Estrechando lazos entre investigación y formación en Matemática Educativa

Experiencias conjuntas de docentes y futuros docentes

Compiladoras
Gabriela Buendía | Verónica Molfino | Cristina Ochoviet

Consejo de Formación en Educación
Departamento de Matemática

Estrechando lazos entre investigación y formación en Matemática Educativa

Experiencias conjuntas de docentes y futuros docentes

Compiladoras

Gabriela Buendía | Verónica Molfino | Cristina Ochoviet

Consejo de Formación en Educación

Departamento de Matemática

1ª edición: diciembre de 2014

Diseño de portada: Santiago Raía Scialó
Imagen de portada: Almendro en flor (Vincent van Gogh, 1890)

ISBN 978-9974-711-37-2

Por sugerencias o comentarios acerca del contenido de esta obra dirigirse a: depdematematica@gmail.com

ÍNDICE

PRESENTACIÓN

Vincent van Gogh pintó *Almendro en flor* en homenaje al nacimiento de su sobrino en el año 1890. Las ramas florecidas de este árbol son símbolo de la llegada de la primavera, anuncian lo nuevo, lo que renace. En varias leyendas aparecen hombres o mujeres que se metamorfosean en un almendro y es la presencia de las flores en sus ramas la que representa la vida humana que alberga en su interior.

Elegimos esta metáfora para representar lo desarrollado en este libro porque, además de ser una idea que surge en primavera, sentimos que a través de él estamos dando lugar a muchas cosas nuevas. En primer lugar, este libro reúne producciones que han sido elaboradas por profesores y estudiantes de la especialidad Matemática del Instituto de Profesores Artigas. Esta particularidad refleja un trabajar juntos, la posibilidad de dar lugar a lo nuevo desde el trabajo de clase de distintas asignaturas y sitúa tanto a docentes como a estudiantes en el plano de la creación compartida.

En segundo lugar, el libro da cuenta de que es posible pensar la enseñanza de la matemática mediada por los aportes de la investigación. La relación entre la práctica y la investigación continúa siendo un problema a resolver desde la comunidad de educadores matemáticos: ¿cómo lograr que el conocimiento creado desde la investigación enriquezca las prácticas de aula? Y asimismo, ¿cómo el conocimiento creado en la práctica puede retroalimentar lo producido en la investigación? Intentamos entonces aportar a esta relación tomando diversos resultados como referencia para, a partir de ellos, ensayar actividades de enseñanza y en algunos casos, experimentarlas en aula para luego reflexionar sobre lo sucedido y aprender de ese proceso. En otros, el trabajo teórico se realizó desde otro punto de vista: ¿cómo puede ayudarnos una perspectiva teórica para analizar prácticas de aula? Y también: ¿cómo puede modelarse teóricamente una práctica desde un cierto marco?

En tercer lugar, queremos destacar una idea que atraviesa todos los artículos, que es la conversación entre los integrantes de la comunidad, en este caso docentes y estudiantes, la que da lugar a lo producido. Esta producción puede ser fruto de una idea para resolver un problema, una conjetura a explorar, una manera de mirar una práctica, la emergencia de perspectivas de análisis de actividades para la enseñanza, entre otras posibilidades. Lo que deseamos jerarquizar entonces es una forma de crear que se asienta en el diálogo y, en consecuencia, en la comunicación bidireccional. Esta forma de hacer es la que también tratamos de promover entre nuestros estudiantes, futuros profesores, para sus clases en la enseñanza media.

Así, presentamos tres tipos de artículos que responden a diferentes necesidades suscitadas en el seno de la reflexión que docentes y futuros docentes realizamos sobre las prácticas de enseñanza. En primer lugar, incluimos dos artículos que muestran cómo, partiendo de un marco teórico particular dentro de la Matemática Educativa, se pueden elaborar actividades y analizar las producciones de estudiantes de profesorado al resolverlas

(*Infinito, límite de lo ilimitado* y *Una experiencia de actividad geométrica en la formación inicial de profesores de matemática*).

En segundo lugar, ubicamos tres artículos que responden a una práctica que hace a la labor docente, que es el diseño de actividades, enmarcadas, en este caso, en marcos teóricos específicos de la investigación en Matemática Educativa (*Diseño de actividades con uso de fotografía, Cuatro momentos en la evolución de la Matemática Educativa ejemplificados a través del concepto de periodicidad* y *El sentido de los símbolos y las actividades de enseñanza*). Por último, presentamos un artículo que brinda herramientas teóricas específicas para el análisis del discurso de aula, pretendiendo aportar a la reflexión sobre ¿Por qué damos un determinado tema de la manera en que lo hacemos? (*¿Por qué hacemos lo que hacemos en el aula? Análisis crítico del discurso de un profesor en torno al tema Trigonometría*).

Esperamos que este trabajo sea el primero de otros que seguramente vendrán para continuar aportando en este proceso de creación colectiva con el que queremos cristalizar, aunque sea parcialmente, nuestra forma de entender la enseñanza de la matemática.

Al igual que lo que ocurre en un almendro, los trabajos que aquí presentamos reflejan, como las flores que surgen en primavera, un proceso vivido durante todo el año. A la vez, la metáfora nos permite considerar que es posible que el almendro se ramifique y continúe floreciendo en los años venideros.

Noviembre 2014,

Gabriela Buendía, Verónica Molfino, Cristina Ochoviet

INFINITO, LÍMITE DE LO ILIMITADO

SOFÍA ACOSTA, GABRIELA FIGARES, VICTORIA LÓPEZ,

VICTORIA MESA, VERÓNICA MOLFINO, FLORENCIA RIVERO

(Contando)… «29, 30, 31… ¿verdad que no hay un último número?»
(Gerónimo, 4 años)

«Infinita como los números (piensa dos segundos). ¡No! ¡Más infinita que los números! (piensa otros dos segundos). No, no puede ser más infinita porque no hay un infinito más grande que otro infinito. »
(Julieta, 6 años)

INTRODUCCIÓN

El presente trabajo parte de un proyecto de investigación que tiene por objetivo explicitar cómo conviven diferentes concepciones de infinito en estudiantes de la carrera de Profesorado de Matemática del Consejo de Formación en Educación.

Pretendemos analizar además de la idea de infinito que crearon los estudiantes a partir de los cursos de matemática que han tenido en su educación formal, la concepción de infinito que deriva de lo cotidiano y que también influye en la imagen que se crea del concepto.

Partimos de la hipótesis de que conviven en las personas y en los centros educativos, dos concepciones de infinito: uno *no académico* y otro *académico* (Lestón y Crespo Crespo, 2010). El infinito no académico es de carácter intuitivo y surge fuera de la escuela para adjudicar a todo aquello que no se puede calificar como "mucho" o "muy grande". Es lo que excede a todo lo que es cuantificable, es además una extensión del amor, del deseo, de la fe (Lestón, 2011a). Por otro lado, "hay una ruptura entre lo que los estudiantes entienden por infinito y lo que los docentes creen que están entendiendo o necesitan que sus alumnos entiendan." (Lestón y Crespo Crespo, 2010, p. 880). Ese "otro" infinito tiene una génesis académica.

Es por ello que fue necesario abordar la temática desde una perspectiva que permitiera estudiar la tríada docente-estudiante-saber contemplando la dimensión social en la cual está inmersa y que resignifica cada una de sus dimensiones. Esta es la perspectiva socioepistemológica, la cual es utilizada por Lestón (2011 a y b) como marco teórico. Utilizamos esa investigación como antecedente que nos permite explicar la convivencia de diferentes concepciones en el colectivo de estudiantes a partir de la consideración de un modelo de prácticas, constructo desarrollado por Montiel (2011) en el marco de la Socioepistemología.

Creemos que a partir de este análisis podremos reflexionar sobre nuestro discurso de aula, en particular en lo que hace a la concepción de infinito que transmitimos como docentes, generando herramientas para pensar en posibles alternativas.

MODELO DE PRÁCTICAS

Montiel (2011) propone un modelo que articula prácticas sociales, prácticas de referencia y actividades para explicar la construcción del conocimiento matemático (Figura 1).

Según explica Montiel (2011), una *actividad* es explícita y se observa en los individuos y grupos humanos; el conjunto articulado de actividades intencionales que siguen un propósito específico enmarcadas en un paradigma específico se denomina *práctica de referencia*; finalmente, la *práctica social* se asume como la práctica normativa de la actividad humana, aquello que hace que los individuos o grupos hagan lo que hacen (Covián, 2005).

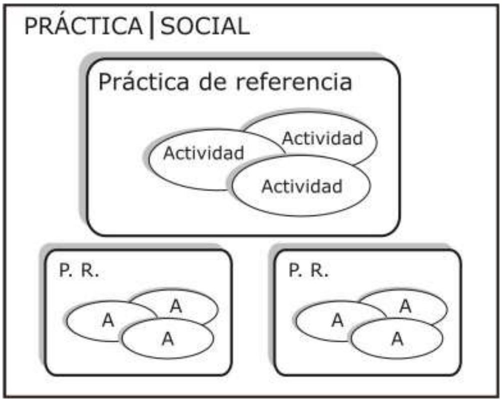


Figura 1. Modelo epistemológico de prácticas

Ahí radica una de las principales distinciones teóricas del enfoque socioepistemológico:

> (…) se pretende explicar los procesos de construcción, adquisición y difusión del saber con base en prácticas sociales. En sus investigaciones, los socioepistemólogos reportan más bien caracterizaciones del ejercicio de las prácticas que anteceden a la producción o construcción de conceptos y al desarrollo del saber. (Cantoral, Farfán, Lezama, Martínez Sierra, 2006, p. 85).

Por otra parte, retomamos de Espinoza (2009) el constructo contexto de significación: "El *contexto de significación* de cierto conocimiento es el ámbito en el cual cierta persona o colectivo sitúa la significación de cierto conocimiento en cierto escenario sociocultural." (p. 150).

UNA EPISTEMOLOGÍA DE PRÁCTICAS EN TORNO AL CONCEPTO DE INFINITO

En Lestón (2011b) se reconocen dos grandes concepciones en torno al concepto de infinito que se han manifestado en la historia de su desarrollo: por un lado el infinito de los conjuntos, por otro, el infinito del espacio. Uno representa la necesidad de contar elementos, el otro, de entender el movimiento. Uno es estático y entiende al infinito como lo que ya está acabado o bien no puede ser representado por cantidades finitas. El otro es dinámico y permite explicar la posibilidad de continuación ilimitada de un proceso. Con esas dos miradas fue posible reconocer dos prácticas sociales que llevaron a la emergencia del infinito como concepto científico: la aritmetización de las cantidades por un lado, y la geometrización del espacio por otro.

Sin embargo, consideramos que la complejidad del concepto radica en que aún con esta descripción de las dos concepciones de infinito, que resulta tan rica por la consideración de las prácticas involucradas en su génesis y desarrollo, ambas permanecen profundamente relacionadas. Por ejemplo, cuando un niño piensa en la cantidad de números naturales que existen, es probable que llegue a la conclusión de que "son infinitos porque siempre puedo encontrar otro más grande". Es decir que aún regido por la práctica de contar (que podemos asociar con la aritmetización de cantidades), surge una concepción dinámica, de un proceso, y no la acabada o estática que según la caracterización anterior correspondería. Otro ejemplo en el sentido contrario puede constituirlo el "Aleph" considerado por Borges (ejemplo que se discute en profundidad en Franco y Ochoviet, 2006), pequeña esfera en la que estaría comprendido todo el espacio (correspondiente a una concepción estática, acabada del infinito), que surge en la búsqueda por explicar aspectos relativos a la geometrización del espacio.

Analizar las prácticas que dieron origen y normaron la construcción de estas concepciones en diferentes contextos de significación puede aportar a esclarecerlas.

En una primera instancia el infinito surge exclusivamente como una noción filosófica o religiosa, como una propiedad asignada al espacio pero no como un elemento. Uno de los primeros registros que se tienen sobre discusiones en torno al concepto proviene de Grecia, ya en el siglo V a.C. se cuestionan sobre la posibilidad o no de realizar adiciones sucesivas sobre algo, en forma indeterminada. Zenón es uno de los primeros en enfrentarse con dicha inconsistencia al plantear su ya conocida paradoja de Aquiles y la tortuga.

En el siglo XVII ubicamos a Isaac Newton cuya obra ha sido de gran importancia para el concepto en cuestión. Se ocupaba de concebir y medir el movimiento, estudiando principalmente lo que hoy llamamos análisis matemático. Newton necesitaba quitar los límites para explicar el movimiento, es por esto que aquí el análisis matemático aparece como contexto de significación (el estudio de las curvas). Vale destacar que compartía con Nicolás de Cusa (siglo XV) que la extensión del espacio era infinita.

El infinito concebido por Newton y los autores de la época es el que Lestón (2011a y b) caracteriza como geométrico, físico, dinámico y también el que Garbin y Azcárate (2002) y Hitt (2003) denominan *infinito potencial*. Dicho infinito se obtiene mediante procesos que no involucran al infinito en su totalidad, sino como un infinito que aparece como posibilidad y que se va realizando progresivamente (Franco y Ochoviet 2006). Entendemos que la práctica social asociada a dicha concepción de infinito es la geometrización del espacio, la práctica de referencia es la matematización del mismo (concebir el movimiento, medirlo), y el contexto de significación, el estudio de curvas (análisis matemático actual) (Lestón, 2011b).

Contemporáneamente a Newton, Joseph Raphson realiza una justificación axiomática de que el espacio es infinito, logrando así un avance en el proceso de matematización del mismo. En el siglo XVIII, si bien Bolzano no propone una definición de infinito matemático, propone críticas a las definiciones existentes que favorecen el desarrollo del concepto.

Así se va conformando otra construcción del infinito que se basa en las cantidades, y es la que hoy encontramos (o creemos encontrar) en la educación superior. Esa construcción es la realizada en el siglo XIX por Georg Cantor, quien replantea la modelización del universo, pero no ya desde cuestiones relativas a la física sino a las cantidades, favorecido por un cambio en la práctica social que norma las actividades de la época.

Con Cantor, el proceso potencialmente infinito en sus orígenes, se considera ahora acabado, y los límites alcanzados (Lestón, 2011b). El matemático puede hoy trabajar con el conjunto de todos los números, sin tener la necesidad de nombrar o pensar en cada uno de ellos individualmente. A esta caracterización que hace Lestón, le asignamos el infinito que Garbin y Azcárate (2002) y Hitt (2003) denominan *infinito actual*.

Cantor logra la aritmetización de las cantidades infinitas, construyendo la noción de infinito que responde a cantidad, cardinalidad. A este se lo entiende como el infinito del álgebra, es por eso que el *álgebra* aparece como el contexto de significación, la matematización de las cantidades como la práctica de referencia (contar cantidad de elementos, enumerar). La práctica social que genera esta concepción de infinito es la aritmetización de la cantidad.

ASPECTOS METODOLÓGICOS

Se diseñó y aplicó un cuestionario a 32 estudiantes de Profesorado de Matemática del Instituto de Profesores Artigas y del Profesorado

Semipresencial. Todos los estudiantes que lo completaron tenían cursada la asignatura Análisis I (de segundo año de la carrera) o estaban culminando de cursarla, condición que consideramos necesaria ya que algunas actividades tienen como contexto algunos de los temas abordados en dicha asignatura. Con el fin de contrastar las producciones que pudieran evocarse en un contexto de significación escolar versus el no escolar, requerimos que los estudiantes tuvieran alguna aproximación desde el ámbito escolar en el nivel superior.

