrollo del Análisis Matemático como lo conocemos hoy en día. Su definición de continuidad (1821) es: "la función f(x) es continua con respecto a x entre los límites dados si, entre estos límites un crecimiento infinitamente pequeño de la variable, produce también un crecimiento infinitamente pequeño de la función misma". (González y López, 1998, p. 13).

Con Weierstrass se llega a la aritmetización de la noción de continuidad, arribando a una formulación similar a la épsilon-delta que conocemos hoy en día, desprendida de ideas intuitivas como la de crecimiento infinitamente pequeño. Weierstrass no publicó sus observaciones sobre la aritmetización del análisis pero se conocen por sus estudiantes, entre ellos Lindemann y Heine. Este último, en sus *Elementos* de 1872, influenciado por las lecturas de Weierstrass, define límite de una función como sigue: "Si dado un ε cualquiera existe un η_0 tal que para $0 < \eta < \eta_0$ la diferencia f($x_0 \pm \eta$) – L es menor en valor absoluto que ε, entonces L es el límite de f(x) para x = x_0" (Boyer, 1968, 608).

Ya en el siglo XX con Dedekind y sus estudios de los números reales con su caracterización de los números irracionales y Cantor y su trabajo sobre conjuntos y su noción del infinito, se sentarían definitivamente las bases para el desarrollo de la Topología, correspondiendo a Hausdorff la noción de espacio topológico y a Fréchet la de espacio métrico. Con Hausdorff, la noción de continuidad se desprende por completo de caracterizaciones geométricas para pasar a depender únicamente de las topologías del dominio y la imagen de la función en cuestión. Su definición de continuidad de una función es la que hoy en día escribimos así: "sean X e Y espacios topológicos. Una función $f : X \to Y$ se dice que es continua si para cada subconjunto abierto V de Y, el conjunto $f^{-1}(V)$ es un subconjunto abierto de X" (Munkres, 2002,p. 116).

-Derivabilidad

Desde la antigüedad clásica, tres problemas vinculados a lo que hoy conocemos como la derivada desvelaron a los matemáticos de todas las épocas. Estos son: el problema de determinación de la velocidad de un móvil conocidas su posición y el instante, el problema de la recta tangente a una curva en un punto y el problema de determinación de máximos y

mínimos de una función. Esta formulación de los tres problemas es propia de nuestros días. Como ya señalamos en la revisión histórica de la noción de continuidad, las nociones de función y de curva datan de los últimos cuatro siglos, y su formalización al grado del tratamiento que hoy en día les asignamos de los últimos dos siglos. De todos modos, ya desde la Grecia antigua, el problema de la tangente fue satisfactoriamente resuelto al menos para las cónicas con los trabajos de Euclides y Apolonio (Boyer, 1968), pero no para otro tipo de curvas. De hecho explicitar una noción de tangente fue un problema dificultoso hasta la construcción de la herramienta de la derivada.
Es recién en los siglos XVI y XVII que los matemáticos retoman el trabajo de los griegos respecto a los procesos de variación para resolver problemas que se plantean desde la mecánica o la astronomía. Con los trabajos de Fermat se da un principio de solución a algunos de los problemas de la determinación de máximos y mínimos de una magnitud y del trazado de tangentes. La noción de adigualación que usaba Fermat dista de la noción de límite que usamos hoy en día y solo resuelve el problema en funciones algebraicas. El trabajo de los matemáticos de esta época difiere del tratamiento formal geométrico o aritmético y en este período la intuición se valida como forma de razonamiento matemático.
Es con Newton y Leibniz (fines del siglo XVII y comienzos del XVIII) que con sus teorías de las fluxiones e infinitesimal, respectivamente, se logra dar fundamento a lo que hoy conocemos como Cálculo diferencial e integral (Boyer, 1968).
Con los trabajos de Cauchy (siglo XIX), a quien se le atribuye el rigor actual de las matemáticas, y la definición de función derivada entre otros, los trabajos ya reseñados de Dedekind y Cantor, finalmente las matemáticas, y en particular el Cálculo, se establecen como un dominio matemático distinto al del álgebra, al de la geometría y al de la aritmética (Boyer, 1968). A partir de la formalización de la definición de derivada los tres problemas clásicos fueron resueltos y, por tanto, también numerosos problemas de otras disciplinas (física, química, astronomía, biología, por ejemplo) que dependían de poder caracterizar la variación de una magnitud en función de otra, trazar una tangente a una curva u optimizar una magnitud restringida a determinadas condiciones.

3) Aspectos didácticos.

Al igual que en la sección destinada a los aspectos disciplinarios aparecen los vínculos de estos con aspectos didácticos, en esta no se hará un desarrollo de la problemática didáctica de la enseñanza de las nociones de continuidad y derivabilidad separada de cuestiones disciplinares. Estas últimas aparecerán en la medida que sea necesario enfatizar las problemáticas didácticas que se derivan de las nociones mismas de continuidad y derivabilidad y de su tratamiento.

3.a) Relevancia de la temática para la formación de formadores

Comencemos esta sección con algunas reflexiones sobre la importancia que estas nociones y su desarrollo tienen para un futuro profesor de matemática para la enseñanza media.
En primer lugar veamos algunas razones de su importancia que por obvias igual no dejan de ser resaltables. Por lo expuesto en el final de la sección anterior, las nociones de continuidad y derivada juegan un papel central en la formación de un profesor ya que estas atraviesan el trabajo que se realiza en todas las asignaturas específicas desde segundo año al final de la carrera. Un trabajo sólido con estas nociones puede condicionar buena parte del trayecto del estudiante en el resto de la carrera. Ya solo por ello vale la pena

destacarlas. Pero también, sobre todo la noción de derivabilidad, permite al futuro profesor transitar un puente hacia el resto de las disciplinas que hacen uso de la matemática. En épocas en que la interdisciplinariedad se considera importante para la formación de estudiantes de enseñanza media, los futuros profesores encuentran en el aprendizaje de la derivada una oportunidad para que sus prácticas de enseñanza incorporen problemas que contemplen la interdisciplinariedad.

También nos parece importante destacar que estas nociones permiten buenas oportunidades de reflexión didáctica, a la par de su desarrollo conceptual, por la diversidad de registros en que se expresan, por las problemáticas que las nociones mismas generan en los diferentes niveles, por su convivencia con *obstáculos* (en el sentido de Brousseau, 2007).

> Un obstáculo es un "conocimiento" en el sentido que le hemos dado de "manera regular de tratar un conjunto de situaciones". Este conocimiento da resultados correctos o ventajas apreciables en determinado ámbito, pero se revela falso o completamente inadaptado en un ámbito nuevo o más amplio. El conocimiento nuevo, verdadero o válido sobre un ámbito más amplio no se establece "a partir" del conocimiento anterior sino contra él: utiliza otros puntos de vista, otros métodos, etc. Entre ellos no existen relaciones "lógicas" evidentes que permitirían desacreditar fácilmente el error antiguo a través del conocimiento nuevo. Por el contrario, compiten en el antiguo ámbito. Estos conocimientos no son construcciones personales variables. Son respuestas "universales" en ámbitos precisos. Aparecen entonces casi necesariamente en la génesis de un saber, ya sea en una génesis histórica o didáctica. (Brousseau, 2007, p. 45)

En el siguiente apartado mostraremos, solo a modo de ejemplo, tres actividades que lidian con estos aspectos, con algunos que ya hemos formulado en la sección 2 y con otros que explicitaremos en la presentación de cada actividad.

3.b) Estrategias de enseñanza y evaluación

A modo de ejemplo de las diferentes estrategias puestas en juego en el tratamiento del tema, presentamos tres secuencias didácticas, una para el tratamiento de la noción de continuidad puntual, otra para la de derivabilidad puntual y la última, que incluye un trabajo de modelización matemática, para la síntesis y evaluación de toda la temática. El resto de los conceptos y teoremas que se describen en la sección dos, se tratarán de forma similar a lo apreciable en las tres secuencias en cuanto al cuidado de brindar oportunidades de que los alumnos produzcan trabajo matemático en el sentido de Segal y Giuliani (2008). "Pensamos que "hacer matemática" es más que resolver problemas. También es encontrar buenas preguntas, buscar medios para responderlas, desarrollar nuevos métodos, conjeturar propiedades, validar soluciones, interactuar con otros miembros de la comunidad matemática de pertenencia, confrontar resultados, técnicas, validaciones". (Segal y Giuliani, 2008, p. 7)

Otro foco de trabajo importante a lo largo de todo el tema es el papel central que tiene la presentación de ejemplos y no ejemplos para el enriquecimiento de la imagen conceptual de un concepto cualquiera o para la comprensión de un teorema.

También tenemos en cuenta en la elaboración de estas actividades, la incorporación de *tareas de final abierto* (Zaslavsky, 1995), es decir tareas originadas a partir de tareas "tradicionales" con pequeñas modificaciones en su consigna de manera que se transformen en tareas con múltiples respuestas, y en muchos casos múltiples estrategias de resolución.

3.b.i) Una secuencia didáctica para el tratamiento de la continuidad puntual.

Se presentan una serie de actividades que buscan recoger qué noción de continuidad puntual manejan los estudiantes, qué dicen al respecto diversas fuentes a las que los estudiantes acuden (más allá de las recomendaciones del curso), qué noción de continuidad se presenta en el curso y qué obstáculos se presentan a partir de lo anterior.

Actividad 1

¿Cuál es tu idea de función continua en un punto? Representa tres funciones continuas y tres que no lo sean.

Actividad 2

Considera las siguientes afirmaciones, recogidas de la web, acerca de la continuidad, compáralas entre sí y con tu idea de continuidad.

a. Una idea intuitiva de función continua se tiene al considerar que su gráfica es continua, en el sentido que se puede dibujar sin levantar el lápiz de la hoja de papel.

b. Una función es continua en un punto si existe límite en él y coincide con el valor que toma la función en ese punto.

c. Una función f es continua en un punto x_0 en el dominio de la función si: $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que para toda x en el dominio de la función: $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Otra manera más simple: Si x_o es punto de acumulación del dominio de la función entonces f es continua en x_o si y solo si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

d. Una función f(x) es contínua en un punto x = a si: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$. Para todo entorno de centro f(a) y radio ß, existe un entorno de centro a y radio ð tal que todos sus puntos x tienen su imagen f(x) dentro del entorno de centro f (a) y radio ß. De otra forma: Si x dista de a menos de ð, su imagen f(x) dista de f (a) menos que ß. $\forall \beta > 0 \ \exists \delta > 0 / si \ |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \beta$.