En ese sentido, las dos primeras actividades no tenían un contexto definido, pudiendo el estudiante contestar evocando frases o argumentos de contexto extra o intramatemático, mientras las últimas tres fueron diseñadas explícitamente en contextos intramatemáticos. A continuación describimos cada actividad.

Actividad I

Escribe tres frases (con respecto a cualquier tema, matemático o no) que contengan la palabra *infinito*.

Esta actividad tiene por finalidad indagar si los estudiantes evocan frases que contienen la palabra infinito dentro de un contexto extra o intramatemático y en particular, en los casos en los que fuera pertinente, explicitar el contexto de significación subyacente (considerando al infinito en un contexto de distancia o en uno de cantidad). Además, se busca identificar qué prácticas de referencia estarían influyendo sobre la selección de dichas frases y finalmente, qué concepción de infinito está implícita en cada una de ellas.

Se deja explícitamente liberada al estudiante la selección del contexto para poder analizar si existe algún vínculo entre la práctica de referencia que influye en la selección de la frase, el contexto de significación y la concepción de infinito implícita.

Actividad II

Una de las nociones comunes de los Elementos de Euclides es "El todo es mayor que sus partes".
¿Estás de acuerdo con esa noción común? Justifica ampliamente.

En este caso, al igual que en el anterior, el contexto no está previamente determinado en la propuesta, con el fin de indagar sobre el contexto seleccionado para formular los *argumentos* expuestos (ya no frases sueltas).

Podrían darse varias respuestas a esta actividad: por un lado una respuesta afirmativa con un argumento que no involucre al infinito, por lo tanto se estaría pensando desde una concepción finitista. También se podría contestar en forma afirmativa, con argumentos que denoten una concepción potencial del infinito; y finalmente se podría contestar en forma negativa, desde la consideración del infinito actual. También se indaga si a la interna de cada respuesta, la misma es coherente con el tipo de argumento que se presenta.

Este análisis brindaría herramientas para concluir si el estudiante responde desde una concepción newtoniana o cantoriana o si esta respuesta no nos informa acerca de su concepción de infinito.

Actividad III

Consideramos los siguientes conjuntos:

A = $\{n^2$, n pertenece a N$\}$, N, Z, R y Q.

a. Ordena dichos conjuntos según su cardinal. Justifica.

b. ¿Cómo explicarías dicho orden a un alumno de educación media?

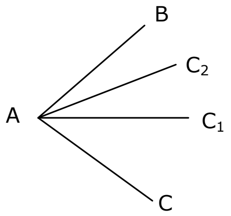
c. Piensa nuevamente sobre la noción común “El todo es mayor que las partes”. ¿Sigues pensando lo mismo?

Esta actividad fue diseñada en un contexto intramatemático, con una invitación a repensar sobre la actividad anterior, ahora desde otro contexto. Específicamente, el contexto de significación desde el cual se aborda la actividad es el álgebra. El motivo por el cual se piden explicaciones en las partes *a* y *b* de un mismo hecho, es para analizar si el estudiante maneja diferentes concepciones en instancias personales de convencimiento que en una instancia en la que tiene que dirigirse a otro público con una formación diferente a la de él, específicamente alumnos de enseñanza media.

Se pretende indagar cómo convive en el sujeto aquello que argumenta porque lo aprendió de ese modo, en forma escolarizada, con una concepción desde lo extramatemático, no académico, que eventualmente pudo haber evocado en la actividad II.

Actividad IV

La siguiente figura representa dos segmentos de igual medida: AB y AC. La amplitud del ángulo CAB es β.



C_1 es la imagen de C en la rotación de centro A y ángulo $\frac{\beta}{2}$ (en sentido antihorario).

C_2 es la imagen de C_1 en la rotación de centro A y ángulo $\frac{\beta}{4}$ (en sentido antihorario).

C_3 es la imagen de C_2 en la rotación de centro A y ángulo $\frac{\beta}{8}$ (en sentido antihorario).

Se continúa con este procedimiento indefinidamente, ¿crees que es posible que C_δ coincida con B? Explica.

El contexto de significación de esta actividad es el análisis matemático, entendido en el sentido en que lo plantea Lestón (2011b). Consideramos que esta actividad invita a que las respuestas se den desde una concepción potencial, evocando las propiedades reforzadas desde su experiencia escolar: "entre dos números reales siempre existe otro" y "entre dos puntos en una circunferencia, existe otro". Justamente por eso permite detectar a los estudiantes que, habiendo respondido con una concepción actual en anteriores actividades, se mantienen fieles a ella o presentan concepciones contrapuestas en esta.

Si el estudiante responde de acuerdo a la idea que mencionamos anteriormente, es decir que no coinciden porque entre dos reales siempre existe otro número real, entendemos que podría estar contestando desde una concepción potencial; si el estudiante responde que considerando δ como infinito, C_δ coincide con B, entonces estaría contestando desde la concepción de infinito actual; y finalmente si responde que existe un valor real de δ para el cual C_δ sea igual a B, estaría respondiendo desde una perspectiva finitista del concepto de infinito.

Actividad V

¿Cuánto da la siguiente suma?

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\ldots$$

La actividad fue planteada con el objetivo de comprobar cómo tareas que son tradicionalmente propuestas en el curso de Análisis I y enmarcadas en el contexto de significación del álgebra, se contestan desde una concepción actual del infinito. A diferencia de la anterior, esta actividad "invita" a responder desde una concepción actual, por lo que permite detectar la convivencia de diferentes concepciones de infinito en aquellos estudiantes que en las anteriores actividades hubieran respondido desde una concepción potencial.

ANÁLISIS DE ALGUNAS RESPUESTAS

Reflexionamos en este apartado sobre algunas de las respuestas obtenidas mediante la aplicación del cuestionario a estudiantes del Profesorado de Matemática del Instituto de Profesores Artigas y del Profesorado Semipresencial. Estas reflexiones versan, en primer lugar, sobre el objetivo planteado: explicitar cómo conviven diferentes concepciones de infinito en estudiantes de la carrera de Profesorado de Matemática. Pero también destacamos algunos puntos que consideramos interesantes en relación a los antecedentes que utilizamos para el trabajo (Lestón, 2011 a y b).

Veamos ejemplos de la convivencia de las distintas concepciones del infinito: uno de los estudiantes responde las actividades desde la concepción actual del infinito, excepto la actividad IV que lo hace desde la concepción potencial. Lo significativo es que en la actividad V, al terminar el cuestionario, escribe: "*¡Viendo esto creo que contesté mal la anterior!*". Incluso el sujeto percibe que lo que responde en esta actividad no es coherente con lo que respondió en la actividad anterior, es decir, no está respondiendo con el mismo criterio ambas actividades. Otro estudiante, por su parte, responde las actividades III y IV desde la concepción potencial y ante la actividad V entra en conflicto, ya que responde: "*Si digo que da 1, me contradigo con lo que dije antes, así que mi respuesta es que no sé cuánto da esa suma*". Observamos que ambas concepciones del infinito conviven en el sujeto pero para evitar ser incoherente con sus respuestas, intenta evadir la respuesta que considera correcta. En este caso es muy probable que influya en él el hecho de que la actividad V es tradicionalmente propuesta en contexto escolar, por lo que ya conoce la respuesta considerada correcta.

Otro ejemplo lo presenta otro estudiante, quien en la actividad II deja ver su conocimiento de la existencia de distintos tipos de infinitos, interiorizados tal vez desde el ámbito escolar, pero el hecho de que un conjunto esté contenido en otro se presenta como un obstáculo para reconocer que tienen igual cantidad de elementos. Sostiene que un segmento y una recta tienen la misma cantidad de puntos, pues "*puedo establecer una biyección entre ambos*". Seguidamente agrega: "*Sin embargo el segmento al estar incluido, y en la inclusión estricta, la recta tiene más elementos que el segmento. Este es otro punto de vista. Por esto es que hay varios tipos de infinitos*". Consideramos interesante no solo que el estudiante presenta contradicciones en una misma respuesta, sino que estas contradicciones se generan a raíz de las distintas concepciones de infinito que conviven en él. De hecho, al decir "*este es otro punto de vista*", creemos que avala la existencia y convivencia de ambas posturas. Vemos cómo las mismas fueron incluidas en su formación e institucionalizadas.

Por otro lado, el análisis de las respuestas de los estudiantes nos condujo a diversas reflexiones en torno a lo propuesto por Lestón (2011a y 2011b) y Lestón y Crespo Crespo (2010). Una de ellas es que no solamente conviven las concepciones actual y potencial, que son las que esperábamos encontrar, sino que también hay estudiantes que poseen una concepción *finitista* del infinito, evocada en al menos uno de los contextos en los que se proponen las actividades: intra o extramatemático, principalmente en este último, en particular cuando se les pide que escriban frases con la palabra *infinito* (Actividad I). Cuando en estas frases se utiliza la palabra infinito como sinónimo de número muy grande, lo consideramos finitista. Por ejemplo, algunos estudiantes escribieron la frase "*Te lo dije infinitas veces*".

Otra de las reflexiones se vincula con el hecho de que en las investigaciones mencionadas, se asocia la práctica social de aritmetización, que vive en un contexto de significación del álgebra, con la concepción actual de infinito, en el sentido en que lo presenta Hitt (2003). Sin embargo, algunas respuestas de los estudiantes evidencian que esto no es necesariamente cierto, especialmente las respuestas a las actividades I y II, en las que se habilita a responder en contextos extramatemáticos e incluso fuera de ámbitos escolares, pero también en las otras respuestas, en las que el contexto de significación estaba dado por el enunciado (y por lo tanto la práctica social asumida como normativa de su resolución) y eran planteadas en un contexto intramatemático. Lo mismo ocurre con la práctica social de geometrización y la concepción potencial.

Por ejemplo, un estudiante responde en la actividad IV desde una concepción actual del infinito, a pesar de que la misma fue pensada para que sea contestada desde la concepción potencial del infinito por tener como contexto de significación el estudio de las curvas y como práctica social supuestamente normativa de la resolución la geometrización del espacio. Plantea que si se considera δ como infinito, C_δ y B coinciden.

En la actividad V, dos estudiantes afirman que la suma tiende a uno, y no que *es* uno, dando a entender que la concepción de infinito que están evocando es la potencial, a pesar de que el contexto de significación que está en juego en la actividad sea el álgebra. Otros estudiantes dicen que esa suma da infinito, respondiendo también desde una concepción potencial (algo así como "si se suman infinitos términos, siempre hay un poco más, por eso el resultado de la suma es infinito").

Por otro lado, en la actividad I, en la cual podían evocar concepciones de infinito extramatemáticas y externas al ámbito escolar, se detectaron algunas respuestas que no pudieron asociarse directamente con uno u otro contexto de significación. Estas eran las referidas a la expresión de sentimientos, en contextos externos al escolar. Tampoco las consideramos producto de la influencia de una práctica de referencia determinada, sino que algunas podían asociarse con una y otras con otra.

Entendemos que este tipo de respuesta tienen cabida porque hay entidades no cuantificables numéricamente pero para las cuales se puede usar al infinito como un adjetivo que caracterice lo que alguien siente aplicando ese adjetivo a tal entidad. Por ejemplo, la frase "*Te quiero infinito*", escrita por varios de los encuestados, puede asociarse con una concepción potencial, ya que estaría haciendo referencia a que siente que "siempre se puede querer un poco más". Pero la frase "*Te quiero hasta el infinito*", podría pensarse que tiene una concepción actual, ya que concibe al infinito no como proceso sino como un todo acabado, que sirve como referencia espacial. En el primer caso, la práctica de referencia sería la matematización de las cantidades, lo que refuerza nuestra conclusión anterior acerca de que esta práctica de referencia no necesariamente tiene que ir de la mano de una concepción actual del infinito. En el segundo caso, la práctica de referencia es la matematización del universo, ya que se concibe al infinito como un lugar, nuevamente vemos que esta no tiene por qué ir biunívocamente relacionada con la concepción potencial.

Otro aspecto a considerar es cómo dependiendo de la práctica de referencia que norme la actividad se valida o no un procedimiento. Por ejemplo, un estudiante responde en la actividad IV: "*No es posible ya que siempre divido el ángulo a la mitad y nunca coincide ya que siempre puedo dividir el ángulo a la mitad*", mientras que en la actividad V, para decir que la suma planteada es uno, realiza un círculo que representa la unidad, y luego lo va completando. Aquí nos surgieron las preguntas: ¿qué diferencia hay entre esta representación y la de la actividad anterior?, ¿por qué en la última se valida que se llegue a completar la unidad y en la anterior no? En la actividad V responde a través del mismo procedimiento utilizado en la actividad anterior, pero al estar bajo la influencia de la práctica de referencia de la matematización de la cantidad, este procedimiento es aceptado. Mientras que en la actividad IV, donde la práctica de referencia predominante es la matematización del espacio, no es aceptado.

En el mismo sentido, otro estudiante, en la actividad IV plantea que: "*no es posible que, mediante bisecciones de un ángulo,* $C_\delta=\beta_\delta$ *con* $\delta\rightarrow+\infty$ *coincida con B*". Inmediatamente escribe: "*Sin embargo, si fuera posible definir estas bisecciones como una función,* $C_\delta=\beta_\delta$ *con* $\delta\rightarrow+\infty$*, en teoría sería posible que* C_δ *coincida con B*". Si la práctica de referencia es la geometrización del espacio, el estudiante concibe al infinito como un proceso que no tiene fin. Pero bajo la matematización de las cantidades, lo concibe como un proceso acabado, un objeto en sí mismo, que podría (igualmente habla en potencial) tener fin.

REFLEXIONES FINALES

El concepto de infinito vive de forma implícita en nuestras aulas pero es raramente explicitado en el discurso de aula, libros de texto o programas. Pretendemos con este artículo brindar herramientas para problematizar tal concepto: reconocer y entender las diferentes concepciones que presentan los estudiantes, en particular de Profesorado de Matemática. Y, de esa manera, favorecer la discusión en la comunidad escolar sobre cómo debiera enseñarse un concepto tan complejo como el de infinito.

REFERENCIAS

Cantoral, R., Farfán, R., Lezama, J. y Martínez Sierra, G. (2006). Socioepistemología y representación: algunos ejemplos. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, *Número especial*, 83-102.

Covián, O. (2005). *El papel del conocimiento matemático en la construcción de la vivienda tradicional. El caso de la cultura maya*. Tesis de maestría no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Espinoza, L. (2009). *Una evolución de la analiticidad de las funciones en el siglo XIX. Un estudio socioepistemológico*. Tesis de maestría no publicada. CINVESTAV del IPN, México.

Franco, G. y Ochoviet, C. (2006). Dos concepciones acerca del infinito. El infinito actual y el infinito potencial. En G. Martínez Sierra (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 19,* 509-513. México Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A.C.

Garbin, S. y Azcárate, C. (2002). Infinito actual e inconsistencias: acerca de las incoherencias en los esquemas conceptuales de alumnos de 16-17 años. *Enseñanza de las ciencias*, 20 (1), 87-113.