Actividad 3

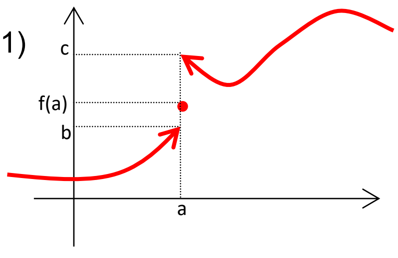
Se consideran las siguientes funciones $f : X \to \mathbb{R}$, dadas por su gráfico. Para cada una realiza las siguientes actividades:

a) indica cuáles funciones son continuas en a, según el concepto que describiste en la actividad 1.

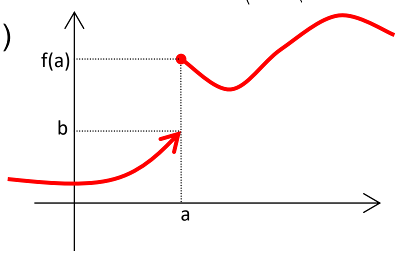
b) en caso de que existan, indica el valor de: $\lim\limits_{x \to a^+} f$, $\lim\limits_{x \to a^-} f$, $\lim\limits_{x \to a} f$, f(a).

c) analiza si se verifica la afirmación: $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+, \exists \delta \in \mathbb{R}^+ / \left(x \in \left(E_{a,\delta} \cap X\right) \Rightarrow f(x) \in E_{f(a),\varepsilon}\right)$

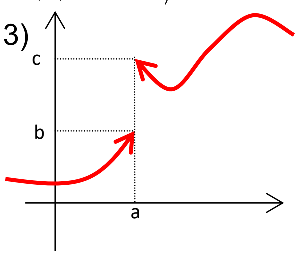
1)

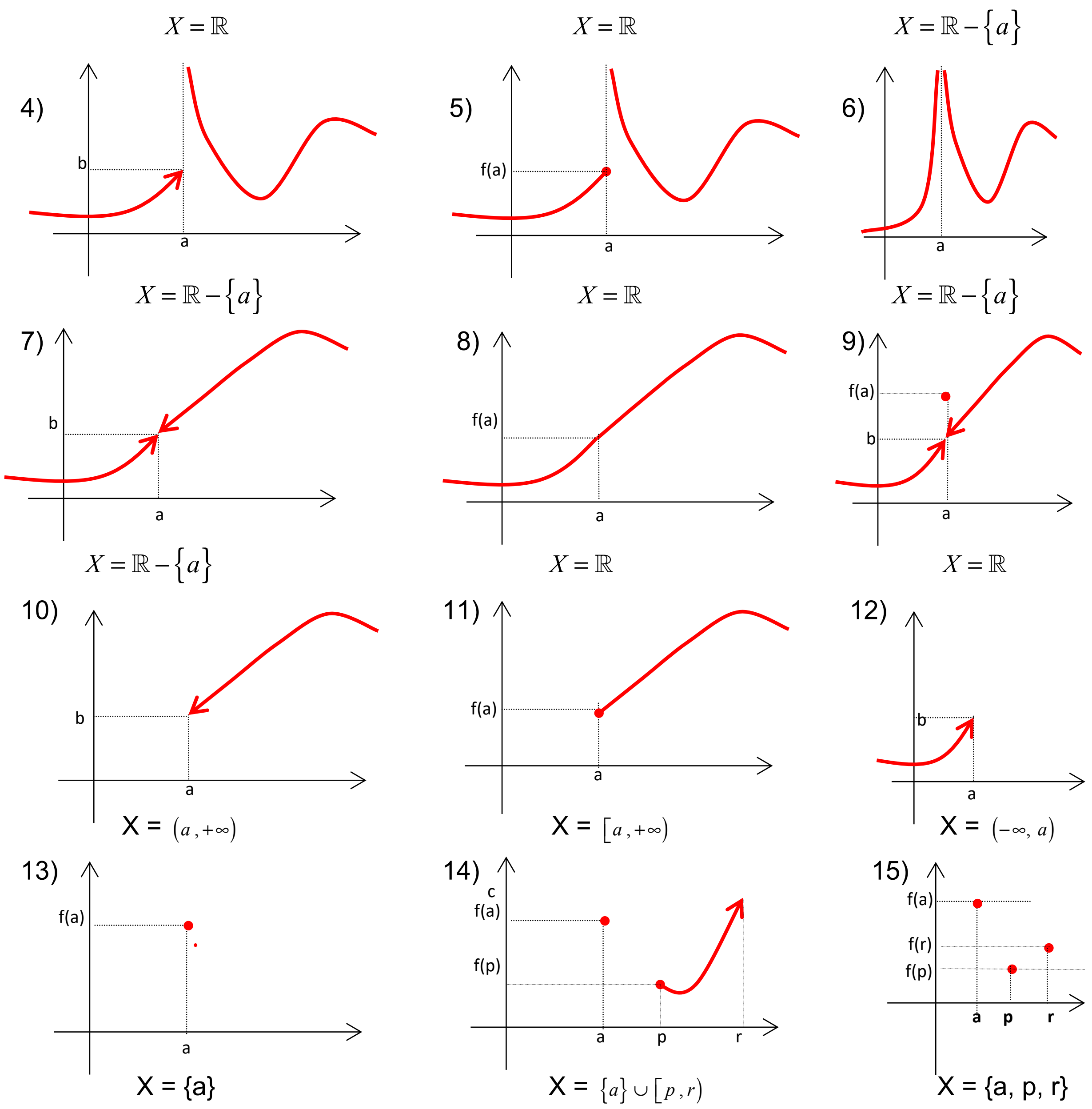


2)



3)





Después de estas actividades exploratorias se presenta la definición de continuidad ya explicitada en 2.a) y se la contrasta con las imágenes e ideas previas de continuidad que tienen los estudiantes. Para continuar profundizando en las implicancias gráficas y analíticas que tiene esta definición de continuidad, así como las diferencias con la definición que habitualmente se trabaja en la EMS, se plantean las siguientes actividades.

Actividad 4

1) Si a es un punto aislado de X, ¿es f continua en a?

2) Si a es punto de acumulación de X y f es continua en a, ¿puedes decir algo de $\lim\limits_{x \to a} f(x)$? ¿Y de $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$? ¿Y de $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$?

3) Revisa tu análisis de la actividad 2 teniendo en cuenta la definición de función continua en a, recién vista.

4) Indica cuáles funciones de la actividad 3 son continuas en a, con esta definición.

Actividad 5

a) Estudia la continuidad de la función $f: X \to \mathbb{R}$, siendo $X = \left\{ x \in \mathbb{R} : x = \frac{1}{n} \text{ , } n \in \mathbb{N}^* \right\} \cup \{0\}$ y f(x) = x, en cada elemento de su dominio.

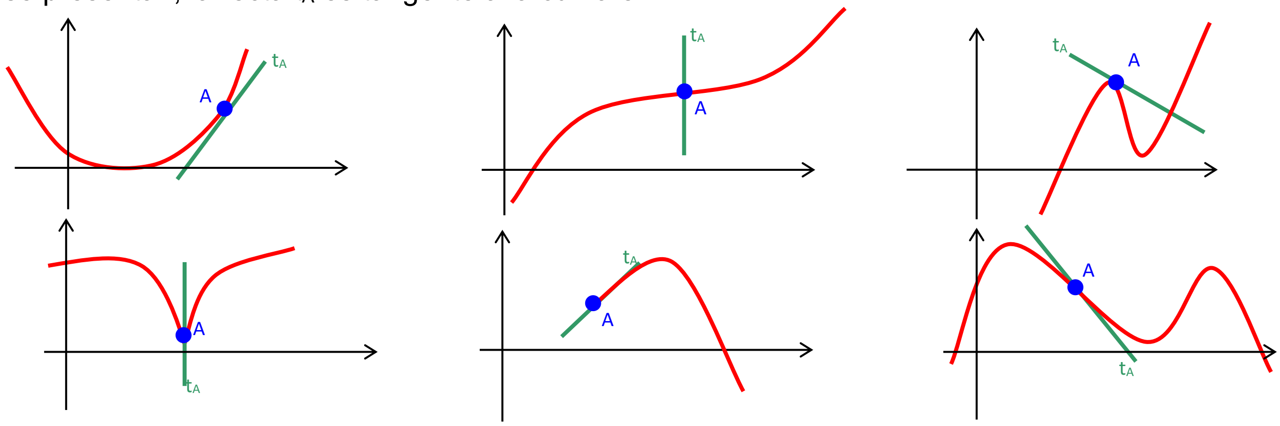
b) Prueba que la función $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \\ \frac{1}{n}, & \text{si } x = \frac{m}{n}, \text{ con } m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}^+ \\ & \text{y } m \text{ y } n \text{ primos entre sí.} \end{cases}$ es continua en todos los irracionales y discontinua en todos los racionales.

3.b.ii) Una secuencia didáctica para el tratamiento de la derivabilidad puntual

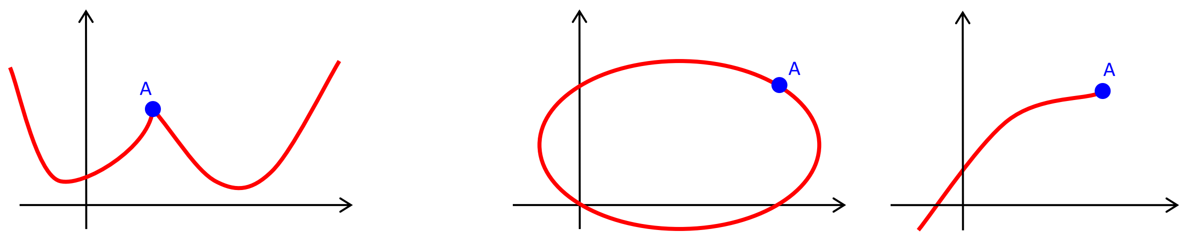
<u>Actividad 1</u>

1) ¿Cuál es tu concepto de recta tangente a una curva en un punto? Presenta tres ejemplos de curvas con tangente y tres ejemplos de curvas que no tengan tangente en algún punto.

2) Según el concepto de recta tangente que explicitaste en 1), indica si en los gráficos que se presentan, la recta t_A es tangente a la curva en A.



3) Según el concepto de recta tangente que explicitaste en 1), dibuja (si existe) la recta tangente en A.



A continuación se definen derivada en un punto y recta tangente al gráfico de una función en un punto como ya se indicó en 2.c), previa visualización mediante una animación en GeoGebra.

<u>Actividad 2</u>

1) Revisa tus respuestas a la parte 2) y 3) de la <u>Actividad 1</u>, a partir de la definición previa.