Hitt, F. (2003). El concepto de infinito: obstáculo en el aprendizaje de límite y continuidad de funciones. En Filloy, E. (Ed), *Matemática Educativa. Aspectos de la investigación actual*, 91 - 111. México: Fondo de Cultura Económica.

Lestón, P. (2011a). Concepciones del espacio geométrico y su relación con el infinito. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana* *de Matemática Educativa 24*, 853-861. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Lestón, P. (2011b). *El infinito en el aula de matemática. Un estudio de sus representaciones sociales desde la socioepistemología*. Tesis de Doctorado no publicada. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN. México.

Lestón, P. y Crespo Crespo, C. (2010). El infinito matemático: la escuela, Cantor y Bolzano. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 23*, 879-888. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Montiel, G. (2011). *Construcción de conocimiento trigonométrico. Un estudio socioepistemológico*. México: Ediciones Díaz de Santos.

UNA EXPERIENCIA DE ACTIVIDAD GEOMÉTRICA EN LA FORMACIÓN INICIAL DE PROFESORES DE MATEMÁTICA

MARIO DALCÍN, ÁLVARO ROSA

INTRODUCCIÓN

Se atribuye a Benjamín Franklin (1706-1790) la máxima "*Man is a tool-making animal*", es decir "los seres humanos son animales que fabrican herramientas". En este artículo discutiremos la importancia de una herramienta tecnológica -el software de Geometría Dinámica (GD)- y de una herramienta teórica -los paradigmas geométricos-, ambas importantes para repensar el conocimiento geométrico -específicamente la geometría euclidiana- y repensar su enseñanza y aprendizaje en la formación inicial de profesores de matemática de enseñanza media.

LA HERRAMIENTA TECNOLÓGICA

La frase anterior de Franklin da inicio al libro *El paradigma del laberinto* (2012) del pensador uruguayo Juan Grompone, de donde tomaremos algunas ideas que compartimos plenamente y nos sirven como marco general para pensar este trabajo.

> El Universo que se puede conocer a ojo desnudo estaba acabado con la obra de Tycho Brahe (1546-1601) y de Johannes Kepler

> (1571-1630). Las medidas de Tycho realizadas en su observatorio de *Uraniborg* habían conducido a las cuatro leyes del movimiento planetario de Kepler, nada más se podía hacer a menos de perfeccionar la visión humana. El salto ocurrió con Galilei y su telescopio. Un nuevo instrumento de observación prolongaba la capacidad de explorar el universo y condujo directamente al sistema planetario de Newton. (p. 83)

Parafraseando la cita anterior, sostenemos que el conocimiento en el ámbito de la geometría euclidiana había alcanzado un techo hasta que surgieron los software de GD a principios de los años 80. ¿Cuáles habían sido las herramientas usadas hasta ese momento? Básicamente lápiz, papel, regla, semicírculo y el conocimiento de lo ya producido en el campo. Si en vez de papel los griegos hubieran hecho sus figuras sobre la arena poco cambiaría. Con la creación de los software de GD se perfecciona la herramienta: ahora en vez de papel las representaciones de las figuras se hacen sobre una pantalla, en vez de regla y semicírculo los software tienen incorporados la posibilidad de medir segmentos y ángulos y de manera bastante más precisa de lo que se podía hacer con las viejas herramientas.

La GD posibilita además la construcción de figuras que en realidad son una familia de figuras: si en lápiz y papel necesitábamos construir dos situaciones debíamos recurrir a dos representaciones distintas, en la GD mediante una misma construcción tenemos infinitas situaciones.

La nueva herramienta posibilitó un resurgimiento de la geometría euclidiana. Algunos resultados pueden verse en línea en la Revista Forum Geometricorum (http://forumgeom.fau.edu/).

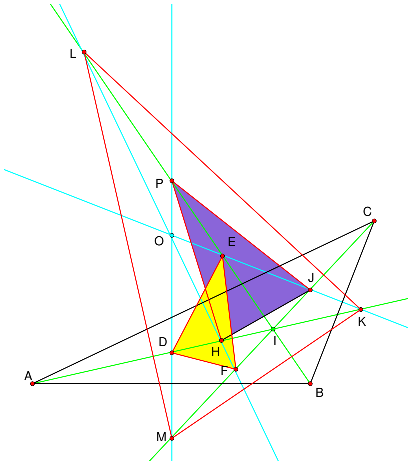
CONJETURAS EN TORNO A TRIÁNGULOS DETERMINADOS POR MEDIATRICES Y BISECTRICES DE UN TRIÁNGULO

Las conjeturas que siguen tuvieron su origen en una lectura de Álvaro de la presentación que aparece en un artículo de Mario (Dalcín, 2012) en la 2ª Conferencia Latinoamericana de GeoGebra:

ABC es un triángulo de circuncentro O e incentro I. Se consideran los triángulos DEF, HPJ, KLM según el cuadro siguiente:

$\cap$	Mediatriz AB	Mediatriz BC	Mediatriz CA
Bisectriz A	D	K	H
Bisectriz B	P	E	L
Bisectriz C	M	J	F

Una figura -hecha en *The Geometer's Sketchpad*- acompaña el enunciado:



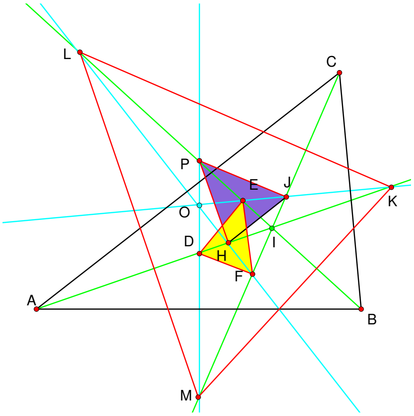
La lectura motivó un intercambio de mensajes electrónicos y algunas horas de reunión que dieron origen a nuevas conjeturas.

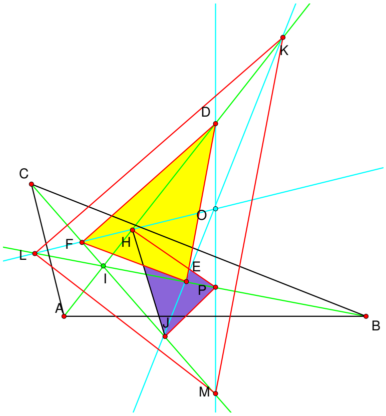
Ya se había observado cierta similitud entre los tres triángulos DEF, HPJ, KLM considerados. De dicha observación surgió natural la pregunta en torno a si dichos triángulos eran semejantes.
Midiendo sus ángulos tenemos:

$$m\angle EDF = 76{,}89^{o} \quad m\angle PHJ = 76{,}89^{o} \quad m\angle LKM = 76{,}89^{o}$$
$$m\angle FED = 35{,}02^{o} \quad m\angle JPH = 35{,}02^{o} \quad m\angle MLK = 35{,}02^{o}$$
$$m\angle DFE = 68{,}09^{o} \quad m\angle HJP = 68{,}09^{o} \quad m\angle KML = 68{,}09^{o}$$

Y las igualdades entre los ángulos se mantienen bajo arrastre del triángulo ABC: estamos entonces frente a una verificación de una propiedad usando la herramienta de medición de ángulos que tiene el software de GD.

Arrastrando la figura dinámica se observa que no es posible conseguir que los triángulos DEF, HPJ y KLM sean rectángulos u obtusángulos -después de lo verificado empíricamente antes alcanza con observar uno solo de estos triángulos-.





A partir de lo anterior surgió la pregunta acerca de si es posible vincular la medida de los ángulos de los triángulos DEF, HPJ, KLM con la medida de los ángulos del triángulo ABC.

$$m\angle EDF = 38{,}10^{\circ} \quad m\angle PHJ = 38{,}10^{\circ} \quad m\angle LKM = 38{,}10^{\circ}$$
$$m\angle FED = 79{,}20^{\circ} \quad m\angle JPH = 79{,}20^{\circ} \quad m\angle MLK = 79{,}20^{\circ}$$
$$m\angle DFE = 62{,}70^{\circ} \quad m\angle HJP = 62{,}70^{\circ} \quad m\angle KML = 62{,}70^{\circ}$$

$$m\angle CAB = 103{,}81^{\circ}$$
$$m\angle ABC = 21{,}60^{\circ}$$
$$m\angle BCA = 54{,}59^{\circ}$$

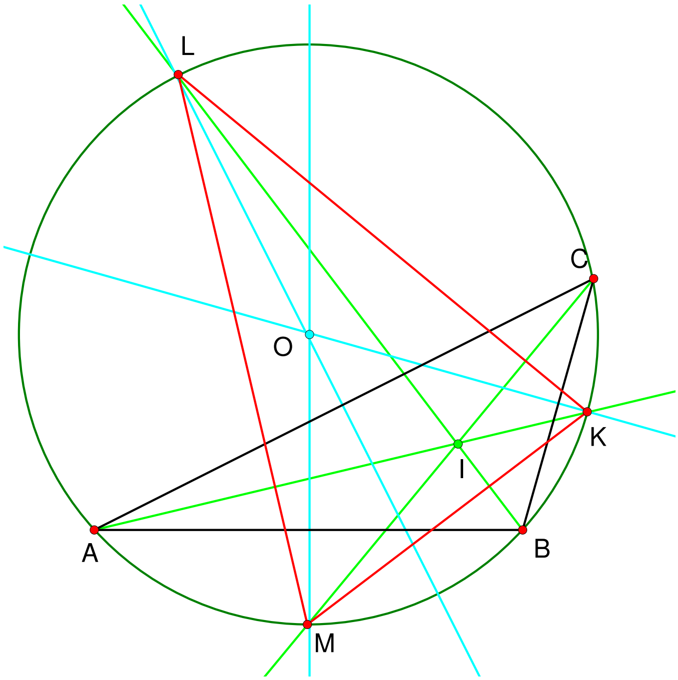
$$\frac{m\angle ABC + m\angle BCA}{2} = 38{,}10^{\circ}$$
$$\frac{m\angle BCA + m\angle CAB}{2} = 79{,}20^{\circ}$$
$$\frac{m\angle CAB + m\angle ABC}{2} = 62{,}70^{\circ}$$

Entre las conjeturas de Álvaro se encuentran:

- los vértices de los triángulos KLM y ABC pertenecen a la circunferencia circunscrita al triángulo ABC;
- los lados del triángulo KLM son perpendiculares a las bisectrices del triángulo ABC;
- los ángulos del triángulo KLM son iguales a los ángulos entre las bisectrices del triángulo ABC;
- los ángulos que forman las mediatrices del triángulo ABC son iguales a los ángulos del triángulo ABC;
- los ángulos del triángulo KLM son iguales al promedio de dos de los ángulos del triángulo ABC, o lo que es lo mismo, iguales a

(180º - tercer ángulo del triángulo ABC)/2, por ejemplo: KML = (CAB + ABC)/2 o KML = (180º - BCA)/2;

• si usamos la misma construcción que hicimos para obtener el triángulo KLM al mismo triángulo KLM y así sucesivamente, se tiende a un triángulo equilátero.



LA HERRAMIENTA TEÓRICA

Así como algunos se resistieron a mirar por el telescopio de Galileo alegando que era un instrumento del diablo y con ello buscaban negar todo lo que se viera a través de él, desde que la GD existe ha habido quienes han sostenido "pero lo que se hace con GD no es geometría". Podemos conceder que no es la misma geometría que se hacía sin esta nueva herramienta, así como la astronomía a partir del telescopio no fue la misma astronomía que se hacía a simple vista. Al igual que el telescopio requirió una nueva manera de pensar, es decir requirió una nueva herramienta teórica que acompañara a la herramienta tecnológica, la GD necesita una nueva herramienta teórica.

Una de estas herramientas teóricas nos la proporcionan Houdement y Kuzniak (1999) quienes proponen tres paradigmas para la geometría. Cada uno refleja una diferente problemática a abordar por la comunidad de matemáticos involucrada:

- *Geometría I. La geometría natural*. La fuente de validación es la realidad, el mundo sensible. Hay una cierta confusión entre el modelo y la realidad. La deducción se hace centralmente mediante la percepción y el uso de instrumentos. Las producciones realizadas en un ambiente de Geometría Dinámica tienen cabida en la geometría natural.
- *Geometría II*. *La geometría axiomática natural*. La fuente de validación se basa sobre lo hipotético deductivo en un sistema axiomático lo más preciso posible. Pero dicho sistema axiomático se mantiene lo más fiel posible a la realidad.
- *Geometría III. La geometría axiomática formalista*. Se cortan los lazos de la geometría con la realidad. El razonamiento lógico se impone y los axiomas no se basan en lo sensible, en lo real.

Estas tres geometrías nos dan un marco desde el cual dar cuenta de toda la geometría, desde la que se trabaja en la enseñanza primaria hasta aquella con la que trabaja un matemático.

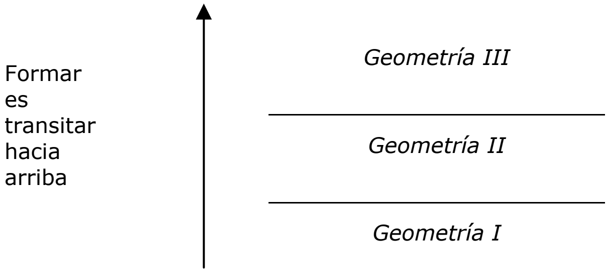
¿CÓMO CONCEBIR LA ACTIVIDAD GEOMÉTRICA?

A partir del reconocimiento de la importancia de definir la matemática a través de la actividad de los matemáticos, Kuzniak (2006) propone un enfoque de la geometría basado en paradigmas. "El caso de la geometría muestra que no es posible utilizar de manera unívoca el término «geometría» dado que esta palabra reviste diferentes significados que dependen, a la vez, de la evolución de las matemáticas y de las instituciones escolares" (p. 172).

Retomando la concepción kuhniana de los paradigmas, Kuzniak los considera como el conjunto de creencias, técnicas y valores que comparte un grupo científico, y está determinado por la resolución de un cierto número de problemas característicos, denominados "ejemplares".

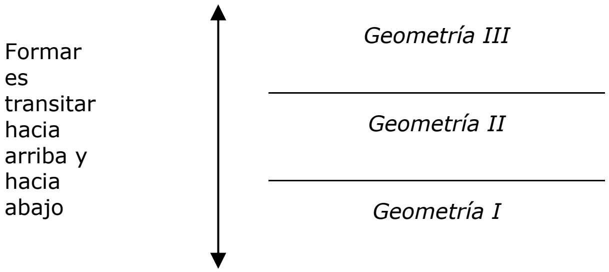
En un primer momento, las Geometrías I, II y III podrían pensarse, en el ámbito de la enseñanza, como niveles a través de los cuales los estudiantes deberían transitar, concebirse como un sistema de jerarquías: la Geometría II mejor que la Geometría I, la Geometría III mejor que la Geometría II.

Así es como ha sido concebida tradicionalmente la enseñanza de la geometría, como un camino unidireccional, siempre ascendente:



Concepción tradicional de la enseñanza de la Geometría

Sin embargo, no se trata de dirimir cuál de estas geometrías es mejor, no es eso lo que está planteado: Houdement y Kuzniak (1999) postulan tres geometrías posibles, tres enfoques distintos de un mismo hecho, pero donde ninguno niega a los otros. Las prácticas permiten ver en cuál se está trabajando en cada momento, son tres dimensiones distintas: el camino deductivo es uno de esos caminos (Geometría II), pero también puede ser el de constatar mediante mediciones (Geometría I), o validar al interior de un sistema axiomático formal (Geometría III). Cada una de estas dimensiones no niega a la otra. Esto permite concebir la actividad geométrica como un tránsito continuo entre estas tres dimensiones.



Concepción de la enseñanza de la Geometría de Houdement y Kuzniak

Consideramos que las producciones de los estudiantes al iniciar sus estudios de profesorado se ubican dentro de la Geometría I o la Geometría II, dependiendo de la actividad en que estén trabajando. Dada la amplitud del modelo de Houdement y Kuzniak (1999), este nos puede ser de utilidad para entender el trabajo geométrico, tanto personal como de nuestros estudiantes, y así poder contribuir a su desarrollo.

EL CONOCIMIENTO QUE HAY EN LOS TEXTOS Y EL CONOCIMIENTO POR CONSTRUIR

La matemática que aparece en los textos por lo general ya está organizada en capítulos y cada capítulo a su vez ya está organizado en axiomas, definiciones, teoremas y tal vez ejercicios al final de cada capítulo, donde se puedan aplicar las propiedades vistas para su resolución. En resumidas cuentas, el conocimiento matemático aparece sistematizado (de Villiers, 1993). Incluso cuando se propone un ejercicio o actividad de final de capítulo, la regla del juego no dicha es que se podrá resolver con las propiedades explicitadas en el texto hasta ese momento.

Frente a una conjetura que no se ha visto antes y que no figura en los textos, la situación es bien distinta, el explorador no sabe de antemano cuáles serán las propiedades a las que tendrá que recurrir a la hora de elaborar una demostración para su conjetura. En una situación como esta la demostración juega un papel de sistematización del conocimiento matemático. Al buscar elaborar una demostración se recurrirá a distintos teoremas, definiciones y axiomas de la matemática para ver si haciendo uso de algunos de ellos efectivamente se puede construir una demostración. Pero en este proceso no hay una regla no dicha de recurrir a tales o cuales propiedades, de lo que se dispone frente a una nueva conjetura es de *toda* la matemática. Se pone de relieve así que la matemática que aparece en los textos que se suelen usar como guías de cursos, tiene una organización ya establecida.

La matemática en gestación carece de esta organización y la busca, pero la busca después de tener algunas certezas o por lo menos ciertos indicios.

Según Grompone (2012, p. 81):

> la búsqueda del conocimiento exige explorar lo desconocido. No hay caminos ni guías para lo nuevo. El futuro no se puede predecir. La búsqueda de lo nuevo consiste en recorrer un laberinto oscuro. El manejo de la información ahora es laberíntico porque se llegó a una masa crítica, pero la razón de fondo es que también el conocimiento es laberíntico.

NUEVAS HERRAMIENTAS POSIBILITAN UNA NUEVA CONSTRUCCIÓN DEL CONOCIMIENTO GEOMÉTRICO

Sostiene de Guzmán (2002, p. 14) que muchas situaciones de geometría "son tratables con éxito, desde su exploración y experimentación hasta la conjetura y ulterior demostración, mediante los programas de los que ya disponemos." [...] "Pero llegará el momento en que todas estas tareas... se harán más simples y rápidas y resolverán la mayoría de las situaciones en las que algunos hoy a menudo nos atascamos."

Las herramientas tecnológicas -en nuestro caso el software de GD- hacen posible tener una respuesta casi inmediata a preguntas que hace unos años ni siquiera atinábamos a formular (porque era impensable atisbar algún tipo de respuesta). Esto nos permite posicionarnos frente al conocimiento geométrico de una manera distinta a como se ha hecho hasta las últimas décadas. La presencia y uso masivo del software de GD es un cambio tan revolucionario para la geometría euclidiana, que solo es comparable a la organización de la geometría hecha en los *Elementos* por Euclides en el siglo III a. C. Si el fuerte de los *Elementos* fue la sistematización de la geometría euclidiana, el software de GD ya es y seguirá siendo un motor potentísimo para la exploración, es decir para la creación de nuevo conocimiento geométrico. Un ejemplo puede verse en Dalcín (2003).

Lo antes expuesto nos lleva a ubicarnos frente al conocimiento de una manera distinta a como lo hacíamos hasta el momento. En este sentido sostiene de Guzmán:

> Por eso me resulta del todo verosímil que en un futuro bastante próximo la experimentación será mucho más fácil de realizar que ahora, la conjetura y su comprobación o refutación se hará mucho más sencilla y sin esfuerzo, y la demostración automática será directa. Con esto nuestro trabajo en matemáticas, ayudados en todas sus fases por el ordenador, consistirá, cada vez en más campos, en lo siguiente:
>
> • diseñar con imaginación y guiados por la experiencia acumulada, propia y ajena, experimentos bien construidos y orientativos en el tema que tratamos de explorar;

> • conjeturar las razones profundas que yacen bajo los experimentos y los resultados, números, imágenes, estructuras…, que observamos en esta experimentación;
> • reforzar o refutar nuestras conjeturas con experimentos más refinados;
> • demostrar o refutar nuestras conjeturas automáticamente con el ordenador.” (2002, p. 16)

PROFESORES Y ESTUDIANTES: ¡UNÍOS!

Compartimos con de Guzmán, si bien usando otro software, la experiencia que sigue:

> Asimismo en algunos archivos de DERIVE que aquí se pueden ver queda claro su sabor tentativo e incipiente que en ocasiones corresponde a diversas etapas de resolución de un problema que me resultaba complicado. Creo que observar estas dificultades por las que he pasado puede ser interesante para el lector. (2002, p. 14)

Que el conocimiento geométrico no es solamente algo dado sino que también posibilita un proceso de exploración de lo desconocido es un aspecto que consideramos más que relevante a la hora de pensar la actividad geométrica que pueden desarrollar profesores y estudiantes de profesorado en su formación inicial. Tomar conciencia del conocimiento como algo abierto, no acabado, consideramos pueda colocar al estudiante en una actitud activa frente al mismo e incluso pensarse él como posible constructor de conocimiento geométrico.

En este sentido se expresaba Álvaro en la siguiente comunicación vía mensaje de correo electrónico:

Álvaro: *Estuve mirando tu trabajo sobre los triángulos y está excelente, tanto desde el punto de vista didáctico, ya que me ayuda a ubicarme en donde estoy, como desde el punto de vista geométrico, porque me plantea algo que no conocía. Me atrapó y ahora que tengo un poco más de tiempo lo estoy disfrutando.*

La verdad los triángulos me están haciendo pensar bastante y he conseguido algunos logros, por ahí ya los descubriste, pero te los mando porque son la esencia de tu propuesta, la posibilidad de hacer conjeturas y tratar de descubrir cosas nuevas.

Por ahora me he centrado en el triángulo que se forma a partir de la intersección de las mediatrices y bisectrices del triángulo (llamémoslo por comodidad) de partida, pues me parece que es la madre del borrego y tiene algunas características bien notables. En el adjunto te envío algunas observaciones y lo que me estoy preguntando ahora. El formato de lo que te envío, no es homogéneo porque es el trabajo de varios días y distintos medios, aunque la esencia son los programas de geometría, que te permiten ver muchas cosas en poco tiempo.

Espero tus comentarios y si podés que revises los resultados para ver si no cometí errores.

Te agradezco que te hayas acordado de pasarme el trabajo, pues siempre estoy buscando casos para estudiar y a veces pierdo el tiempo con tonterías que resultan estar recontra vistas y tal vez alcanzaría con *estudiarlas desde un libro y esta labor me parece mucho más productiva y me obliga a ir al libro igual. (Comunicación personal, 5 de noviembre, 2013)*

Álvaro: *[…] quería mandarte algo más sobre los [triángulos] que me siguen haciendo pensar. Para cuando tengas un tiempo libre, dale una miradita y después me contás qué te pareció. (Comunicación personal, 21 de noviembre, 2013)*

Álvaro: *Respecto a los triángulos, no te envié nada nuevo porque me divagué un poco y tengo que recentrarme otra vez en el problema. Es que comienzo viendo algo y la imaginación vuela en torno al "qué pasará si...", siendo muchas veces conjeturas que no te llevan hacia nada particularmente interesante. (Comunicación personal, 5 de diciembre, 2013)*

Álvaro: *Te mando alguna cosa nueva (por lo menos para mí) y bien interesante. (Comunicación personal, 13 de diciembre, 2013)*

Álvaro: *¡Nueva conjetura! (Comunicación personal, 17 de diciembre, 2013)*

Mario: *¿Te da para pegar las cuestiones que fuiste viendo en este archivo de Word que te adjunto? Seguro que tenés el panorama más claro que yo y tenés una idea más clara de si encajan con las otras conjeturas y en qué lugar... hay algunas cosas que mandaste en geogebra y otras en pdf, teniéndolas en el archivo de*

Word podemos ir escribiendo… (Comunicación personal, 18 de diciembre, 2013)

Álvaro: *Mirando lo que te mandé, me doy cuenta que está bastante entreverado, además incluye otras cosas que se me ocurrían mientras miraba tu trabajo pero que no tenían mucho que ver directamente con él. No sé si a vos te pasa, pero a mí me ocurre que miro algo y si me engancha, la cabeza me va a mil y veo cosas interesantes por todos lados, en otras palabras me divago un poco. (Comunicación personal, 18 de diciembre, 2013)*

Mario: *[…] lo que decís del montón de cosas que van surgiendo todas entreveradas cuando uno se cuelga con algo es tal cual lo que me pasa y es la parte que más disfruto y me super alegra que te pase y además es difícil de explicar a alguien que no lo vivió... (Comunicación personal, 19 de diciembre, 2013)*

El caso de exploración geométrica relatado permite tomar contacto con un aspecto muy parcial del conocimiento geométrico, pero con la particularidad de ser un territorio que no sabemos si ya ha sido recorrido. Las conjeturas formuladas podríamos decir que son certezas en el ámbito de la Geometría I y serán una fuente de exploración en el ámbito de la Geometría II a la hora de buscarles una demostración y por tanto una sistematización. Para algunas de las conjeturas fuimos capaces de elaborar demostraciones, otras siguen siendo desafíos.

¿Y EN LA CLASE DE GEOMETRÍA?

Según el diccionario de la RAE conjetura es “Juicio que se forma de las cosas o acaecimientos por indicios y observaciones”. En el caso de las conjeturas antes expuestas hay más que indicios sobre su veracidad, dado que las mismas están fundadas en observaciones hechas en base a una figura dinámica que habilita la consideración de infinitos casos. En las figuras dinámicas se hicieron mediciones (básicamente de ángulos) y se hicieron cálculos con dichas mediciones, también se hicieron construcciones y verificaciones en base a dichas mediciones.

Esta forma de funcionamiento

> proporciona a los estudiantes una herramienta para la validación de las propiedades que pueden percibirse en la pantalla: una propiedad será probablemente cierta sólo si se mantiene válida mientras se arrastran los puntos básicos de la construcción. En otras palabras, una propiedad geométrica ‘es un invariante perceptual’. (Balacheff, 2000, p. 98)

Sostenemos que en el ámbito de la Geometría I estas conjeturas son teoremas, en el ámbito de la Geometría II estas conjeturas siguen siendo conjeturas ya que no tienen una demostración, una deducción de su validez a partir de afirmaciones más básicas.

Si los estudiantes ven la demostración solo como verificación de algo que mediante la GD les resulta obviamente cierto, es claro que no tendrán ningún incentivo en generar una demostración deductiva. Es aquí donde debemos tener presente otras funciones de la demostración: explicación, descubrimiento, comunicación, sistematización, desafío intelectual (de Villiers, 1993). La convicción de la certeza de una proposición, que bien puede ser facilitada por el análisis de algunos ejemplos y contraejemplos mediante el uso de GD, puede ser el inicio de la búsqueda de una explicación, de aclarar el por qué (de Villiers, 2004).

Consideramos que al enseñar geometría euclidiana, ya sea en enseñanza primaria, media o terciaria, sería deseable incluir actividades donde la formulación de conjeturas esté presente. Como sostienen algunas experiencias (Wares, 2004, 2007a, 2007b), en algunos casos es factible que los estudiantes estén en condiciones de elaborar pruebas deductivas. En otros, es posible que sin elaborar una prueba deductiva se puedan formular conjeturas y validar empíricamente algunas mediante el uso de GD (Hofstadter, 1997). Sobre la demostración de estas propiedades se podrá volver o no en años siguientes, en ambos casos el trabajo ya hecho amplía el mundo geométrico de los estudiantes y contribuye a desarrollar la capacidad de hacerse preguntas geométricas, a desarrollar un ojo geométrico, a concebir la geometría euclidiana no como un territorio ya explorado y agotado, sino también como un mundo a construir.

REFERENCIAS

Balacheff, N. (2000). Entornos informáticos para la enseñanza de las matemáticas: complejidad didáctica y expectativas. *Matemáticas y educación. Retos y cambios desde una perspectiva internacional*, 93-108. Barcelona, España: ICE de la Universidad de Barcelona y Editorial Graó.

Dalcín, M. (2003). Isotomic inscribed triangles and their residuals**.** *Forum Geometricorum*, 3, 125 - 134*.* Recuperado el 11 de octubre de 2014 desde http://forumgeom.fau.edu/FG2003volume3/FG200314index.html

Dalcín, M. (2012). Conjeturas sobre triángulos determinados por mediatrices, bisectrices y alturas de un triángulo. *Actas de la 2ª Conferencia Latinoamericana de GeoGebra-Montevideo,* 163-173.

de Guzmán, M. (2002). *La experiencia de descubrir en geometría*. Madrid: Nivola.

de Villiers, M. (1993). El papel y la función de la demostración en matemáticas. *Epsilon*, 26, 15-30.

de Villiers, M. (2004). Using dynamic geometry to expand mathematics teachers' understanding of proof. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 35 (5), 703-724.

Grompone, J. (2012). *El paradigma del laberinto*. Montevideo: La flor del Itapebí.

Hofstadter, D. R. (1997). Discovery and dissection of a geometric gem. En J. King y D. Schattschneider (Eds.), *Geometry turned* *on: dynamic software in learning, teaching and research*, 3-14. Washington, DC: MAA.

Houdement, C. y Kuzniak, A. (1999). Géométrie et paradigmes géométriques. *Petit x*, 51, 5-21.

Kuzniak, A. (2006). Paradigmes et espaces de travail géométriques. Éléments d'un cadre théorique pour l'enseignement et la formation des enseignants en géométrie. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 6 (2), 167–187.

Revista Forum Geometricorum. Recuperado el 11 de octubre de 2014 desde http://forumgeom.fau.edu/

Wares, A. (2004). Conjectures and proofs in a dynamic geometry environment. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 35 (1), 1-10.

Wares, A. (2007a). Using dynamic geometry to stimulate students to provide proofs. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 38 (5), 599-608.

Wares, A. (2007b). Conjectures pertaining to repeated partitioning of a triangle. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 38 (5), Classroom Notes, 814-819.