2) Indica si existe la tangente al gráfico de la función dada en el punto indicado y en caso de que exista halla su ecuación y represéntala gráficamente, así como un bosquejo local del gráfico de la función:

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ / $f(x)=x^2-2x$, en (1,f(1)) y en (3,f(3)).

b) $f:\left[\,0,3\,\right]\cup\left\{\,5\,\right\}\to\mathbb{R}$ / $f(x)=e^x$, en (0,f(0)), en (1,f(1)) y en (5,f(5)).

c) $X=\left\{x\in\mathbb{R}:x=\dfrac{1}{n},\ n\in\mathbb{N}^*\right\}\cup\left\{\,0\,\right\}$, $f:X\to\mathbb{R}$ / $f(x)=x^2$, en (0,f(0)) y en (1,f(1)).

3.b.iii) Una actividad de evaluación del tema con uso de la modelización matemática

La actividad que presentamos a continuación es parte de un diseño basado en un dispositivo didáctico para la enseñanza de la matemática en la formación de profesores. Se conoce como Recorrido de Estudio e Investigación para la Formación de Profesores (REI-FP) y está fundamentado en la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD, Chevallard,1999). En Barquero, Bosch y Romo (2015) se describen cinco etapas para el desarrollo de un REI-FP:

Etapa 1) La etapa de inicio parte de una cuestión abierta de la profesión docente, relacionada con una parte del conocimiento a ser enseñado. Para nuestro caso ¿cómo enseñar las derivadas? En principio, se plantea una revisión de las respuestas de diversos tipos ya propuestas a esta pregunta: desde el currículo y los textos oficiales, desde las investigaciones previas o desde las propuestas didácticas innovadoras. Esta etapa es la que se desarrolla en lo previo a la realización de la actividad que propondremos.

Etapa 2) Esta etapa parte de la experimentación con una actividad de modelización matemática. Los estudiantes de profesorado vivirán esta actividad de modelización buscando una serie de respuestas parciales y nuevas cuestiones que les permitan construir una respuesta final a la cuestión inicial matemática que se les planteó (en nuestro caso será el diseño de una montaña rusa).

Etapa 3) En la tercera etapa, los profesores analizarán la actividad de modelización matemática que vivenciaron en la etapa dos. Este análisis debe incluir: a) un análisis matemático del trabajo hecho en el proceso de modelado; b) un análisis didáctico del proceso que incluya la comparación entre los supuestos del contrato didáctico en la experimentación de una actividad de modelización con los de una clase usual centrada en la trasmisión de conocimientos; c) un análisis de la viabilidad de la experimentación de una actividad de modelización de ese tipo en la institución escolar en donde los futuros profesores ejercen la docencia, incluyendo las condiciones y restricciones institucionales que podrían afectar su posible desarrollo. Es decir, analizar si los futuros profesores pueden o no continuar con la implementación en sus cursos de secundaria, dependiendo de si tienen tiempo o no, si tienen interés o no, si creen que es pertinente o no su planteo a los alumnos con que trabajan.

Etapa 4) La cuarta etapa consiste en el diseño de una adaptación de la actividad de modelización experimentada por los futuros profesores como estudiantes, para ser aplicada con algún grupo de estudiantes de estos futuros profesores. El diseño deberá incluir las cuestiones matemáticas que se les planteará a los estudiantes, los dispositivos que el profesor dispondrá para hacer viable la actividad de modelización matemática y una propuesta de distribución de responsabilidades entre profesor y estudiantes a la hora de la implementación.

Etapa 5) La quinta y última etapa corresponde a la implementación y análisis a posteriori de la actividad de modelización matemática que los futuros profesores diseñaron. El análisis que se plantea en esta etapa dispondrá de las mismas herramientas didácticas que se detallaron en las etapas tres y cuatro. A su vez, además de proporcionar una respuesta a la cuestión inicial planteada en la etapa uno sobre cómo enseñar el tema elegido, se espera que el futuro profesor reconozca alternativas a las respuestas que se habían dado a esa cuestión en dicha etapa.

Lo que se plantea a continuación es una actividad de cierre del tema derivabilidad en el que se desarrollan las etapas dos a cinco del REI-FP (la etapa uno es todo el trabajo previo). Las etapas dos y tres corresponden a la primera parte y las etapas tres y cuatro a la segunda. Esta actividad se utiliza como evaluación de síntesis del tema. La presentamos tal cual se les formula a los estudiantes.

<u>Actividad final</u>

1) Resuelve la actividad "Diseño de una montaña rusa". Puedes recurrir a cualquier tipo de herramienta matemática. Además de presentar la resolución completa, debes elaborar un esquema del proceso que realizaste para resolver la actividad, incluyendo los intentos fallidos, las estrategias diferentes que hayas utilizado, las preguntas y respuestas parciales que te planteaste en el camino, los procedimientos que descartaste.

<u>"Diseño de una montaña rusa"</u>

Uno de los proyectos de la nueva administración municipal de la ciudad de Montevideo consiste en la renovación de los juegos del Parque Rodó. Para ello, llama a concurso a organizaciones interesadas en plantear parte del diseño de una nueva montaña rusa. El tramo a diseñar debe ocupar un espacio de cien metros y debe contener tramos con las siguientes formas gráficas: exponencial, recta, parabólica y sinusoidal (en el orden que a los diseñadores les parezca más agradable). Recuerden que para que la montaña rusa tenga un buen funcionamiento, los carros deben desplazarse sin despegarse de los rieles.

Si deciden participar del concurso tengan en cuenta que el diseño más original y que cumpla con las especificaciones, ganará un premio de diez mil dólares.

¡Esperamos sus ideas!

2) a) Diseña una adaptación de la actividad "Diseño de una montaña rusa" para ser aplicada en uno de tus grupos. La actividad adaptada deberá conservar el grado de apertura de la actividad original, en la medida que sea posible para el grupo en que se implementará. En caso de que no tengas grupo a cargo, puedes planificarlo para tu grupo de práctica o para trabajarlo en dupla con algún compañero que sí tenga grupo a cargo.

b) Presenta un análisis a priori de la actividad que incluya al menos los siguientes aspectos: curso en el que se desarrollará, tiempo que se dedicará, tema, actividad y su análisis: dificultades esperadas, perfil de los alumnos, momentos de la clase, interacciones entre docente y alumnos y de estos entre sí, evaluación, bibliografía.

c) Implementa la adaptación realizada y presenta un análisis a posteriori de la implementación que incluya al menos los siguientes aspectos: interacciones que se dieron, diferentes resoluciones de los estudiantes, emergentes y su resolución, análisis comparativo de tu experiencia con este tipo de actividad y con actividades "tradicionales".

4) Proyección en líneas de investigación

En el final del apartado 2.c) de este trabajo se hizo referencia a los *conceptos y teoremas en acto* (Vergnaud, 1990) y su presencia en diversos momentos de trabajo del curso. Creemos que se puede desarrollar un estudio en torno a las características de los conceptos y teoremas en acto que los estudiantes ponen en juego en el estudio de las nociones de

continuidad y derivabilidad. Más precisamente, podemos intentar relevarlos y clasificarlos, para posteriormente explicarlos. Por ejemplo, en nuestra experiencia personal es notoria la apreciación del uso, por parte de los estudiantes, de los teoremas recíprocos, sin importar su validez. Esa podría ser una de las categorías de teoremas en acción cuyo estudio se podría profundizar. ¿Se pueden detectar y caracterizar otras categorías? ¿Qué utilidad puede tener la descripción de las mismas? ¿Cómo detectar conceptos y teoremas en acto en el accionar docente? ¿Qué influencias tienen estos últimos en el aprendizaje de los estudiantes? Esta podría ser una línea de investigación a desarrollar.
En la sección 3.b) se plantean diferentes actividades, ya probadas en diversas ediciones del curso de Análisis I. A partir de nuestra experiencia con estas actividades, podemos plantearnos posibles caminos a seguir para optimizarlas, a la interna de nuestros propios grupos y en la aplicación en otros grupos, en el intercambio con otros colegas.
En la práctica con la primera actividad se aprecia ostensiblemente como *obstáculo* (en el sentido de Brousseau, 2007) el uso que los estudiantes hacen de una noción de continuidad construida a partir de la definición trabajada en la enseñanza media y que entra en conflicto con la definición del curso. Una posible línea a investigar es reportar qué sucede en otros grupos, con otras estrategias de enseñanza y otros docentes, y también como "vive" la noción de continuidad en los cursos siguientes. ¿Sigue funcionando como obstáculo la noción ya construida en la enseñanza media? ¿El obstáculo para los cursos siguientes pasa a ser la versión en una variable real trabajada en Análisis I? Responder estas preguntas y diseñar estrategias conjuntas con otros docentes de la sala de matemática nos parece un trabajo factible y deseable de realizar.
En cuanto a la segunda actividad, la que plantea una introducción a la noción de derivada en un punto, esta se apoya en el tratamiento de la derivada vinculada al problema de la tangente. El desarrollo planteado en todo el curso de Análisis I, según este proyecto, es el que sigue el orden inverso al orden en que históricamente se desarrollaron las nociones involucradas: comenzamos por número real, luego límites, continuidad y derivadas. Si bien encontramos como ventaja de este desarrollo la coherencia con la construcción discursiva que se da en el resto de los cursos de matemática del profesorado, pensamos que sería interesante explorar otros tratamientos del tema que parten de otras problemáticas y otras construcciones. Particularmente nos interesa explorar el tratamiento de la noción de derivada desde el *pensamiento y el lenguaje variacional*, noción formulada desde la Socioepistemología (Cantoral, 2016). Desde esta perspectiva, el quehacer matemático, como toda otra actividad humana, está normado por prácticas sociales. En el caso de la derivada, la práctica social asociada es la predicción. Queremos predecir un comportamiento a futuro conocidas unas condiciones en un determinado momento. El pensamiento y el lenguaje variacional tratan de la cuantificación de los posibles cambios a predecir. Desde esa perspectiva, la noción de derivada no se introduce asociada a la noción de tangente sino a la de cambio y velocidad de cambio. Este tratamiento permitiría un desarrollo más coherente con el desarrollo histórico de la temática. Parte del problema a investigar es ¿cómo armonizar todo el curso en función de las nociones centrales de la Socioepistemología (pensamiento variacional para las derivadas y funciones de acumulación para las integrales)?
En cuanto a la tercera actividad, la evaluación que incluye un trabajo de modelización matemática, creemos que este tipo de actividad puede y debe extenderse a otras temáticas del curso, por su potencialidad para poner en discusión las prácticas de enseñanza de los

formadores de futuros profesores y de estos con sus alumnos de enseñanza media, pero aun tiene camino para crecer en sí misma. Es una actividad que lleva al futuro profesor a alternar continuamente y en forma deliberada los roles de docente y alumno, a la vez que ejercer un análisis crítico sobre las prácticas de enseñanza. En ese sentido, la experiencia se puede profundizar en este último punto dándole mayor relevancia a este análisis crítico de las prácticas de enseñanza propias y de los futuros profesores. ¿Cómo sistematizar el relato de las experiencias de los estudiantes en su doble rol de docentes y alumnos? ¿Cómo y hasta dónde esta sistematización puede o debe determinar modificaciones en las prácticas de enseñanza? Para que este tipo de actividades no sea una onda en un estanque y su efecto no sea solo anecdótico ¿cómo extender el trabajo con la participación de otros formadores de profesores o de otros estudiantes de otros cursos? Otras cuestiones a investigar desde esta experiencia tienen que ver con las problemáticas surgidas desde las propias nociones involucradas: dificultades con la modelización por funciones y el pasaje de registros en el uso de las derivadas (analítico, algebraico, gráfico). ¿Qué cambios son necesarios en el trabajo con la conceptualización de función y de derivada para despejar estos obstáculos que se presentan a los estudiantes?
Estas son entonces, algunas de las líneas de investigación que nos parece interesante desarrollar a futuro, sobre la enseñanza de las nociones de continuidad y derivabilidad en el curso de Análisis I para profesores de matemática.