DISEÑO DE ACTIVIDADES CON USO DE FOTOGRAFÍA

MARCELO ASTORUCCI, VÍCTOR BONELLO, FIORELLA GIOVANNINI, CRISTINA OCHOVIET, CAMILA PADILLA

INTRODUCCIÓN

En este artículo presentamos algunos diseños de actividades matemáticas con uso de fotografía que fueron realizados en la clase de Didáctica de la Matemática en un grupo de cuarto año de la formación de profesores de matemática para la enseñanza media. En primer lugar fundamentaremos la importancia que tienen las actividades que los profesores proponen a sus estudiantes y luego presentaremos la perspectiva teórica que sustenta el diseño con uso de fotografías.

EL DISEÑO DE ACTIVIDADES: TAREA FUNDAMENTAL DE LOS DOCENTES

Una tarea fundamental que deben asumir los docentes es el *diseño de las actividades* que ofrecerán a los estudiantes en sus clases. El diseño de las tareas que se plantean a los alumnos es de suma importancia en el proceso de aprendizaje pues define, según Hiebert y Wearne (1997), lo que estos aprenden. Claro está que las tareas que se proponen a los alumnos no generan por sí solas aprendizaje sino que inciden también las condiciones en que se aborda la tarea, el contexto en que se desarrolla, las interacciones que están previstas, los recursos y materiales, entre otros asuntos. Es así que la elección de las actividades matemáticas que decidimos llevar al aula y la manera en que se solicita a los estudiantes que se aproximen a ellas, determinan la calidad de la matemática en la clase (Simon, 1997; Steinbring, 1998).

DISEÑAR ACTIVIDADES CON USO DE FOTOGRAFÍA

Bragg y Nicol (2011) presentan un enfoque que permite diseñar problemas abiertos a través de fotografías que permiten ver a la matemática en contexto. Un problema abierto con fotografía consiste en la fotografía de un objeto, composición o escena, que es acompañada por un enunciado que conduce a problemas abiertos planteados en el contexto de la foto. Los llamamos abiertos en dos sentidos: porque admiten diferentes aproximaciones o porque son de final abierto, esto es, admiten múltiples respuestas. Las autoras aseguran que este tipo de tareas genera curiosidad en los estudiantes y el deseo de explorar posibles soluciones.

La fotografía que se incluye en el diseño de la tarea puede cumplir una función *ilustrativa* o *interactiva*. La primera refiere a que la imagen es útil a los efectos de la contextualización de la situación pero no es esencial en la resolución del problema. La imagen tiene una función interactiva cuando es esencial para la resolución del problema. Esto significa que si se elimina la foto no se puede resolver la situación planteada. Es decir que la fotografía aporta información fundamental sin la cual no es posible abordar el problema. Entendimos que la función interactiva es la más interesante y novedosa ya que tradicionalmente las fotografías se han utilizado, por ejemplo en los libros de texto, más para ilustrar que para aportar datos a una situación problemática, de ahí que decidimos situarnos en el diseño de actividades en las que la fotografía tiene esta función.

En cuanto a lo metodológico, Bragg y Nicol reseñan dos aproximaciones: (a) comenzar a partir de un problema, proponer preguntas abiertas y luego buscar una foto que sea adecuada para la situación o (b) comenzar a partir de una foto que puede ser tomada por el docente con la intencionalidad deseada o utilizar una preexistente y formular preguntas abiertas adecuadas para transformarla en un problema a resolver.

Desde este enfoque, pusimos énfasis en que las preguntas que acompañaran a las fotos fueran abiertas. Según Sullivan y Clarke (1992) las actividades de final abierto son aquellas que se caracterizan por tener múltiples respuestas correctas, requieren más que información para resolverlas y además permiten a los estudiantes aprender al completar la actividad. Estos autores sostienen que este tipo de actividades se adaptan a las características personales de los distintos estudiantes ya que cualquiera de ellos tiene la oportunidad de dar una respuesta legítima. En consecuencia, permiten atender la diversidad en la clase sin la necesidad de que el profesor deba proponer diferentes tareas a los estudiantes.

LABORATORIO DE ACTIVIDADES

La clase de Didáctica funcionó a modo de laboratorio de diseño. Cada estudiante llevó sus propuestas y entre todos las analizamos, criticamos y se fueron realizando sucesivas reformulaciones, hasta llegar a una versión final que también entendemos que es, al mismo tiempo, provisional. Las ofrecemos a modo de ejemplo para compartir nuestro trabajo y someterlas al análisis del lector. Todas las actividades están pensadas para estudiantes del Ciclo Básico, esto es, estudiantes de entre 13 y 15 años.

Viaje en ómnibus

El viernes a las ocho de la noche, Romina junto con su madre y todos sus hermanos hacen un viaje en ómnibus para ir al cumpleaños de su tío.

Durante el viaje Romina, que con sus seis años es muy curiosa, observa un cartel -como el que se muestra en la foto- que está pegado en la ventanilla y luego le pregunta a su madre:

- Mamá, ¿cuántos boletos pagaste?-

- Cuatro - le contesta su madre.

¿Cuántos hermanos te parece que tiene Romina?

La foto presenta un cartel que podemos ver a bordo de los ómnibus de una empresa de transporte capitalino. En el mismo se presentan las diferentes condiciones bajo las que una persona puede viajar de forma gratuita.

En el problema se nos pregunta cuántos hermanos tiene Romina, y conocemos el dato de que la madre de Romina pagó por el pasaje de la niña, el propio y el del resto de sus hijos, un total de cuatro boletos. Para poder contestar a esta pregunta correctamente, se deben tener en cuenta otros datos, como el día de la semana en el que se realiza el viaje, la hora del día y la edad de Romina.

Como el viaje se realiza un viernes a las ocho de la noche, la única condición que eventualmente permitiría realizar el viaje en ómnibus de forma gratuita sería la de ser menor de cinco años de edad. Por esta razón, al tener Romina seis años, se sabe también que ella pagó pasaje, al igual que su madre. De esto se desprende que por los hermanos de Romina se pagaron dos boletos, lo que nos deja las siguientes posibilidades:

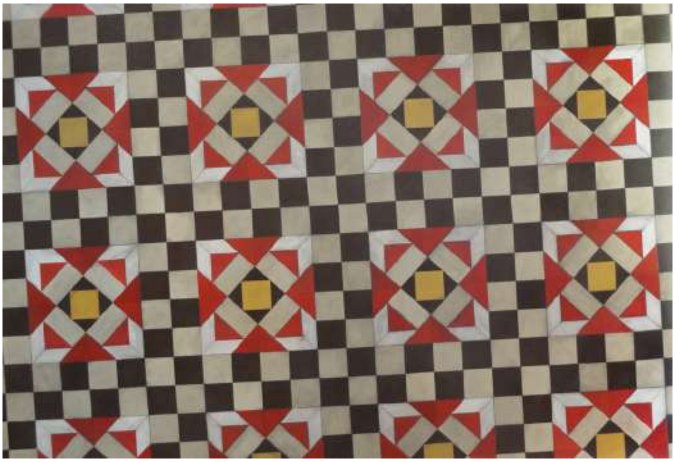
- Romina tiene dos hermanos mayores que pagaron un boleto cada uno.
- Romina tiene tres hermanos:
    - Dos hermanos mayores que pagaron un boleto cada uno y un hermano menor que viaja de forma gratuita.
    - Un hermano mayor por el que se paga un boleto y dos hermanos menores por los que se paga otro.
- Romina tiene cuatro hermanos:
    - Un hermano mayor por el que se abona un viaje y tres hermanos menores entre los que se paga un solo pasaje.
    - Cuatro hermanos menores que cada dos pagan un boleto.
- Romina tiene cinco hermanos menores, que cada dos pagan un boleto y el quinto viaja gratis.

Los estudiantes pueden presentar una única solución al problema o pueden notar (sin ayuda o a través de la comparación con las respuestas obtenidas por sus compañeros) que hay varias posibilidades e intentar encontrarlas todas realizando una búsqueda organizada y sistematizada.

Pintar un mosaico

Rosalía Hernández es una artista española que, entre sus diferentes actividades, pinta inspirándose en los diseños de mosaicos reales. En su página geometricadomestica.com puedes ver diferentes diseños.

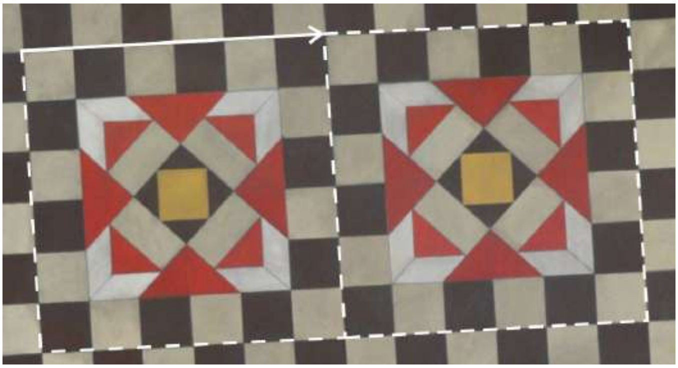
Veamos uno de ellos:



a. ¿Cuál es la baldosa que origina este diseño?
b. ¿Cuál es la isometría que te permite, a partir de una baldosa, obtener otra?
c. ¿Podrías recrear el diseño de la artista utilizando papel cuadriculado? ¡Inténtalo!

En esta actividad el alumno debe reconocer cuál es la baldosa que originó el diseño. Esto es, una que sea la que después, repetida, da lugar al diseño que apreciamos en la imagen. Para ello, el estudiante debe ser capaz no solo de reconocerla sino de explicar cuál y por qué es la que eligió. A partir de este diseño se pueden trabajar las características de las distintas figuras geométricas presentes en la baldosa: cuadrados, rectángulos, triángulos rectángulos e isósceles y paralelogramos.

Esta es una actividad de gran demanda cognitiva puesto que es una actividad nueva que puede dar lugar a la discusión, ya que los alumnos podrían reconocer distintas isometrías que les permiten pasar de una baldosa a otra: simetría axial, simetría central, rotación y traslación; lo importante en cada caso es la justificación del movimiento escogido. En la siguiente figura se muestra una posibilidad. Las baldosas de borde punteado se corresponden en la traslación de vector indicado.



Una vez que se ha realizado un completo análisis de las dos primeras propuestas, el alumno debe recrear el diseño de la artista.

La biblioteca de Denver

La ciudad de Denver en EEUU posee una biblioteca pública con una arquitectura muy particular que puedes apreciar en la fotografía. ¿Qué cuerpos geométricos modelan la arquitectura de esta biblioteca? Descúbrelos y descríbelos.

Esta fotografía[1] permite que los estudiantes reconozcan los cuerpos geométricos como figuras que modelan la arquitectura de la biblioteca de la ciudad de Denver. Lo interesante de la imagen,

[1] Imagen extraída de http://www.archdaily.com/.

es que si uno se ciñe a lo que la fotografía muestra, puede interpretar de distintas maneras, por ejemplo, el tipo de prismas que podrían ser algunos de los edificios. Por ejemplo, el edificio que tiene una pirámide en el techo, ¿corresponde a un prisma de base rectangular o de base triangular? ¿Qué otras posibilidades pueden ser sugeridas? Distintas alternativas son posibles desde lo que muestra la imagen. Esto podría develarse trabajando con fotos aéreas, pero en una etapa posterior. El objetivo es favorecer, en una primera aproximación, el desarrollo de la imaginación.

Luego de que los estudiantes analicen la fotografía trabajando en pequeños grupos, se puede realizar una puesta en común de modo de trabajar en la identificación de los distintos cuerpos y los elementos que permiten fundamentar dicha elección; en esta instancia son muy importantes las intervenciones del docente para lograr un buen aprovechamiento de la actividad.

El gallinero

La siguiente foto muestra un gallinero de Paso de la Arena.

a. Si se sabe que las gallinas ponen dos huevos en tres días, excepto en verano que ponen uno por día, ¿cuántos días pasaron sin juntarse huevos?

b. Si el mismo día que se saca la foto, se juntan y se usan todos los huevos, ¿cuánto tiempo se debe esperar para hacer un bizcochuelo de seis huevos?

Para comenzar con la resolución del problema hay que tener en cuenta varias cuestiones, una de ellas es la estación en la que fue extraída la foto y otra, la cantidad de gallinas que hay en el gallinero. Se puede afirmar con certeza que al menos hay una, dado que se muestra en la foto y, de las otras dos aves, no podemos afirmar nada pues no sabemos si son gallinas o gallos.

Por otro lado, debe tenerse en cuenta si la foto fue extraída en la mañana o en la tarde. Si fue en la mañana, esos huevos corresponden a la puesta de los días anteriores; si fue en la tarde, esos huevos fueron puestos hasta el día que se tomó la foto inclusive. Estas distintas condiciones a considerar, hacen que el problema tenga múltiples respuestas. Los estudiantes podrán avanzar sobre él parcialmente, aportando algunas de las respuestas posibles, o podrán organizar todas las variables que intervienen y sistematizar las distintas cantidades posibles de gallos y gallinas, para llegar a un análisis completo del problema.

Rebajas

En la fotografía puedes ver la vidriera de una tienda y los descuentos que ofrecen. Si pagas con tarjeta OCA, ¿cómo calcularías el precio final de un par de zapatos deportivos?

La pregunta propuesta permite diferentes respuestas dependiendo de cómo se interpreten los descuentos ofrecidos. El 10% extra, ¿se aplica al precio de venta una vez descontado el IVA o luego de descontado este impuesto? ¿Es lo mismo? ¿O se suma al 18,03% arrojando un descuento del 28,03% sobre el precio de venta al público? ¿Es esto lo mismo que aplicar en forma sucesiva el descuento de 18,03% y el de 10%? ¿Qué interpretación del descuento ofrecido conviene más? Son preguntas que pueden guiar el abordaje del problema.

REFLEXIONES FINALES

Los ejemplos presentados son producto del trabajo en la clase de Didáctica. Fueron realizados a modo de ejercicio y modificados a partir de la discusión entre estudiantes y docente. El objetivo que guió esta tarea fue comprender cómo un diseño puede ser guiado por una perspectiva teórica, en este caso, el diseño de actividades con uso de fotografía. En las actividades presentadas la fotografía utilizada tiene una función interactiva. Esto significa que sin la información que proporciona la foto, no es posible resolver la pregunta o situación planteada. Uno de los aspectos más difíciles de lograr fue que las situaciones propuestas tuvieran múltiples respuestas. Podemos ensayar una explicación para esta dificultad a través de la noción de *contrato didáctico*[2]. Una de las cláusulas

[2] Conjunto de normas, que "sin un acuerdo expreso, rigen en cada momento, las obligaciones recíprocas de los alumnos y el profesor respecto al proyecto de estudio que tienen en común" (Chevallard et al, 1997, p. 62).

del contrato tradicional al que todos hemos estado expuestos señala que para cada problema hay una respuesta correcta que puede hallarse utilizando la información presente en el enunciado.

En el caso de las fotografías, la información muchas veces no es explícita o bien resulta insuficiente y hay que completarla imaginando posibilidades. En los ejemplos proporcionados esto fue logrado en distinto grado.

En las actividades puede apreciarse de qué manera el uso de la fotografía permite un vínculo concreto y natural con el entorno. Entendemos que este uso favorece la posibilidad de establecer conexiones matemáticas y contextualizaciones sensatas.

Esperamos que la perspectiva adoptada y las actividades presentadas puedan aportar a los docentes de enseñanza media y a los estudiantes de profesorado, ideas para emprender el diseño de actividades con fotografía.

REFERENCIAS

Bragg, L. y Nicol, C. (2011). Seeing mathematics through a new lens: using photos in the mathematics classroom. *Australian mathematics teacher*, vol. 67, no. 3, Fall, pp. 3-9.

Chevallard, Y., Bosch, M. y Gascón, J. (1997). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje*. Barcelona: I.C.E Universitat Barcelona-Horsori Editorial.

Hiebert, J., y Wearne, D. (1997). Instructional tasks, classroom discourse and student learning in second grade arithmetic. *American Educational Research Journal,* 30(2), 393–425.

Simon, A. (1997). Developing new models of mathematics teaching: An imperative for research on mathematics teacher development. In E. Fennema y B. Scott-Nelson (Eds.), *Mathematics teachers in transition* (pp. 55–86). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Steinbring, H. (1998). Elements of epistemological knowledge for mathematics teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 1(2), 157–189.

Sullivan, P. y Clarke, D. (1992). Problem Solving with Conventional Mathematics Content: Responses of Pupils to Open Mathematical Tasks. *Mathematics Education Research Journal*, 4(1), 42-60.

CUATRO MOMENTOS EN LA EVOLUCIÓN DE LA MATEMÁTICA EDUCATIVA EJEMPLIFICADOS A TRAVÉS DEL CONCEPTO DE PERIODICIDAD

Sofía Acosta, Gabriela Figares, Victoria López,
Victoria Mesa, Verónica Molfino, Florencia Rivero

Introducción

Exponemos un trabajo realizado en el marco de la asignatura Análisis del Discurso Matemático Escolar, de cuarto año de la carrera Profesorado de Matemática para la enseñanza media, que tuvo como consigna presentar secuencias de actividades de un mismo tema que correspondieran a los momentos de la evolución de la Matemática Educativa (ME) según la distinción expuesta en Cantoral y Farfán (2003). El tema seleccionado es funciones periódicas, que podría ser abordado en cursos de enseñanza media superior. Curricularmente se espera que sea trabajado como características de funciones angulares en el programa de primer año de Bachillerato (ANEP, 2010), pero no forma parte de un contenido en sí mismo en ese u otros programas de Educación Secundaria en Uruguay. De igual forma, puede ser tratado al estudiar características de funciones, no necesariamente angulares.

MARCO TEÓRICO

Para la distinción de los momentos en la evolución de la ME usamos como referencia lo expuesto en Cantoral y Farfán (2003), quienes distinguen cuatro momentos: una *didáctica sin alumnos*, que refiere a la problemática denominada 'clásica' en ME, dedicada a elaborar presentaciones de los contenidos matemáticos supuestamente más accesibles a profesores y estudiantes que los métodos expositivos tradicionales; una *didáctica sin escuela*, identificada principalmente con las líneas de investigación en ME que estudian fundamentalmente la dimensión cognitiva, teniendo como principal referencia a los investigadores del *Psychology of Mathematics Education* (PME); una *didáctica en la escuela pero sin escenarios*, que estaría representada por la corriente de la Didáctica Francesa y tiene como sustento principal la Transposición Didáctica y la Teoría de las Situaciones Didácticas que articula las dimensiones cognitiva, didáctica y epistemológica y, por último; una *didáctica en escenarios socioculturales*, identificada con la Socioepistemología, un abordaje sistémico que considera, además de las dimensiones ya mencionadas, a la dimensión social como una componente fundamental que resignifica a las anteriores.

Esta distinción refiere a diferentes líneas de investigación que se han ido desarrollando en la disciplina desde sus inicios, a mediados del siglo XX. En el trabajo desarrollado nos proponemos ejemplificar esa clasificación mediante la influencia que dichas líneas pudieron haber tenido en las prácticas de aula. Somos conscientes de la diferencia entre la investigación en ME y lo que efectivamente ocurre en las prácticas de aula, a la vez que puede resultar artificioso ubicar una investigación en uno solo de los momentos detectados. Pero este se trata de un trabajo de corte hipotético en el que elaboramos, para cada momento, lo que consideramos podría ser una secuencia para la enseñanza del tema *funciones periódicas* atendiendo mayormente los aportes al campo de dicho momento.

SECUENCIAS DISEÑADAS

Para la realización de las diferentes secuencias se consideran como conceptos previos los temas funciones, interpretación de gráficas y trigonometría (propiedades trigonométricas, círculo trigonométrico, funciones angulares).

Una didáctica sin alumnos

La siguiente secuencia busca introducir el concepto de función periódica a través de funciones trigonométricas, dando importancia tanto a la visualización gráfica como a la verificación analítica, utilizando el software dinámico Geogebra.

> *Actividad 1*
>
> *A partir de la representación del círculo trigonométrico se ubican puntos cuyas coordenadas son* $(a, \operatorname{sen} a)$*. Con la herramienta "deslizador" de Geogebra se obtiene la gráfica de la función* $f : R \to R \,/\, f(x) = sen(x)$*.*

Actividad 2

a) Observando el círculo trigonométrico y la gráfica de la función seno, representados en Geogebra, investiga cuánto es: $sen\left(\frac{\pi}{2}\right)$, $sen\left(\frac{5\pi}{2}\right)$, $sen\left(\frac{9\pi}{2}\right)$, $sen\left(\frac{13\pi}{2}\right)$

¿Qué observas?

b) ¿Qué relación encuentras entre estos valores dados del dominio?

Esta actividad pretende por un lado, observar que para estos valores del dominio sus imágenes coinciden. Por otro, analizar a través del círculo trigonométrico que esto sucede cada vez que se completa una vuelta, identificándose así un período. De esa manera se deduce que para todos los valores del dominio cuya diferencia sea 2π o un múltiplo de este, las imágenes coinciden.

Las actividades 1 y 2 dan lugar a definir los conceptos de función periódica y período de una función:

Decimos que una función *f* es periódica si existe un número real positivo *k* tal que $f(t + k) = f(t)$ para todo *t* perteneciente al dominio. Si existe un número positivo *k* mínimo con esta propiedad entonces diremos que *k* es el período de *f*.

Actividad 3

Investiga si las siguientes funciones son periódicas:

$g : R \to R \,/\, g(x) = \cos(x)$

$f : R - \{(2n+1)\frac{\pi}{2};\, n \in Z\} \to R \,/\, f(x) = tg(x)$

$h : R \to R \,/\, h(x) = 5 + 3\cos(2x + \pi)$

$$j : R - \{(2n+1)\frac{\pi}{2}; n \in Z\} \rightarrow R \,/\, j(x) = \left| tg(x) \right|$$

En caso de que lo sean, indica, si es posible, su período, verificando por medio de la definición.

Consideramos que esta secuencia de actividades se enmarca en una *didáctica sin alumnos* ya que propone para estudiar la periodicidad solo funciones trigonométricas o vinculadas con estas, siguiendo lo establecido en la normativa escolar. Por lo tanto, dicha propiedad de las funciones queda reducida únicamente al estudio de funciones de tipo trigonométrico.

Además, solo se toma en cuenta la dimensión didáctica, no considerando a la hora de plantear las actividades el proceso cognitivo del estudiante, la naturaleza epistemológica del conocimiento ni la dimensión sociocultural en que se desarrolla. Es decir, solo se considera la necesidad del docente de trasmitir el conocimiento, sin hacer hincapié en el resto de las dimensiones.

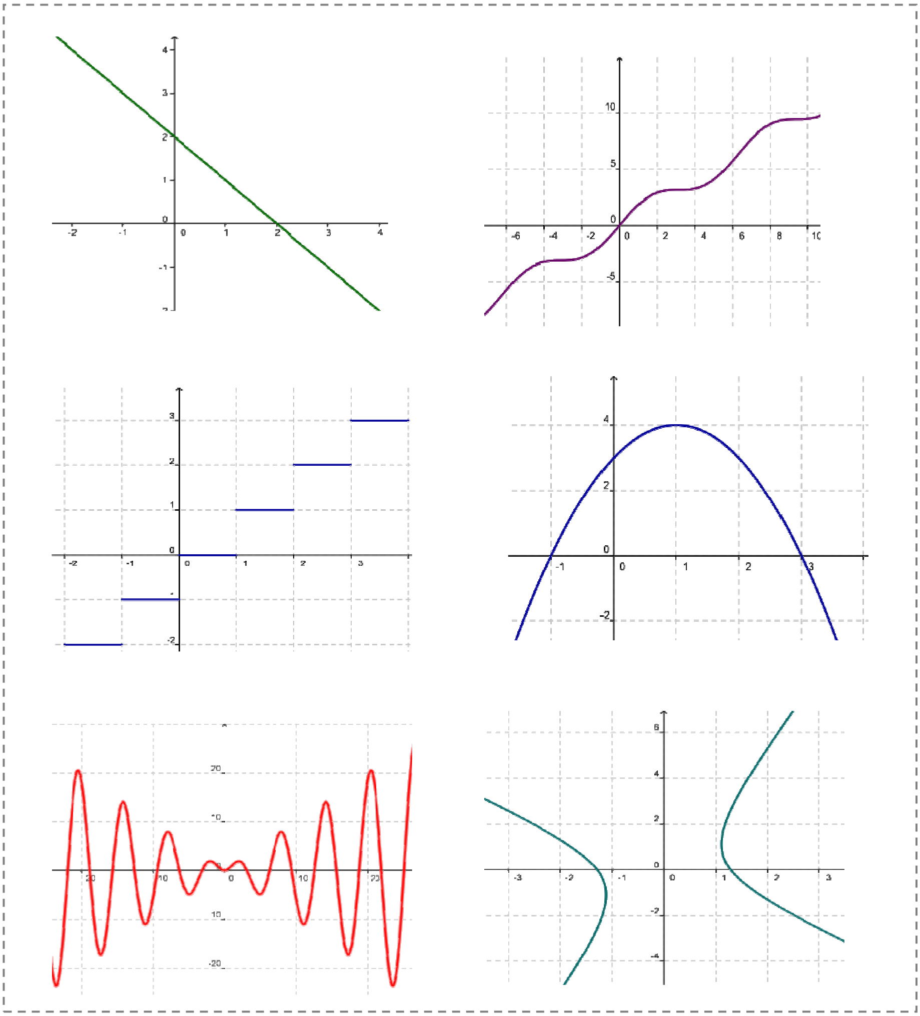
En este abordaje la tecnología es puesta al servicio de tal objetivo: el docente usa las herramientas tecnológicas para lograr que el estudiante se involucre en la actividad mediante la manipulación concreta (introducir una expresión, observar lo que ocurre al deslizar un punto, entre otras actividades), y de esa manera poder transmitir un conocimiento preestablecido, preexistente al estudiante y también al docente.

Una didáctica sin escuela

La siguiente secuencia de actividades busca introducir el concepto de función periódica a partir de ejemplos y no ejemplos, y estudiar la periodicidad en funciones ya conocidas por los estudiantes.

Actividad 1

Parte 1: ¿Cuáles de las siguientes gráficas representan funciones periódicas?



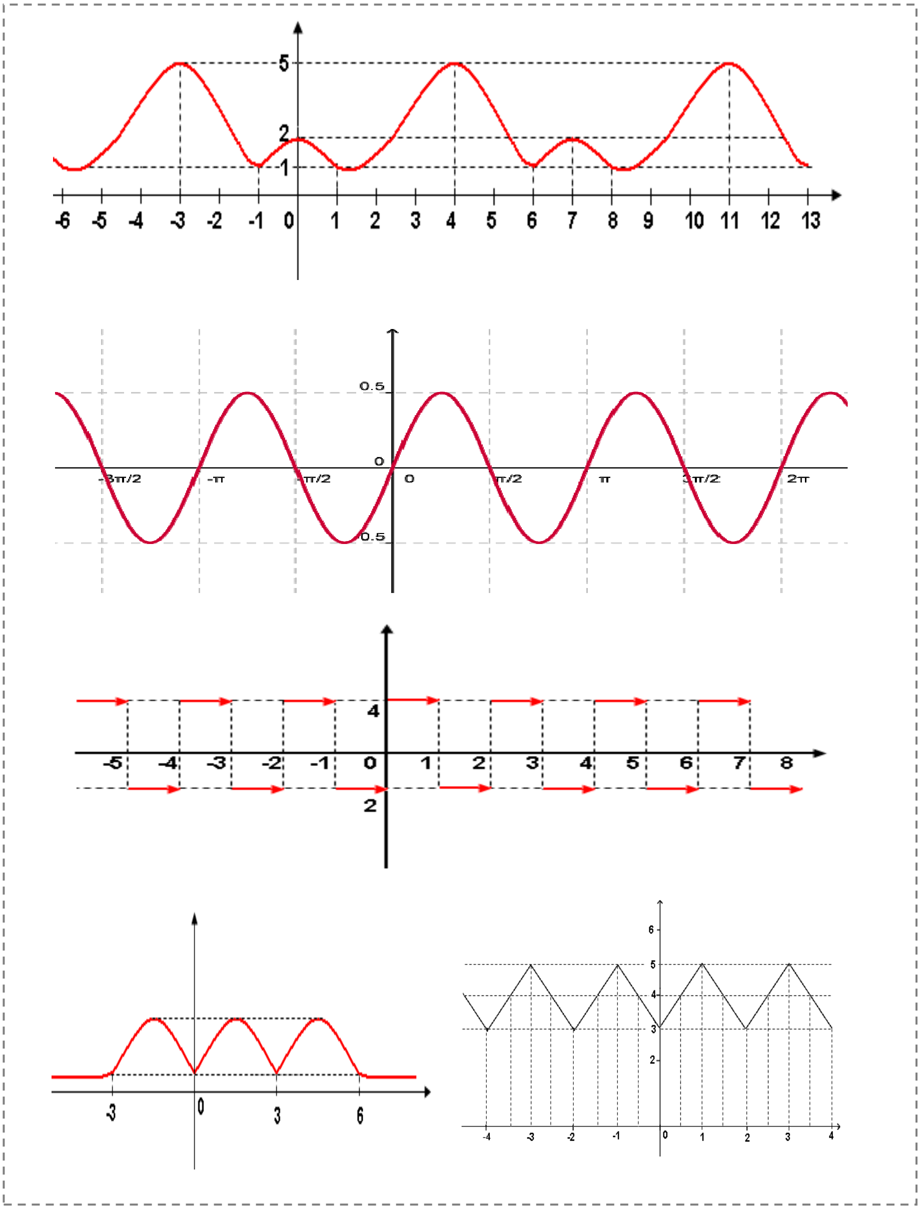


Figura 1. Gráficas de funciones periódicas y no periódicas. Actividad 1, Momento 2

Esta actividad permite evocar algún aspecto de la imagen conceptual que los estudiantes posean sobre periodicidad. Aun siendo que no haya sido trabajado formalmente, es un término coloquial al que seguramente puedan asignarle algún significado y responder, desde su imagen conceptual, cuáles consideran que son periódicas y cuáles no. Asimismo la actividad busca distinguir entre aquellas funciones que presentan regularidades en su gráfica pero no son periódicas, y aquellas que sí lo son.

A partir del análisis de este tipo de funciones se podrá realizar una generalización, llegando a una definición de función periódica y de período de una función:

Decimos que una función f es periódica si existe un número real positivo k tal que $f(t + k) = f(t)$ para todo t perteneciente al dominio. Si existe un número positivo k mínimo con esta propiedad entonces diremos que k es el período de f.