Bibliografía

Barquero, B., Bosch, M. y Romo, A. (2015). *A study and research path on mathematical modelling for teacher education*. Ed. Konrad Krainer; Naďa Vondrová. Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, Prague, Czech Republic. pp. 809-815.

Bosch, M., García, F.J., Gascón, J., Ruiz Higueras, L. (2006). La modelización matemática y el problema de la articulación de la matemática escolar. Una propuesta desde la teoría antropológica de lo didáctico. *Educación matemática, 18*(2), 37-74.

Boyer, C. B. (1968). *A History of Mathematics*. New York: John Wiley & Sons.

Brousseau, G. (2007). Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas. 1ª ed. Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Cantoral, R. (2016). Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudio sobre construcción social del conocimiento. México: Gedisa.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didatique. *Recherches en Didactique des Mathématiques. 19* (2), pp. 221-266.

González, M. T. y López, C. (1998). Los conceptos de límite y continuidad en la Educación Secundaria: transposición didáctica y concepciones de los alumnos. *ResearchGate http://www.redined.mec.es/oai/indexg.php?registro=008199800005*

Lima, E. L. (2006). *Análise real volumen 1. Funçoes de uma variável*. 8ª ed. Río de Janeiro: IMPA.

Linés, E. (1983). *Principios de Análisis Matemático*. Barcelona: Reverté

Munkres, J. R. (2002). *Topología*. Madrid: Pearson Educación.

Santaló, L. A. y col. (1994). *Enfoques hacia una didáctica humanista de la matemática*. Buenos Aires: Troquel Educación.

Segal, S. y Giuliani, D. (2008). *Modelización matemática en el aula: posibilidades y necesidades.* 1ª ed. Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Shulman, L. S. (2001). Conocimiento y enseñanza. *Estudios Públicos, 83*, 163-196.

Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics, 12*, 151-169.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Récherches en Didactique des Mathématiques, 10* (23), 133-170.

Zaslavsky, O. (1995). Open-ended tasks as a trigger for mathematics teachers'professional development. *For the Learning of Mathematics, 15* (3), pp. 15-20

Probabilidad y Estadística-Computación en la Formación de Docentes

CONVERGENCIAS

Luciana Olesker

Introducción

El presente trabajo es elaborado para su presentación en el concurso de efectividad para el departamento de matemática del CFE, en la sección de probabilidad y estadística. Se plantean en las pautas del mismo, cuatro temas para la prueba de oposición del cual he seleccionado el tema de convergencias. Dado la extensión acotada de este trabajo nos vemos obligadas a realizar un recorte de la temática planteada, poniendo el énfasis en el Teorema Central del Límite.

Este trabajo consta de tres secciones. En la primera sección, se presenta matemáticamente el teorema, su enunciado y su demostración, de la forma en que lo desarrollamos en la actualidad, siempre en vínculo a los contenidos matemáticos necesarios y haciendo referencia a las decisiones epistemológicas que se toman. También dentro de esta misma sección, se desarrollan los fundamentos epistemológicos del tema y una breve reseña del recorrido histórico del teorema central del límite. La segunda sección se centra en mostrar la relevancia de este tema para la formación docente y propone algunas estrategias didácticas para su abordaje, básicamente vinculadas al trabajo con simulaciones. En la sección número 3, se plantean posibles líneas de investigación vinculadas con el teorema central del límite y su enseñanza, que se desprenden de este proyecto.

1. Aspectos disciplinarios del Teorema Central de Límite

1.1. Enunciado y demostración del teorema

El Teorema Central del Límite es, a grandes rasgos, un conjunto de proposiciones que establecen, bajo determinadas condiciones, que la distribución de la suma de un número, que va creciendo al infinito, de variables aleatorias converge a la función de distribución normal. Se comienza por el teorema de Lindeberg–Lévy, en cual considera las variables independientes e igualmente distribuidas, para luego trabajar con otras versiones del teorema que no suponen la misma distribución para las variables.

1.1.1. Conceptos matemáticos involucrados en el tema

Función característica

Una función característica es una función que toma valores complejos y tiene argumento real. Definida a partir de la variable aleatoria X, caracteriza a la distribución F(x) de esta variable aleatoria.

Definición: Consideramos una variable aleatoria X definida en $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Llamamos *función característica* de la variable aleatoria a la función:

$$\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{C} \text{ tal que } \varphi(t) = E\left(e^{itX}\right)$$

Observemos que la fórmula anterior es equivalente a $\varphi(t) = E(\cos tX) + iE(\operatorname{sen} tX)$. Entonces como las variables $\cos tX$ y $\operatorname{sen} tX$ están acotadas para todo t real, sus esperanzas matemáticas existen. Por lo tanto, la función característica de una variable aleatoria arbitraria X está correctamente definida para todo *t* real.

Algunas propiedades de la función característica:

1) $\varphi(0) = 1$

2) $|\varphi(t)| \leq 1$ para cualquier $t \epsilon \mathbb{R}$

3) La función característica es uniformemente continua en la recta real.

4) Consideramos una variable aleatoria X con momento finito de orden k ($(E(X^k) < \infty$), para algún natural $k \geq 1$. Entonces para todo t real, la función característica tiene derivadas continuas hasta de orden k inclusive y además $\varphi^{(m)}(0) = i^m E(X^k)$con $1 \leq m \leq k$
5) Teorema de unicidad: Sean $\varphi(t)$ y $\omega(t)$ funciones características correspondientes a dos funciones distribuciones F(x) y G(x). Sí $\varphi(t) = \omega(t)$ para todo t real, entonces se verifica que, F(x) = G(x) para todo x real.

Es de suma importancia para lo que se desarrolla luego la forma que toma la función característica de la distribución normal, en particular de la normal estándar:

$$\varphi_X(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = \int_{\mathbb{R}} \cos(tx) . \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx + i \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \operatorname{sen}(tx) . \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx}_{0}$$

Porque es una función impar

Derivamos ahora $\varphi_X(t)$ y entonces se obtiene:

$$\varphi_X'(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \operatorname{sen}(tx) . (-x) e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\underbrace{sen(tx). e^{-\frac{1}{2}x^2} \Big|_{-\infty}^{+\infty}}_{0\ (pues\ sen\ \text{acot}\ )} - \int_{\mathbb{R}} \cos(tx) . t . e^{-\frac{1}{2}x^2} dx \right]$$

$$= \frac{-t}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{\mathbb{R}} \cos(tx) . e^{-\frac{1}{2}x^2} dx \right] = -t\varphi_X(t)$$

Entonces:

$\varphi_X'(t) = -t\varphi_X(t) \Rightarrow \varphi_X(t) = ce^{-\frac{1}{2}t^2}$ y como $\varphi(0) = 1$. De esta manera se concluye que: Si X~$N(0,1)$ su función característica es $\varphi_X(t) = e^{-\frac{1}{2}t^2}$

Convergencia en distribución o en ley

Definición: Dada la sucesión de variables aleatorias $\{X_n\}_{n\epsilon N}$ definidas en $(\Omega_n, \mathcal{A}_n, P_n)$ y X v.a. definida en $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, se dice que $\{X_n\}_{n\epsilon N}$ *converge en distribución* (o en ley) sí y solo sí, $\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F(x)$ para todo x punto de continuidad de F_X.

Criterio de convergencia en distribución:

Existen varios criterios para garantizar la convergencia en distribución, en este trabajo se desarrolla uno de ellos que se vincula con las funciones características asociadas a las variables en juego. De esta manera se enuncia:

Dada la sucesión de variables aleatorias $\{X_n\}_{n\epsilon N}$ definidas en $(\Omega_n, \mathcal{A}_n, P_n)$ y X v.a. definida en $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ entonces: $X_n \xrightarrow{d} X \Leftrightarrow \varphi_{X_n}(t) \to \varphi_X(t)\ \forall t \epsilon \mathbb{R}$

1.1.2. Sucesiones de variables igualmente distribuidas: Lindeberg–Lévy

En primer lugar desarrollaremos el teorema de Lindeberg-Levy que plantea en su hipótesis trabajar con una sucesión de variables aleatorias independientes e igualmente distribuidas. Una sucesión de variables aleatorias $X_1, X_2, \ldots . X_n$ .... es independiente si para cada n=1, 2,….las variables son mutuamente independientes, y decimos que es igualmente distribuidas si todas las variables consideradas tienen la misma distribución. Esto último, evidentemente conlleva que tienen la misma esperanza y varianza.

Enunciado y demostración del teorema

Consideramos $X_1, X_2, \dots . X_n$ .... una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, con esperanza matemática $E(X_1) = \mu$, $Var(X_1) = \sigma^2$>0. Entonces: $\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\overline{X_n} - \mu) \xrightarrow{d} Z$ donde $Z \sim N(0,1)$

Demostración: La primera parte de la demostración consiste en demostrar el teorema para $\mu = 0$ y $\sigma = 1$.

Para cada n = 1, 2, … consideramos la variable aleatoria $Z_n = \frac{1}{\sqrt{n}}(X_1 + X_2 \dots + X_n)$. Basta probar que la función característica de Z_n tiende a la función característica de la normal estándar.

$$\varphi_{Z_n}(t) = E\left(e^{itZ_n}\right) = E\left(e^{i(t/\sqrt{n})\sum_{k=1}^{n} X_k}\right) = E\left(\prod_{k=1}^{n} e^{i(t/\sqrt{n})X_k}\right) = \prod_{k=1}^{n} E\left(e^{i(t/\sqrt{n})X_k}\right) = \left(\varphi_{X_1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)^n$$

En la penúltima igualdad recurrimos a la independencia de las variables y en la última a que son igualmente distribuidas.

Realizaremos ahora el desarrollo de Taylor para la función característica de X_1:

$$\varphi_{X_1}(t) = \underbrace{\varphi_{X_1}(0)}_{1} + \underbrace{\varphi'_{X_1}(0)}_{iE(X_1)} t + \underbrace{\varphi''_{X_1}(0)}_{-E(X_1^2)} \frac{t^2}{2} - \frac{t^2}{2}\varepsilon_2(t) \quad \text{con } \varepsilon_2(t) \xrightarrow[t \to 0]{} 0$$

Por lo tanto $\varphi_{X_1}(t) = 1 - \frac{t^2}{2} - \frac{t^2}{2}\varepsilon(t)$. Sustituimos en el resultado anterior

$$\varphi_{Z_n}(t) = \left(\varphi_{X_1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)^n = \left(1 - \frac{t^2}{2n} - \frac{t^2}{2n}.\varepsilon_2(t/\sqrt{n})\right)^n = e^{n\left(L\left(1 - \frac{t^2}{2n} - \frac{t^2}{2n}.\varepsilon_2(t/\sqrt{n})\right)\right)} \sim e^{\left[-\frac{t^2}{2} - \frac{t^2}{2}\varepsilon_2(t/\sqrt{n}\right]} \xrightarrow[n \to +\infty]{} e^{-\frac{t^2}{2}}$$

Admitimos en el paso anterior la validez de la siguiente equivalencia:

$$L(u+1) \sim u \quad si\ u \to 0$$

En otras palabras, hemos demostrado que $\varphi_{Z_n}(t) \xrightarrow[n \to +\infty]{} e^{-\frac{t^2}{2}}$ para cada t real fijo. A su vez, $\varphi_Z(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$ es la función característica de la distribución normal estándar. Utilizando el criterio de convergencia en distribución obtenemos que:

$$\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\overline{X_n} - \mu) \xrightarrow{d} Z$$

Ahora solo falta mostrar que al demostrar para el caso de $\mu = 0$ y $\sigma = 1$ no hemos perdido generalidad:

Consideremos las variables auxiliares $Y_i = \frac{X_i - \mu}{\sigma}$ con $i = 1,2, \dots . n,$ .... Es sencillo notar que esta sucesión de variables son independientes y equidistribuidas. Además cumple con las condiciones de la prueba anterior $E(Y_1) = 0$ y $Var(Y_1) = 1$. Es inmediato ver, entonces que, para todo x real, $F_n(x) = P\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \le x\right) = P\left(\frac{Y_1 + \cdots + Y_n}{\sqrt{n}} \le x\right) \to \Phi(x)$ cuando n → ∞

Observaciones y comentarios

1) En la demostración anterior hemos trabajado con el caso $\mu = 0$ y $\sigma = 1$ mostrando que no se pierde generalidad. Creemos importante destacar que podríamos haber trabajado simplemente con el caso en que $\mu = 0$ y la varianza un valor positivo cualquiera, sin alterar mucho la demostración. Sin embargo, por una elección personal, vinculado a como se presenta la prueba del teorema hemos trabajado con la N(0,1).

2) En algunas bibliografías se presenta la demostración utilizando las funciones generatrices de momentos y no las funciones características. Para ello se debe agregar la hipótesis auxiliar de que las funciones generatrices de las variables existan en un entorno de cero. Ello se puede plantear perfectamente si necesitamos evitar el trabajo de análisis complejo, por ejemplo Taylor en los complejos.

3) El clásico teorema de De Moivre–Laplace se puede verse como consecuencia de este teorema. En este caso las X_n toman valores de 1 y 0, con probabilidad p y q = 1 – p. Entonces $\mu = p$ y σ^2=pq. Aquí $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ es el número de éxitos en una secuencia de n pruebas de Bernoulli, o sea que, $\frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} \to N(0,1)$

1.1.3. Debilitando las hipótesis: teorema de Lindeberg y teorema de Liapunov

Las hipótesis del teorema de Levy pueden debilitarse y seguirse obteniendo la convergencia a la normalidad. Los teoremas que se presentan a continuación permiten sacar la hipótesis de igualmente distribuidas, para ello se incorporan hipótesis que piden que las variables estén “cerca” de la media, es decir que los valores más alejados sean despreciables. A continuación se enuncian dos teoremas que no contienen la hipótesis de igualmente distribuidas.

Teorema central del límite de Lindeberg

Tenemos un arreglo triangular de variables aleatorias:X_{11}

$$\begin{matrix} X_{11} & & \\ X_{21} & X_{22} & \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ X_{n1} & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & X_{nn} \end{matrix}$$ v.a. independientes

Sean: $E(X_{nk}) = m_{nk}$ $\quad Var(X_{nk}) = \sigma_{nk}^2$ $\quad V_n = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \sigma_{nk}^2}$

Si se cumple que: $\frac{1}{V_n^2} \sum_{k=1}^{n} E\left[(X_{nk} - m_{nk})^2 1_{\{|X_{nk} - m_{nk}| \geq \varepsilon V_n\}}\right] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \forall \varepsilon > 0$

Entonces: $\frac{1}{V_n} \sum_{k=1}^{n} (X_{nk} - m_{nk}) \xrightarrow{d} N(0,1)$

Condición de Lyapunov

Para cada $n \geq 1 X_{n1} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots X_{nn}$ v.a. independientes.

Sean: $E(X_{nk}) = m_{nk}$ $\quad Var(X_{nk}) = \sigma_{nk}^2$ $\quad V_n = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \sigma_{nk}^2}$. Sí $\exists\, \delta\ (0 < \delta \leq 1)$ que cumple: $\frac{1}{V_n^{2+\delta}} . \sum_{k=1}^{n} E|X_{nk} - m_{nk}|^{2+\delta} \underset{n}{\to} 0$

Entonces: $\frac{1}{V_n} . \sum_{k=1}^{n} (X_{nk} - m_{nk}) \xrightarrow{d} Z$ con $Z \sim N(0,1)$

1.2. Fundamentación epistemológica de su relevancia disciplinaria

1.2.1. Relevancia del Teorema Central del Límite

La teoría de la probabilidad y la estadística es, en la actualidad, una de las ramas más fecundas de las Matemáticas. Los métodos estadísticos son hoy fundamentales en diversos campos científicos, profesionales y sociales. La estadística tiene una importancia muy marcada en la sociedad desde hace ya mucho tiempo. Muchas decisiones que se toman en nuestras comunidades tienen por detrás aspectos estudiados por la estadística. Creemos que un razonamiento aleatorio correcto y una comprensión adecuada de la probabilidad y aspectos básicos de la estadística, son tan necesarios para la formación integral del individuo, como lo son la capacidad aritmética y algebraica.

El Teorema Central del límite es uno de los resultados más importantes de la probabilidad y la estadística. Como se desarrolló en la sección anterior, el TCL es un conjunto de proposiciones que establecen, bajo determinadas condiciones, que la distribución de la suma de un número, que va creciendo al infinito, de variables aleatorias converge a la función de distribución normal. Un gran número de las aplicaciones actuales de la estadística, se basan en obtención de conclusiones sobre una población, a partir de los datos disponibles de una muestra, o sea inferencia estadística. La comprensión del TCL, es básico en los procedimientos inferenciales de estimación puntual de parámetros, estimación por intervalos de confianza y prueba de hipótesis, cuando no se conoce la distribución exacta del estadístico en el muestreo, ya que permite determinar las distribuciones asintóticas de la media y otros parámetros. Además existen otras aplicaciones muy importantes del TCL vinculada a la aproximación de distribuciones clásicas, tales como la Binomial, Poisson, entre otras, mediante la consideración de la suma de variables aleatorias. Esto explica también, que muchos métodos estadísticos requieren la condición de normalidad para su correcta aplicación y que se hayan desarrollado muchos métodos basados en dicha distribución.

1.2.2. Breve reseña histórica sobre el Teorema Central del Límite

Muchas veces se presenta la matemática como algo acabado, neutral y desprovisto del factor humano y cultural. Esta presentación de la matemática como algo “puro” está lejos de la realidad, por el contrario, el conocimiento matemático ha avanzado (o no) como producto de ciertas condiciones sociales y hechos históricos. Es muy interesante entonces, mostrar los conflictos del proceso histórico creativo, o sea la forma en que han llegado a construirse los conceptos y proposiciones más importantes, que en muchos casos ni siquiera son lineales, tienen avances y retrocesos. En este sentido, damos un pantallazo general del proceso histórico de creación del TCL, marcando los momentos históricos y aspectos epistemológicos más relevantes.
Nos basamos en esta sección principalmente en los trabajos de Fisher (2000) y de Alvarado, Batanero (2006). Realizando una breve reseña de la evolución histórica del TCL, desde su primera forma simple, cuando la teoría de la probabilidad todavía no había sido considerada parte de la matemática hasta llegar a la etapa actual.

Siguiendo a Alvarado (2006) establecemos que en la evolución del TCL principalmente tres etapas históricas. Una primera, que comienza en 1738 con los planteos de Moivre y todo lo trabajado por Laplace y Poisson principalmente. Una segunda etapa entre 1870 y 1910 donde son protagonistas los matemáticos rusos Chebyshev, Markov y Liapuvov. Y finalmente, entre 1920 y 1937 una etapa final donde con los trabajos de Lévy y Feller, en donde el TCL queda probado y se llega al final del desarrollo.

El TCL fue establecido por primera vez en 1738 por Abraham De Moivre, bajo condiciones muy restringidas. Su origen surge de la necesidad de encontrar fórmulas de cálculo para la distribución Binomial y otras distribuciones discretas, en las que intervienen los términos factoriales. Podemos notar que al aumentar el valor de n estos términos crecen muy rápidamente, por lo que el cálculo exacto de las probabilidades de los valores de la variable en las distribuciones es muy complicado y trabajoso. Este problema llevó a distintos matemáticos a tratar de encontrar valores aproximados de estas probabilidades para valores de n grandes y a estudiar las condiciones en que estas aproximaciones podrían utilizarse con un error acotado. En la actualidad, sabemos que la binomial para n grandes se puede aproximar con una distribución normal. Según Alvarado (2006), Abraham De Moivre (1667-1754) publicó comentarios sobre este tema en 1730 en su *Miscellanea Analytica* y publica la solución en su *Doctrine of Chances* (1733), donde muestra que la binomial para valores de n grandes, sigue una distribución normal de media $\mu = np$ y $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$. . De Moivre investigó los límites de la distribución binomial cuando el número de ensayos aumenta, encontrando una relación con la función e^{-x^2} pero no la logra relacionar con la disitribución normal.

Pierre Simon Laplace trabajó sobre la suma de variables aleatorias, y su trabajo probabilístico tuvo un gran impacto en lo que sería posteriormente el TCL. En un artículo publicado en 1776, estuvo trabajando en calcular distribuciones de probabilidad de la suma de ángulos de inclinación de meteoros. Afrontó el problema de la desviación entre la media aritmética de los datos que obtenía observando y los valores teóricos. Debido a la considerable magnitud de dichas desviaciones, no fue capaz de representar un cálculo exacto, así que necesitó de una aproximación (Fischer, 2000). Fue en el proceso de encontrarla, que Laplace eventualmente vino a formular la primera versión del TCL. Laplace generalizó en el año 1809, el trabajo de De Moivre referido a la distribución binomial a la suma de variables aleatorias discretas idénticamente distribuidas con media y varianza finita. En 1810, publicó una memoria, donde estableció y probó más formalmente la siguiente versión del TCL: Sea X una variable aleatoria entera que toma valores enteros $\{-a, \dots 0, \dots a\}$con probabilidad $P(X = x) = \frac{x}{2a}$ entonces para una muestra grande de n, La suma de n de estas variables está distribuida aproximadamente normal con media nμ y desviación típica $\sqrt{n}\sigma$, siendo μ y σ la media y la desviación de la variable X. Luego, Laplace intentó generalizar el resultado a distribuciones discretas de rango infinito y también a distribuciones continuas pero no logró obtener demostraciones válidas para ello.

En el siglo XIX, la contribución más decisiva para el desarrollo del TCL fue la de Siméon Denis Poisson, quien publicó dos artículos (1824 y 1829) donde discutió el TCL. Según Fischer (2000) las contribuciones de Poisson al TCL fueron principalmente en dos aspectos: generalizar los resultados de Laplace y discutir los alcances de su aplicación. Poisson comienza estableciendo una demostración del TCL para variables independientes distribuidas idénticamente; primero para una suma de éstas y luego para una combinación lineal de ellas. Otro aspecto fundamental de su trabajo es que puso en discusión la validez del TCL, principalmente dando algunos contraejemplos como ser la distribución de Cauchy.

En 1824, Poisson da una demostración más rigurosa para una variable continua, `planteando que la suma de variables independientes, con función densidad acotadas tienen una distribución aproximadamente normal. Según Ficher (2000) el propósito principal del TCL para Poisson fue ser una herramienta en el cálculo de probabilidades clásicas, más que ser un teorema matemático en sí mismo.

Cauchy fue uno de los primeros matemáticos que consideró seriamente la teoría de probabilidad como matemática pura. Su demostración del TCL sigue una línea diferente comparada con las demostraciones previas, usando la función característica para variables independientes e idénticamente distribuidas, con función de densidad simétrica y de rango finito.

Como menciona Alvarado (2006) en esta primera etapa los resultados y demostraciones del TCL si bien sirvieron de base para lo trabajado posteriormente, tuvieron sus deficiencias en varios aspectos claves. En primer lugar, el teorema fue demostrado solo para variables de rango finito. Además, no se explicitaron las condiciones, en términos de los momentos, bajo el cual el teorema se cumple.

Estos problemas que se mencionan en el párrafo anterior, fueron eventualmente resueltos por matemáticos rusos, entre 1870 y 1910, usando dos soluciones: el "método de los momentos" (Chebyshev y Markov) y la función característica (Liapunov).

Seneta (1984) plantea que el artículo de Chebyshev en 1887, es el primer intento (no conseguido) de demostración rigurosa del TCL. Chebyshev usó el "método de los momentos", tempranamente desarrollado por él y simplificado y completado más tarde por Markov, quien también completó la demostración de Chebyshev del TCL en 1898. Markov notó que se necesita añadir condiciones para que el teorema se cumpla. Fue recién en 1913 que Markov logró una demostración del TCL bajo la condición de Liapunov usando el método de los momentos.

La demostración de Liapunov, publicada en 1901, es considerada la primera demostración rigurosa del TCL. Decía Sean $X_1, X_2, \ldots.$ una sucesión de variables aleatorias independientes, donde $E(X_i) = 0 \; y \; E\left(X_i{}^k\right) \leq \infty$ para $k \geq 2 \forall i$, entonces usando el teorema de continuidad y unicidad de la función característica concluyó que la distribución de la suma es aproximadamente normal. Para lograr su demostración introduce un lema fundamental que, aunque no lo separa de su demostración, está contenido implícitamente en el mismo. Este lema indica que dado una variable aleatoria $S_n$que depende del entero n, con media 0 y varianza 1, si la función característica de la variable S_n converge uniformemente a la función característica de la distribución normal en algún intervalo finito, entonces, la función distribución de la variable S_n tiende uniformemente a la distribución normal.
Finalmente, para terminar esta reseña histórica debemos mencionar a Levy y Feller. Linderberg publicó en 1922 una demostración rigurosa para la condición suficiente del TCL, pero no probó la condición necesaria. En 1937, Feller y Lévy refinaron la demostración de Linderberg del TCL fue así probado con las condiciones necesarias y suficientes y se llega al final del desarrollo.

2.- Aspectos didácticos de Teorema Central del Límite

2.1. Relevancia del tema para la enseñanza en la formación de formadores

Ya hemos mencionado la importancia que tiene la probabilidad y la estadística en la actualidad para la matemática y para múltiples y variadas ramas de la ciencia. Además, en nuestra sociedad la estadística juega un rol fundamental tanto para comunicar, generar opinión y tomar decisiones. Por eso es que, sostenemos que un ciudadano estadísticamente alfabetizado, se podrá insertar

en la sociedad que lo rodea con una visión más crítica de la misma y siendo potencial transformador de la misma. Esto es para nosotras un objetivo primordial de la educación matemática en todos los niveles. De ello se desprende la importancia que tiene en la currícula de formación docente la probabilidad y estadística, pues serán ellos quienes formarán a los jóvenes.
El Teorema Central del Límite es un eslabón fundamental en la teoría de la probabilidad y la vincula con la estadística inferencial. Creemos que un docente con una buena formación en estadística y probabilidad debe comprender de forma significativa este teorema. Más allá de que luego lo tenga que enseñar, quizás en algunos niveles de enseñanza media no se trabajará o se hará de forma implícita, un docente debe aprender este teorema pues le dará una comprensión más profunda de la teoría de la probabilidad y de la estadística.

2.2. Estrategias didácticas para la enseñanza del TCL

2.2.1. Innovación en la metodología de enseñanza

Desde muchos ámbitos se recomienda la iniciación temprana al estudio de la probabilidad y la estadística. De acuerdo a los estándares del NCTM (2000) los estudiantes deben explorar mediante situaciones y de forma activa los modelos de probabilidad, pudiendo así desarrollar una correcta intuición estocástica, además de los conceptos matemáticos asociados a la disciplina. A través de la experimentación y de la simulación, los estudiantes deben formular hipótesis, comprobar conjeturas y depurar sus teorías sobre la base de la nueva información.

Los nuevos currículos de enseñanza en Uruguay, no son la excepción de lo que sucede en otros países, sugieren una metodología de enseñanza basada de la experimentación y simulación de experiencias aleatorias. Si bien ya hace muchos años los temas de probabilidad están en nuestros currículos, esto no ha sido suficiente. Muchos profesores no se sienten cómodos con los temas asociados a ella y los dejan para el último tiempo y si es posible los omiten. Además, cuando son enseñados se remiten a una mera enseñanza expositiva, a la ejercitación de cálculos y a la resolución de problemas rutinarios. Como sostiene Batanero (1998), la enseñanza de la probabilidad ha estado vinculada con el aprendizaje de algoritmos matemáticos, dejando de lado aspectos relevantes en su conceptualización, como la formulación de predicciones sobre las posibilidades de obtener diferentes resultados en experimentos aleatorios sencillos, la obtención de datos empíricos de estos experimentos, la comparación de las probabilidades experimentales generadas con las predicciones originales y el uso de recursos sencillos tales como ruletas, dados, monedas, etc. Según Shaughnessy (1995), el desarrollo del pensamiento aleatorio mediante contenidos de probabilidad y estadística debe estar imbuido de un espíritu de exploración y de investigación tanto por parte de los estudiantes como de los docentes.

Creemos que más allá de lo que puede hacerse para transformar las prácticas de docentes en ejercicio, debemos tratar de incidir desde la formación docente. Para contribuir a cambiar la realidad de la enseñanza de la probabilidad y la estadística en la enseñanza media, se debe dar más y mejores cursos de probabilidad y estadística, y por otro lado renovar su enseñanza. Diversos autores y estudios coinciden en que en general los docentes enseñamos como fuimos enseñados. O sea, si ellos ven en sus clases de estadística un enfoque estrictamente tradicional, así lo reproducirán en su aula. Por el contrario, si en la formación docente, viven diferentes experiencias de enseñanza, con metodologías variadas y donde la experimentación y la modelización matemática ocupen un lugar de privilegio, estamos convencidos que ello los animará a renovar sus prácticas como futuros docentes. Creemos que la simulación como herramienta didáctica, aunque no es la única obviamente, tiene mucho para aportar en este objetivo.

2.2.2. Simulación: Desafíos y oportunidades

Gran parte de la actividad matemática, y en particular de la estadística, puede ser descrita como proceso de modelización. Esto es, a grandes rasgos, al enfrentarse a ciertos objetos de la realidad, tomar sus principales aspectos, simplificarlos y transformarlos en algo abstracto, tanto a ese objeto como a las relaciones y variables relacionadas. La construcción de modelos, su comparación con la realidad, su perfeccionamiento progresivo, son de gran importancia en el desarrollo de la probabilidad y la estadística, tanto en problemas prácticos como en su enfoque teórico. Batanero (2001) menciona que un ejemplo destacado de modelización estadística a partir de un problema práctico, son las distribuciones de probabilidad, que permiten describir en forma sintética el comportamiento de las distribuciones empíricas de datos estadísticos y hacer predicciones sobre su comportamiento, por ejemplo la curva normal sirve para modelizar variadas situaciones.

Cuando trabajamos en el aula con simulaciones como forma de resolver problemas tanto prácticos como teóricos, estamos contribuyendo por un lado a que nuestros estudiantes mejoren su capacidad de modelizar situaciones matemáticamente. Por otro lado, la simulación les permite resolver problemas que de otra manera serían muy engorrosos, y los entrena en la toma de decisiones. A través de la simulación los estudiantes podrán acceder a resultados teóricos de una manera experimental, que serán una base sólida en las que luego se anclarán los conceptos y demostraciones teóricas. Este es el caso del teorema central del límite, nos preguntamos al tener una sucesión de variables independientes y equidristribuidas ¿cómo se distribuye la suma si aumento al infinito la cantidad de variables? Antes de responder teóricamente esta pregunta, lo haremos simulando la situación.

Es fundamental destacar que, de ninguna manera se propone la simulación como forma de validación matemática. En el ámbito educativo en que se enmarca esta propuesta, la formación docente, los estudiantes cuentan con las herramientas necesarias para realizar demostraciones formales. Las proposiciones matemáticas se demuestran de forma lógica deductiva y es fundamental dar lugar de privilegio a estas demostraciones en la enseñanza en general y más aún en la formación docente. Los resultados que nos da la simulación carecen de valor explicativo por si mismos. Entonces, la simulación nos brindará una herramienta para sacar conclusiones pero nunca será nuestra forma de validación. Proponemos un plan de enseñanza del TCL que incluye la simulación pero de ninguna manera sustituirá a la demostración formal del teorema.

2.2.3. El por qué simulación en la enseñanza del TCL

Varios investigadores de la didáctica de la matemática han coincidido que el significado que se le atribuye a un objeto matemático no incluye únicamente su definición. El significado de un objeto matemático es mucho más que su mera definición, está relacionado al contexto donde se utiliza, su significado está estrechamente relacionado a los problemas y a la actividad realizada para su resolución. En relación a esta afirmación, tomaremos como base de esta propuesta didáctica las ideas de Vinner y Tall (1981) sobre la imagen conceptual. Los autores establecen una diferencia entre la imagen conceptual y la definición del concepto. Todos los conceptos matemáticos, a excepción de los primitivos, tienen sus definiciones formales. Estas definiciones son enseñadas con detalle a los estudiantes, sin embargo, Vinner afirma que para determinar si algo es un ejemplo o contraejemplo del concepto no necesariamente se recurre a ellas. Según los autores en la mayoría de los casos la decisión está basada en la imagen del concepto. La imagen conceptual es el conjunto de todas las imágenes mentales asociadas con el nombre del concepto, puede tratarse de una representación visuales o bien una serie de impresiones o experiencias. Por lo tanto, creemos que es imprescindible trabajar no solamente con las definiciones formales matemáticas sino también con las imágenes conceptuales que se asocian al concepto, ya que éstas son las que generalmente son evocadas ante los problemas matemáticos.

En el caso de la enseñanza de la probabilidad, la simulación tiene mucho para contribuir al respecto ya que, da a los estudiantes experiencias estocásticas que nutrirán la imagen conceptual de los conceptos.

El TCL tiene una enunciado claro y una demostración contundente y explicativa. Igualmente creemos que la simulación va a ampliar la idea que tienen los estudiantes del TCL, y va a lograr que los estudiantes evoquen el teorema de manera más certera cuando se encuentren frente a ejemplos de su aplicación, incluso rechazar su uso cuando se encuentren ante contraejemplos.

Diversas investigaciones realizadas en otros países, sobre la enseñanza del teorema del límite central, muestran una complejidad en la comprensión de su significado
Alvarado y Batanero (2008) notaron deficiencias en la comprensión del concepto de distribución y del teorema del límite central en estudiantes universitarios que ya habían transitado por sus cursos de estadística. Las dificultades generan otras limitaciones, particularmente en la realización e interpretación en la estadística inferencial: intervalos de confianza y contrastes de hipótesis. Aunque una demostración matemática establece la veracidad del teorema, quedan dudas sobre si de por sí sola la demostración contribuye a la idea intuitiva del resultado. La simulación puede dar respuesta a esta dificultad, ayudando a mejorar las ideas intuitivas del TCL y dando una base experimental sobre la cual se arraigará el desarrollo más formal del teorema.

2.3. Propuesta didáctica para la enseñanza del TCL

2.3.1. Objetivos de la propuesta

Siguiendo a Alvarado (2007) afirmamos que existen cuatro propiedades básicas que deben entenderse para poder lograr una comprensión sólida del teorema:

1. La media de la distribución muestral es igual a la media de la población, e igual a la media de una muestra cuando el tamaño de la muestra tiende al infinito;
2. La varianza de la distribución muestral es menor que la de la población (cuando $n>1$);
3. La forma de la distribución muestral tiende a ser acampanada a medida que se incrementa el tamaño muestral y es aproximadamente normal, independientemente de la forma de la distribución en la población;
4. La forma de la distribución muestral crece en altura y decrece en dispersión a medida que el tamaño muestral crece.

La propuesta que presentamos a continuación tiene como objetivo que los estudiantes de FD tengan correctas ideas e intuiciones del TCL, en los cuatro aspectos que mencionamos anteriormente. En palabras de Vinner, buscamos con esta propuesta que los estudiantes de FD construyan una imagen conceptual de lo que dice el teorema central del límite y de los aspectos fundamentales en el mismo.

El trabajo presentado con el applet de simulación servirá para introducir el teorema central del límite, que posteriormente se enunciará y demostrará. El simulador es muy potente pues permite trabajar con varias distribuciones, incluso permite crear a ellos mismos una población con las características que quieran. De esta forma se contribuye a la noción de generalidad del teorema, sin desmedro de que está solo quedará validada con la demostración formal.

Esta actividad potencialmente puede llevar también a introducir y revisar otros conceptos e ideas estocásticas: modelos de distribuciones de probabilidad, parámetros, estadísticos y estimadores, distribución muestral de un estadístico, introducir el concepto de error estandar, entre otras.

2.3.2 Secuencia didáctica

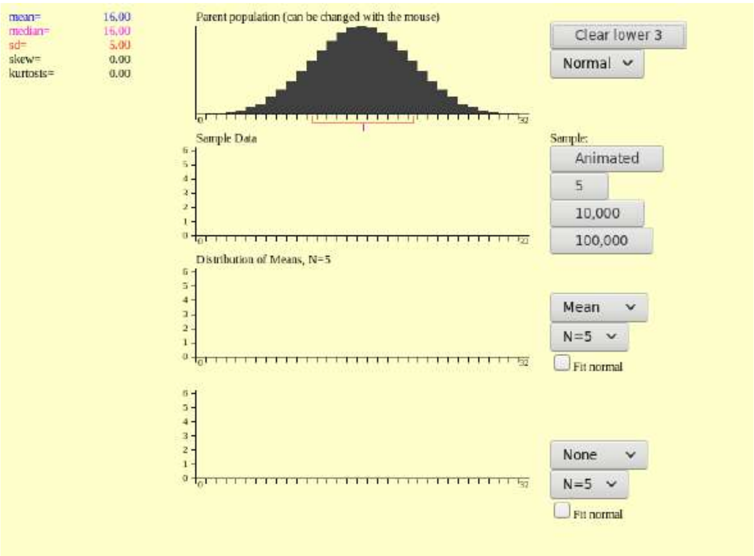
Se trabaja con el applet que podemos encontrar en la página: http://onlinestatbook/stat_sim/sampling_dist/index.html

Primera parte de la secuencia

Se trabaja en pequeños subgrupos cada uno con su computadora. Se entrega por sugrupo una lista de actividades que se detallan a continuación.

Actividad 1

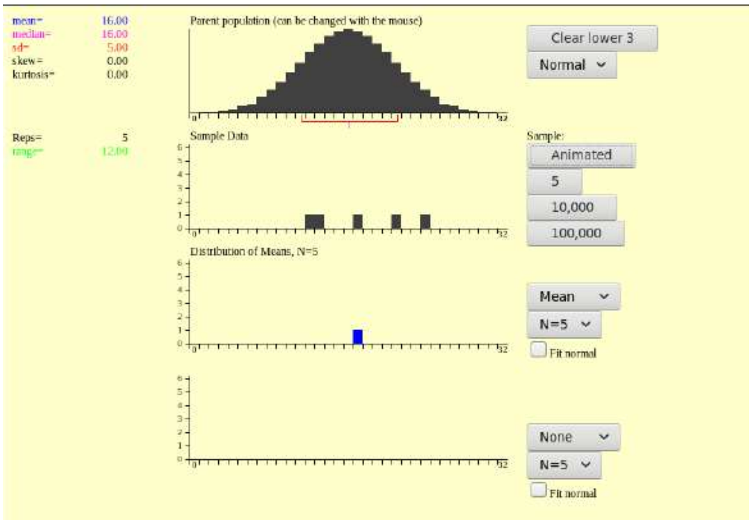
Entra a la página que se te ha dado y una vez ubicado en ella, apreta el boton que da inicio a la simulación "begin". De esta forma te aparecerá la siguiente imagen:



Verás que por defecto en el gráfico superior aparece la distribución de una población. Te pido que analices y describas las carácterísticas de la distribución presentada.

Actividad 2

Apreta el botón “animated” y podras observar que se extraerá aleatoriamente una muestra de cinco elementos de la población original. A partir de ellos aparece en el tercer gráfico otro valor (azul) ¿qué representa este nuevo valor? Comprueba con cálculos. Confirma realizando otras veces este procedimiento.



Actividad 3

Repite 100 veces el procedimiento que realizaste en la actividad 2. Puedes usar la opción que dice “5”, de esta manera se extraerán de forma simultánea 5 muestras de 5 elementos (o sea 5 veces la actividad 2). ¿Qué distribución se va construyendo en el tercer gráfico? ¿Analiza que carácterísticas puedes observar?

Actividad 4

Puedes observar que hay un botón que dice “10.000” ¿qué significa? ¿cuál es el procedimiento que realiza este botón?

a) Presiónalo y observa el tercer gráfico. Describe las características de esta distribución. ¿Tiene alguna característica similar a la de la población origina? ¿cuál o cuáles? ¿qué diferencias observas entre ambas distribuciones?
b) Repite varias veces este proceso de muestreo, ¿qué conclusiones podrías sacar?

Actividad 5
Repite las actividades de la 1 a la 4 pero cambiando la distribución de partida. El simulador te va a permitir hacerlo con una uniforme, una sesgada y finalmente una creada por ustedes mismos. Luego de trabajar con todas ellas realiza un pequeño informe y conclusión para compartir en la puesta en común.

Segunda parte de la secuencia

La segunda parte consiste en realizar una puesta en común donde cada subgrupo planteará sus conclusiones. El docente guiará la puesta en común en base a los cuatro aspectos significativos del TCL que plantea Alvarado y que se encuentran al inicio de cada apartado. A partir de ellos se dará comienzo al trabajo con el TCL, su historia, su enunciado y su demostración.

Ampliación de la actividad

Puede resultar por demás interesante, luego del trabajo con el TCL, retomar el trabajo con el applet y trabajar con otro estadístico. Se hace utilizando el cuarto gráfico por ejemplo con la mediana. Comparar la distribución muestral de la media y de la mediana puede ser muy rico, analizar sus centros y dispersiones, introduciendo la idea intuitiva de la bondad de un estimador. También permite trabajar con otras distribuciones muestrales que pueden dar lugar a nuevos y riquísimos debates, y desembocar en conceptos e ideas de probabilidad y estadística.

2.4. Evaluación
La evaluación se entiende como parte del proceso de enseñanza–aprendizaje, ésta enriquecerá tanto al estudiante como al trabajo del profesor. Se busca que la evaluación tenga potencial transformador para las prácticas e ideas de todos quienes participan en el proceso enseñanza-aprendizaje.
Se realizará una evaluación permanente y personalizada en cada instancia. En la parte de trabajo en subgrupos estaremos pendientes de los intercambios entre los integrantes, las discusiones que se den entre ellos y las dificultades que presenten, como forma de evaluar si la actividad está cumpliendo con los objetivos planteados.
La puesta en común también será otro momento clave en la evaluación. Por ello le pedimos la realización de un informe y conclusiones. De aquí se evaluarán no solo si se arribó al significado que buscábamos, sino la capacidad de fundamentar, el vocabulario, la evocación a otros conceptos de probabilidad y estadística que se vinculan a esta actividad, entre otras.
Finalmente luego de trabajar con el simulador, el teorema y su demostración se propondrán problemas en donde potencialmente se puede usar el teorema. La idea es que sean problemas abiertos en donde el teorema no esté explícitamente evocado. Pensamos que un concepto matemático se ha comprendido significativamente si se pone en juego por parte del estudiante a la hora de resolver problemas. Retomando la fundamentación didáctica, en palabras de Vinner, queremos evaluar si con esta actividad hemos favorecido a crear una imagen conceptual acorde

al concepto matemático en cuestión, y si esta es puesta en juego por el estudiante a la hora de enfrentar un problema, de determinar ejemplos y contraejemplos del teorema.

3. Proyección en líneas de investigación

Nos concentraremos en este apartado a describir posibles líneas de investigación que se desprenden de la temática planteada, en particular describiremos dos que nos parecen muy pertinentes. Este trabajo está formulado en el contexto de un concurso de efectividad para formador de formadores, por lo tanto, las líneas de investigación las plantearemos desde el ámbito de la educación, desde la enseñanza. Y tendrán como objetivo primordial mejorar las prácticas de enseñanza y los aprendizajes de la probabilidad y la estadística.

Antes de ir a las líneas concretas de investigación es necesario aclarar que tenemos una visión de la investigación en matemática educativa que coincide con la planteada por Ochoviet y Oktac (2010). Los autores plantean que los aportes de las investigaciones en educación matemática deben relacionarse dialécticamente con el conocimiento del profesor y sus prácticas de aula. Esto es, no nos planteamos una investigación desde fuera del ámbito educativo, sino por el contrario desde dentro a la par con todos los participantes involucrados. Los resultados de las investigaciones educativas tienen que sí o sí desembocar en una comunicación para todas las partes, de esta manera los resultados tendrán potencial transformador de las prácticas de enseñanza, mejorando así los procesos de enseñanza aprendizaje. Esto es cierto en todo contexto pero se profundiza en el contexto de la formación docente, en la medida que la investigación educativa pueda tener impacto en los estudiantes, tendrá impacto en los futuros educadores y por tanto en la educación del futuro.

Describiremos a continuación dos líneas de investigación educativa que se desprenden de este proyecto. Se plantean sobre las mismas brevemente algunos objetivos y los aspectos metodológicos con que las abordaríamos.

3.1. Qué significados atribuyen los estudiantes al TCL

No tenemos muchos estudios uruguayos sobre cómo se adquieren los conceptos vinculados con la probabilidad y la estadística en general, y en particular lo mismo ocurre en el caso del teorema central del límite. Por lo tanto, creemos que una de las primeras líneas que se desprende de este proyecto es investigar, qué significado atribuyen los estudiantes de formación docente a este teorema.

Para lograr este objetivo, nos planteamos como población de estudio los estudiantes de FD de todo el país, que ya tengan cursado y aprobado la asignatura de probabilidad y estadística. En principio se diseñaría un cuestionario para que éstos respondan (todos o una muestra), en una segunda etapa se realizarán entrevistas con algunos de estos estudiantes para conocer sus razonamientos más en profundidad.

En general, podemos afirmar que, la comprensión de los conceptos matemáticos se da si éstos son evocados como forma de resolver problemas matemáticos, tanto teóricos como prácticos. Propondríamos en el cuestionario de investigación, no preguntas directas del estilo ¿qué dice el TLC?, sino ciertos problemas, que nos permitan en base a la respuestas de los estudiantes, detectar qué significados ponen en juego. Se buscaría que los problemas propuestos tengan distintos y variados contextos, tanto matemáticos como extra matemáticos.

Luego de elaborado el cuestionario se realizaría su resolución a priori desde los significados institucionalmente aceptados por la comunidad matemática. De esta manera, tendríamos una base de cuáles son las respuestas que esperamos den los estudiantes.
Al aplicar el cuestionario y analizaremos los significados personales que los estudiantes ponen en juego a la hora de resolver los problemas en cuestión. Se analizarán similitudes y diferencias entre lo que se esperaba a priori que se responda y lo que efectivamente responden los estudiantes. Se hará énfasis en analizar si los estudiantes comprenden que pasa con la distribución de la suma de variables o de la media, de variables independiente e idénticamente distribuidas. Si comprenden que sucede con la media y con la desviación a medida que aumenta el número de casos. Una tercera instancia será la realización de entrevistas con algunos de los estudiantes que realizaron el cuestionario para profundizar en sus respuestas.

Se esperan obtener así resultados vinculados a cómo y qué entienden los estudiantes de FD sobre el teorema central del límite. Detectaremos posibles obstáculos epistemológicos que pueden darse en su enseñanza. Los resultados de esta investigación se traducirán en sugerencias didácticas para mejorar la comprensión significativa del teorema. La idea es que los resultados de esta investigación aporten a la didáctica de la probabilidad y la estadística en general, y a la enseñanza de convergencias en particular. Además se propondrán instancias de divulgación que favorezcan la transformación de los futuros docentes.

3.2. Cómo afecta en la enseñanza el uso de simuladores

De nuestro proyecto se desprende una segunda línea de investigación que es, si efectivamente el uso de simuladores puede ampliar el entendimiento que tienen los estudiantes del teorema, y su capacidad de aplicarlo en diferentes contextos.

El objetivo sería estudiar si el uso de simuladores como complemento del desarrollo formal del tema hace que los estudiantes comprendan de forma más significativa el teorema, si con esta metodología se minimizan los obstáculos en su comprensión. Se busca ver si podemos encontrar indicios de que, al decir de Vinner, la imagen conceptual del TCL se ha ampliado, si los estudiantes son capaces de detectar ejemplos y contraejemplos de una mejor manera.

Creemos que una forma de abordar esta investigación sería a través de trabajar en dos grupos de probabilidad y estadística en la órbita de formación docente, uno experimental y otro de control. Se elijarían dos grupos y junto con el profesor del curso se diseñarían dos propuestas de enseñanza, una que incluya simuladores y otra que no. Luego de enseñarlo se aplicaría un cuestionario con actividades al respecto para comparar resultados.

Referencias bibliográficas

Alvarado, H. (2007). S*ignificados institucionales y personales del teorema central del límite en la enseñanza de estadística en ingeniería.* Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

Alvarado, H. y Batanero, C. (2008). *Significado del teorema central del limite en textos universitarios de probabilidad y estadistica*. Estudios Pedagógicos, 34(2), 7-28. Universidad

Austral de Chile,Valdivia, Chile. Disponible en: https://scielo.conicyt.cl/pdf/estped/v34n2/art01.pdf

Batanero, C. (2001). *Didáctica de la estadística*. Grupo de Investigación en Educación Estadística. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Batanero, C. (2001). *Aleatoriedad, Modelización, Simulación*. X Jornadas sobre el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas, Zaragoza. Disponible en: http://www.ugr.es/~batanero/ARTICULOS/Jaem2001.pdf

Batanero, C. y Cañizares, M. J. (1998). *Azar y probabilidad. Fundamentos didácticos y propuestas curriculares*. Madrid, Síntesis.

Cholaquidis, A. (2015). *Notas para el curso de probabilidad II*. Probabilidad II. Licenciatura de Estadística. UdelaR, Uruguay.

De Olivera, F. (2008). *Introducción a la probabilidad (Notas de clase)*. Probabilidad y Estadística. Consejo de Formación en Educación, Uruguay.

Durá, J. M. y López, J. (1988). *Fundamentos de la estadística.* Barcelona, España: Ariel.

Fisher, H. (2000). T*he central limit theorem from Laplace to Cauchy: Changes in stochastic objetives and in analytical methods*. Disponible en: http://mathsrv.ku-eichstaett.de/MGF/homes/didmath/seite/1850.pdf

Mordecky, E. y Petrov, V. (2002). *Teoría de probabilidades.* Moscú, Rusia: URSS.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principals and Standards for School Mathematics*. USA: NCTM.

Ochoviet, C. y Oktaç, A. (*2011). Comprender los resultados de investigación: labor docente del investigador en la enseñanza de la matemática educativa*. In G. Buendía (Coord.), Reflexión e investigación en matemática educativa. México: Lectorum. p. 53-80.

Olesker, L. (2013). *Significados dados a la aletoriedad y la probabilidad en el contexto de la enseñanza media.* Tesis de Maestría. Universidad Nacional del Comahue.

Seneta, E. (1984). *The central limit problem and linear least squares in pre revolutionary Russia: The background.* Mathematical Scientist, 9, 37-77.

Tall, D. y Vinner, S. (1981). *Concept Image and Concept Definition in Mathe-matics with Particular Reference to Limits and Continuity.* Educational Studies in Mathematics, 12, pp, 151-169.

Tauber, L., Cravero, M. y Redondo, Y. (2013). *Generación de ideas estocásticas a través de la simulación.* En VII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática, Montevideo, Uruguay.

9789974877962