Actividad 1

Parte 2: En base a la definición dada revisa la clasificación que realizaste anteriormente.

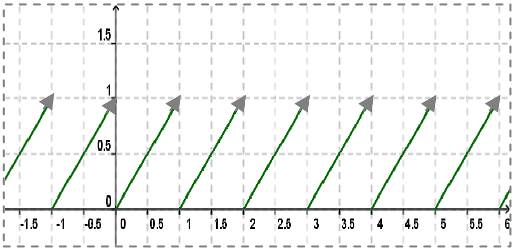
Actividad 2

Investiga si las funciones angulares: seno, coseno y tangente son periódicas y en caso de serlo, indica cuál es el período y verifica analíticamente, a través de la definición.

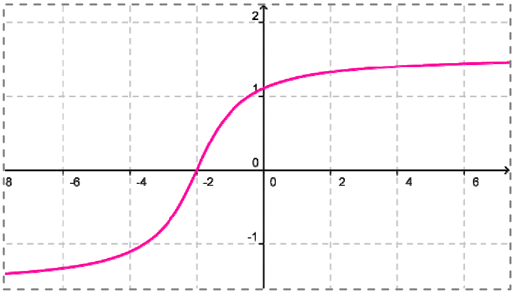
Actividad 3

Indica si las siguientes funciones son periódicas o no, señalando en los casos donde sea posible su período.

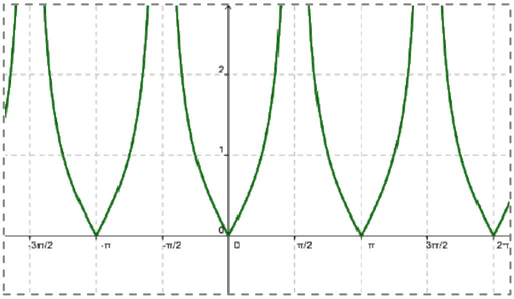
a.



b.



c.



d. $f: R \rightarrow R \,/\, f(x) = -5$

e. $g: R \rightarrow R \,/\, g(x) = sen(x+2) + x$

f. $h: R \rightarrow R \,/\, h(x) = e^{x}$

Figura 2. Gráficas y expresiones analíticas que representan funciones. Actividad 3, Momento 2

Consideramos que esta secuencia de actividades podría enmarcarse bajo una *didáctica sin escuela* ya que toma en cuenta el proceso cognitivo de la apropiación del concepto. Para ello se trabaja con diferentes funciones buscando generar una imagen conceptual amplia, adecuada al concepto. Es así que se muestran diversos ejemplos de funciones periódicas, no solo trigonométricas, sino también periódicas de cualquier tipo, abarcando funciones ya sean continuas o discontinuas, que presenten curvaturas o no, entre otras. También se consideró necesario mostrar ejemplos de funciones que no son periódicas.

Se seleccionaron funciones periódicas no necesariamente vinculadas con las trigonométricas, debido a que frecuentemente los estudiantes relacionan la periodicidad solo con este tipo de funciones, considerando por ejemplo que todas las funciones senoidales son periódicas. Esta selección también pretende mostrar que no todas las funciones que presentan repeticiones en su gráfica son periódicas.

Bajo este enfoque se considera que el estudiante forma conceptos matemáticos no tanto en base a su definición formal sino evocando la imagen conceptual que se ha formado de los mismos.

Según Vinner (1991, p. 80) "se debería comenzar con muchos ejemplos y no ejemplos por medio de los cuales la imagen conceptual se formará. Esto no quiere decir que no se deba introducir a los estudiantes la definición formal". Por este motivo se decide introducir la definición después de haber trabajado varios ejemplos, y luego de la misma seguir trabajando con ejemplos dados en diferentes registros (gráfico y analítico) para reforzar la imagen conceptual y discutir con mayores herramientas cuándo una función es periódica o no.

Por otro lado, podemos situar esta secuencia bajo este enfoque ya que solo toma en cuenta la dimensión didáctica y la dimensión cognitiva del estudiante, siendo transparente la dimensión del saber y la dimensión social, pues a partir de un concepto matemático se propone una clase en la que se buscan herramientas para que el estudiante incorpore el concepto de manera adecuada, pero no se pone en cuestionamiento la construcción social de ese saber.

Una didáctica en la escuela pero sin escenarios

La siguiente secuencia de actividades busca favorecer la construcción del concepto de función periódica mediante una situación en la cual la estrategia óptima para resolverla es tal concepto. En base a esto se podrá definir el concepto de función periódica y reconocer, de entre otras funciones, cuáles son periódicas, así como su período.

Actividad 1[1]

La cisterna de unos servicios públicos se llena y se vacía automáticamente cada dos minutos, según se muestra en la siguiente gráfica.
¿Cuántos litros de agua habrá en la cisterna en los siguientes instantes?:
a. 12 minutos

[1] Esta actividad se basa en una actividad de Cólera y de Guzmán (1998)

b. 17 minutos

c. 40 minutos y 30 segundos

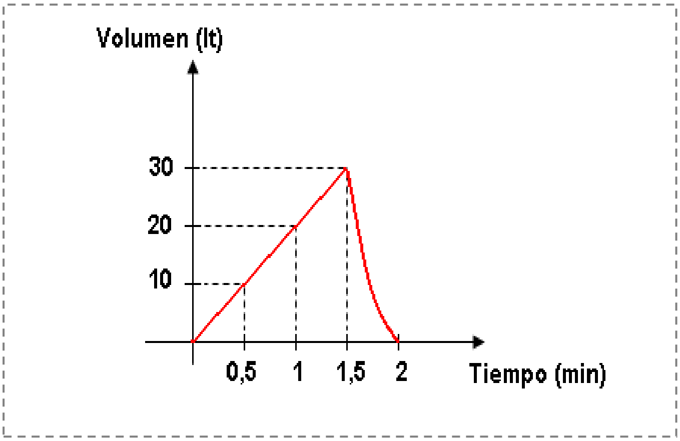


Figura 3. Problema de la cisterna

Esta actividad puede ser el punta pie inicial para introducir el concepto de función periódica y el período de la misma, dado que el estudiante puede visualizar tanto numérica como gráficamente que cada dos minutos se repite el proceso.

Actividad 2

Indica según consideres cuáles de las siguientes gráficas corresponden a funciones periódicas. Se estudiarán las gráficas presentadas en la primera actividad del enfoque "una didáctica sin escuela" (Figura 1).

En base a la selección realizada por los estudiantes podrá discutirse de forma conjunta aquellos casos donde la periodicidad

o no periodicidad no es tan evidente, utilizando como guía el ejemplo anterior y analizando en caso de ser posible su período. A partir de esto podrá definirse el concepto de función periódica y período de la misma de la siguiente manera:
Decimos que una función f es periódica si existe un número real positivo k tal que $f(t + k) = f(t)$ para todo t perteneciente al dominio. Si existe un número positivo k mínimo con esta propiedad entonces diremos que k es el período de f.

Actividad 3

Investiga si las funciones angulares: seno, coseno y tangente, y la función constante son periódicas y en caso de serlo, indica cuál es el período y verifica analíticamente, a través de la definición.

Consideramos que la secuencia de actividades descrita corresponde a este enfoque ya que parte de un problema en el que el estudiante siente la necesidad, dentro de una situación matemática específica, de utilizar la periodicidad de la función como herramienta para la resolución del problema planteado.

A través del problema propuesto para introducir el concepto, es el alumno quien debe construir el conocimiento necesario para hallar la solución del mismo, pues implícitamente siente la necesidad de determinar el comportamiento de la función en base a su periodicidad para dar respuesta a lo que sucederá en determinado instante. Esto es lo que le permitirá ante nuevas situaciones reproducir y optimizar los procesos de adquisición del concepto.

Matemáticamente el concepto de periodicidad surge con la necesidad de poder establecer qué ocurre con la función en cierto valor del dominio, sin tener que hallar una expresión analítica de la misma ni tener que representarla gráficamente hasta el valor deseado. Es por este motivo que seleccionamos este problema que hace funcional al saber.

> Brousseau sostiene que a partir de los saberes que aparecen en los programas escolares, es necesario diseñar situaciones didácticas que hagan funcionar esos saberes. Para ello es necesario crear una génesis artificial de los conocimientos para que el saber aparezca, para el alumno, como un medio de seleccionar, anticipar, ejecutar y controlar las estrategias que aplica para resolver el problema planteado en la situación didáctica. (Ochoviet y Olave, 2005, p.8).

Por lo argumentado anteriormente, creemos que esta perspectiva se basa en considerar el hecho educativo desde un punto de vista sistémico, es decir, considerando las dimensiones didáctica, cognitiva y del saber, actuando en conjunto, pero deja de lado la dimensión social en la construcción del conocimiento en cuestión.

Una didáctica en escenarios socioculturales

El objetivo de la siguiente secuencia de actividades es construir el concepto de función periódica mediante la explicitación de una práctica que según investigaciones de la perspectiva socioepistemológica (Buendía, 2006) normaron la construcción social de este conocimiento: la predicción.

Actividad 1[2]

Las fases lunares *se producen por la interacción entre los movimientos del Sol, la Luna y la Tierra. La lunación es el período que transcurre entre dos fases idénticas de la Luna, por ejemplo dos Lunas Llenas. Cada lunación tiene una duración de 29 días, 12 horas, 44 minutos, 2,78 segundos.*

Comúnmente se conocen cuatro tipos de fase lunar: Luna Nueva, Cuarto Creciente, Luna Llena y Cuarto Menguante*. Pero a su vez esta transita no solo por estas cuatro, sino por infinitas fases intermedias, las que no han recibido un nombre. Es por esto que los astrónomos se refieran a las fases lunares en porcentaje de iluminación: la Luna Nueva corresponde a 0%, Luna Llena a 100%, y tanto Cuarto Creciente como Cuarto Menguante a 50%.*

Para la realización de la siguiente actividad se considerará que las lunaciones se producen cada 29 días. Si bien el crecimiento/decrecimiento es proporcional, hay una diferencia en los días dado que el crecimiento es continuo pero al poner como referencia un día estamos discretizando esa función lo que nos obliga a tomar valores aproximados. Por ejemplo, el Cuarto Creciente (50% de iluminación) se alcanzaría en el "día" 7,25, pero a los efectos del problema consideraremos que es el día 7.

[2] La información usada en esta actividad fue recabada de: http://www.tutiempo.net/luna/fases_8_2012.htm y http://www.astromia.com/historia/astrobabilonia.htm.

1. Representa en un sistema de ejes cartesianos el porcentaje de iluminación de la Luna en función de los días, contando como día cero un día de Luna Nueva. Realiza una gráfica en la que aparezcan representados por lo menos los primeros 90 días.

2. Sabiendo que la última Luna Nueva fue el 19 de julio de este año:

i. ¿Cuándo será la próxima Luna Nueva?

ii. ¿Qué porcentaje de iluminación de la Luna habrá el 30 de setiembre? ¿Y el 20 de diciembre? Indica en cada caso a qué fase corresponde.

iii. ¿Qué fase lunar habrá el día de tu próximo cumpleaños?

Julio

	Lu	Ma	Mi	Ju	Vi	Sá	Do
26							**1**
27	2	○	4	5	6	7	**8**
28	9	10	◐	12	13	14	**15**
29	16	17	18	●	20	21	**22**
30	23	24	25	◑	27	28	**29**
31	30	31					

La representación gráfica podrá realizarse a través de un software matemático.

Se puede observar que cada 29 días tendremos el mismo porcentaje de iluminación de la Luna.
A partir de lo anterior se podrá trabajar el concepto de función periódica y de período.

Con la parte 2 de la actividad se pretende que los estudiantes perciban la utilidad de trabajar con funciones periódicas en la representación de situaciones que nos permiten predecir ciertos acontecimientos.

Se considera interesante mostrar cómo históricamente civilizaciones antiguas como la babilónica, la egipcia, la azteca, la maya y la inca se valieron de este recurso para predecir fenómenos astronómicos, de hecho en base a esto fue que construyeron sus propios calendarios.

Actividad 2

Parte 1: Halla, en los casos en que te sea posible, las imágenes de los siguientes valores a partir de las correspondientes gráficas de funciones:

a. 25 en la función Nº 1

b. 20 en la función Nº 2

c. -5 en la función Nº 3

d. 80,5 en la función Nº 4

e. -701 en la función Nº 5

f. 50 en la función Nº 6

g. 95,7 en la función Nº 7

h. -10 en la función Nº 8

i. 5 en la función Nº 9

j. 102,5 en la función Nº 10

k. 24 en la función Nº 11

l. 7π en la función Nº 12

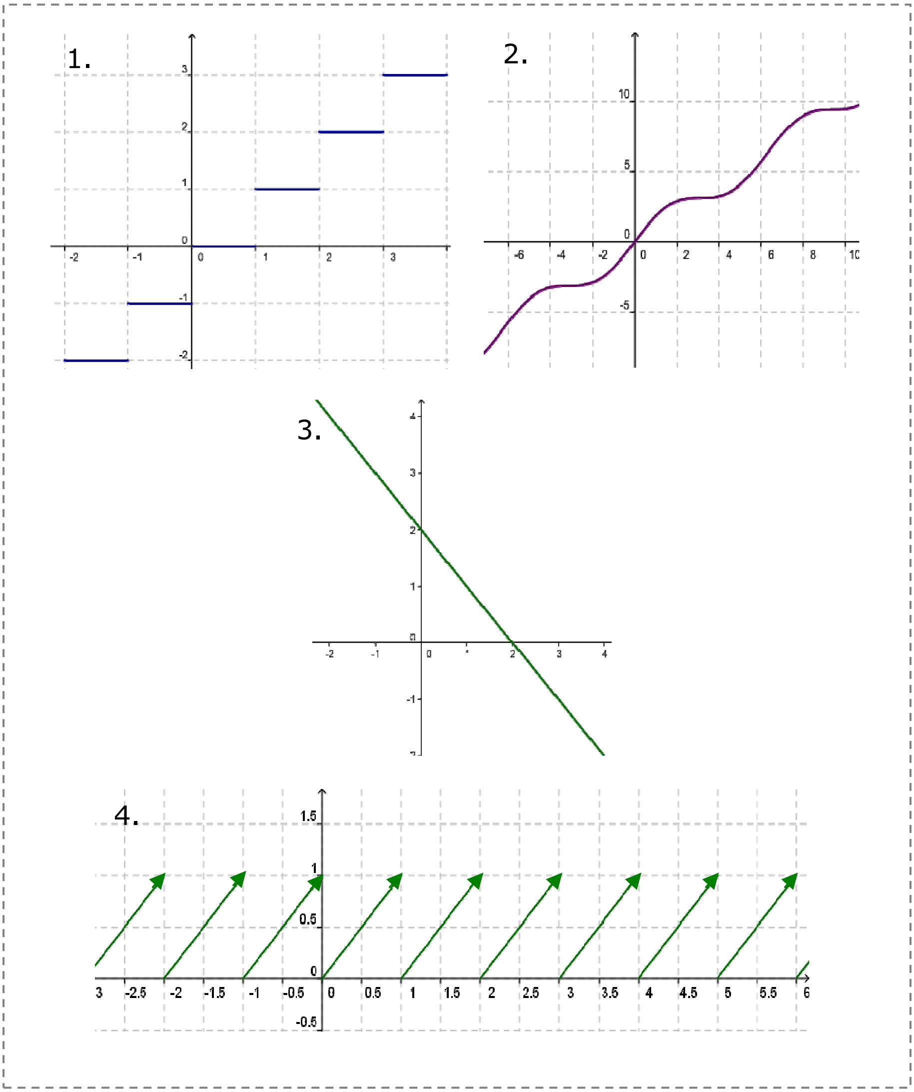


Figura 4. Gráficas de funciones. Actividad 2, Momento 4

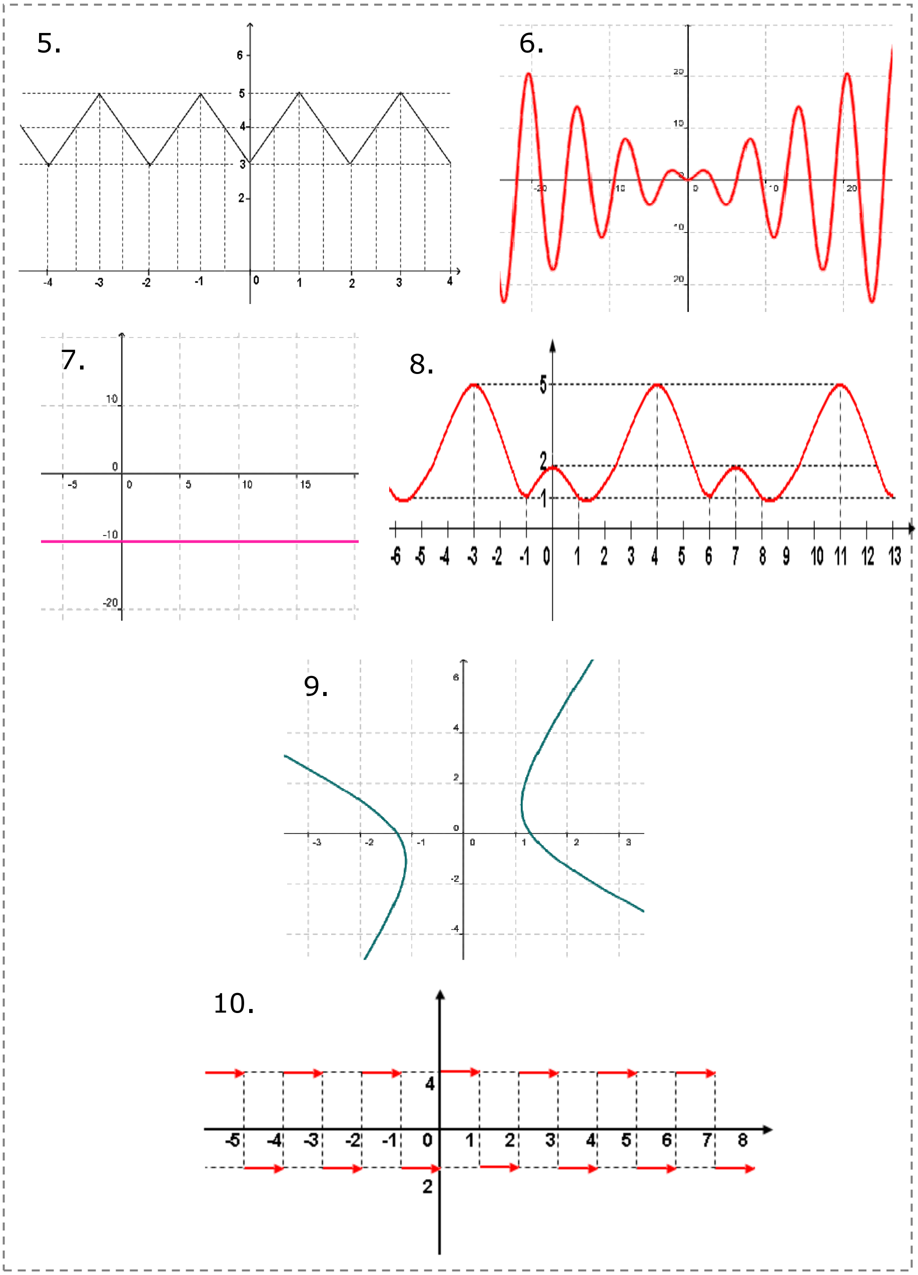
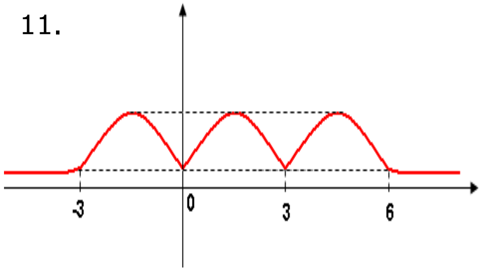


Figura 4. Gráficas de funciones. Actividad 2, Momento 4

11.



12.

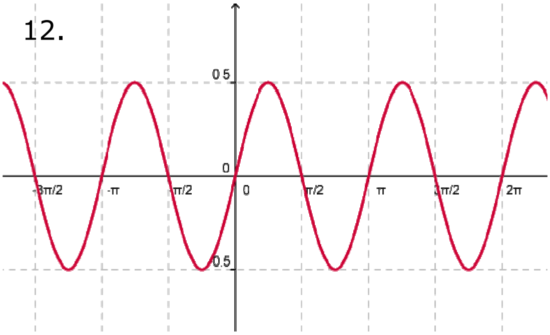


Figura 4. Gráficas de funciones. Actividad 2, Momento 4

<u>Parte 2</u>: Indica cuáles de las funciones anteriores son periódicas. Indica su período en los casos que sea posible.

Actividad 3

a. Investiga si las funciones seno, coseno y tangente son periódicas y en caso de ser posible indica su período.

b. Indica la imagen de -100π y 201π en cada una de las funciones anteriores.

La secuencia de actividades realizada bajo este enfoque podría pensarse influida por los aportes de la perspectiva socioepistemológica, pues intenta abarcar las cuatro dimensiones: didáctica, cognitiva, epistemológica y social en la construcción del conocimiento.

La misma tiene como hilo conductor a la práctica de predecir. Esto es, la predicción se presenta como el móvil que genera y norma la construcción de conocimiento. En las actividades 1 y 2 propuestas se parte de una actividad de predecir (hallar imágenes que no puedan extrapolarse directamente de la gráfica) y después investigar sobre la periodicidad, para ver cómo la práctica de predecir sirve para atribuir significado a la periodicidad. Así, "la predicción, como práctica social, nos está brindando un contexto argumentativo en el que el conocimiento matemático emerge como respuesta a los problemas que como humanos nos planteamos" (Buendía, 2004, p. 45).

A su vez se constata, en Buendía (2006), que los modelos de predicción en las funciones periódicas intervienen caracterizaciones locales (ya que se necesita de la especificación del estado inicial de una función) y globales (ya que se necesita conocer su comportamiento para poder hacer predicciones en un instante posterior o anterior). Mientras que por ejemplo desde un enfoque clásico de la didáctica solo se toma en cuenta la característica local en la construcción de dicho concepto.

Al elaborar estas actividades se tuvo en cuenta que tradicionalmente este tema es presentado a través del estudio de las funciones trigonométricas, no haciendo referencia a la periodicidad en otro tipo de funciones. Por lo que la periodicidad parece no tener relevancia por sí misma fuera del comportamiento repetitivo de las funciones trigonométricas. Por otro lado, lleva a considerar que cualquier situación que pueda modelarse a través de este tipo de funciones sea periódica.

> Una concepción limitada de la periodicidad como ésta favorece una errónea generalización en el discurso escolar hacia afirmaciones como *'cualquier función que tenga forma de seno (o coseno) resulta periódica'.* El significado que parece estar sustentando esta generalización es, nuevamente, que lo periódico significa cualquier tipo de repetición (Buendía, 2004, p. 35).

De hecho, históricamente las funciones trigonométricas fueron estudiadas sin tomar en cuenta el aspecto periódico de las mismas.

Aunque en general se vea la periodicidad ligada a las funciones trigonométricas, por lo que pareciera que siempre se haya visto así, hasta el siglo XVIII estas fueron tratadas de manera independiente de su propiedad periódica. Recién con Euler en 1748 se da un tratamiento formal y completo de las funciones trigonométricas definiéndolas como funciones numéricas y no como líneas de círculos, discutiendo varias de sus propiedades, entre ellas la periodicidad.

Por otro lado, generalmente la periodicidad de una función aparece ligada al comportamiento repetitivo de la misma, independientemente del tipo de repetición presente, dando lugar a que los estudiantes consideren funciones periódicas algunas que no lo son (como es el caso de la función cuya expresión es $f(x) = x.sen(x)$). Esto se debe a que conciben a la periodicidad como un proceso y no como un objeto.

Desde este enfoque se plantea que tanto la definición analítica como el hecho de considerar la periodicidad como repetición gráfica, no tienen para el alumno un significado funcional, impidiendo de este modo la construcción de un conocimiento articulado. Es por esto que se consideró no dar la definición analítica, puesto que no es un marco de referencia suficiente para que el estudiante pueda describir lo periódico, ya que puede nombrar dicha definición sin tener claro la generalidad de esta en un contexto distinto al continuo.

En el desarrollo de las ciencias ha jugado un papel importante el carácter periódico de los fenómenos naturales. El comportamiento repetitivo de dichos fenómenos despertó el interés del hombre; ya desde la Antigüedad la periodicidad de los fenómenos celestes vinculó la práctica empírica con la teoría de la predicción. Como ya mencionamos, antes de la formalización teórica, culturas como la babilónica, la egipcia, la maya, la azteca o la inca, se valían de lo periódico para realizar predicciones. Además, la práctica de la predicción a través de lo periódico es usada también dentro del campo de las ciencias físicas puesto que intenta adelantarse a los acontecimientos y determinar leyes, y esto fue lo que se rescató para la elaboración de la secuencia.

REFLEXIONES FINALES

Este trabajo brinda ciertas estrategias didácticas para el abordaje de un mismo tema, en este caso la periodicidad de funciones, ya que ejemplifica las diferencias existentes entre los diferentes momentos de la Matemática Educativa, no perdiendo de vista que se trata de un ejercicio teórico, pues en la práctica docente los límites se disipan y los enfoques se interrelacionan. Asimismo, se considera valioso pues permite acercar el trabajo de investigación a la práctica docente. Si bien es posible encontrar variados trabajos de investigación bajo diferentes enfoques, no siempre resulta evidente su adaptación a la currícula escolar.

Durante la elaboración de este trabajo fuimos revisando nuestra práctica docente, observando que en nuestras clases ponemos en juego distintos aspectos de cada enfoque, no siempre siendo conscientes de ello.

El trabajo invita en cierta forma a reflexionar y repensar nuestras propuestas didácticas, y refleja cómo podemos fundamentar nuestras elecciones didácticas dentro de un determinado marco teórico en la Matemática Educativa.

REFERENCIAS

A.N.E.P, C.E.S. (2010). *Programa de Matemática Primer año Bachillerato. Reformulación 2006 – Ajuste 2010.* Recuperado el 10 de octubre de 2014 desde http://www.ces.edu.uy/ces/images/stories/reformulacion06/ajustesprogmat2010/ajustes2010progmat4ref2006.pdf

Astronomía en Babilonia. (sf). Recuperado el 7 de agosto de 2012 desde http://www.astromia.com/historia/astrobabilonia.htm

Buendía, G. (2004). *Una epistemología del aspecto periódico de las funciones en un marco de prácticas sociales (un estudio socioepistemológico)*. Tesis de Doctorado no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. México.

Buendía, G. (2006). Una socioepistemología del aspecto periódico de las funciones. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *9 (2)*, 227-251.

Cantoral, R. y Farfán, R. (2003). Matemática Educativa: una visión de su evolución. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *6 (1),* 27-40.

Cólera, J. y de Guzmán, M. (1998). *Bachillerato, Matemática 2*. Madrid: Anaya.

Fases lunares (sf). Recuperado el 5 de agosto de 2012 desde http://www.tutiempo.net/luna/fases_8_2012.htm.

Ochoviet, C. y Olave, M. (2005). *La Didáctica de la Matemática como disciplina científica*. Material elaborado para las Guías del curso Análisis del Discurso Matemático Escolar, documento interno del Departamento de Matemática, Consejo de Formación en Educación, Uruguay.

Vinner, S. (1991). The rol of definitions in the teaching and learning of Mathematics. En Tall, D. (Ed.) *Advanced Mathematical Thinking*, 65-81. Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

EL SENTIDO DE LOS SÍMBOLOS Y LAS ACTIVIDADES DE ENSEÑANZA

Camila Padilla, Patricia Navarro, Cecilia Corujo, Cristina Ochoviet

Introducción

Presentamos actividades de enseñanza para el nivel medio orientadas a promover el desarrollo del sentido de los símbolos (Arcavi, 1994, 2007). Es el propio Arcavi quien sugiere que su caracterización del sentido de los símbolos puede ser útil como marco para investigar el aprendizaje o como herramienta para diseñar la enseñanza. Es esta segunda opción la que consideramos en este trabajo: el sentido de los símbolos es el marco que orienta y permite dar forma al diseño.

Estos diseños surgen del trabajo realizado en la clase de Didáctica de un grupo de estudiantes de cuarto año del Profesorado de Matemática en una metodología de trabajo que entiende a la clase de Didáctica como laboratorio para la creación de situaciones. Es importante aclarar que los diseños responden a un ejercicio de creación teórico sometido al análisis crítico de los integrantes de la clase de Didáctica: estudiantes y docente, pero no fueron sometidos al análisis en situaciones prácticas de enseñanza. Queremos comunicar entonces el proceso de creación de actividades orientadas por un marco teórico pues, a partir de nuestra experiencia, observamos que es una actividad que los docentes realizan pensando más que nada en los contenidos a enseñar y no tanto en marcos teóricos que abarquen las problemáticas relativas al aprendizaje de dichos contenidos.

EL SENTIDO DE LOS SÍMBOLOS

El concepto de *sentido de los símbolos* propuesto por Arcavi (1994, 2007) refiere a una serie de habilidades relacionadas al manejo y conocimiento de los símbolos que el autor describe por medio de ocho comportamientos que se explican a continuación:

1. Amigabilidad con los símbolos. Es la capacidad de recurrir a los símbolos cuando estos sean necesarios o se presenten como la mejor herramienta para resolver un problema, así como la capacidad de abandonarlos cuando haya un mejor camino.
2. Manipular y leer a través de los símbolos. Refiere a la capacidad dual de poder desprendernos del significado de los símbolos al manipularlos y a la capacidad de interrumpir el procedimiento mecánico de manipulación para inspeccionar el significado de los símbolos en ese contexto particular con el objetivo de sacar conclusiones, detectar errores, etc.
3. Conciencia de que es posible crear expresiones simbólicas con un objetivo determinado o que expresen datos determinados.

4. Manipular expresiones para convertirlas en otras equivalentes que muestren propiedades o significados que las primeras no podían.
5. Elegir los símbolos de forma conveniente al modelar una situación.
6. Manipular los símbolos en forma flexible no guiado solamente por automatismos. Por ejemplo, la capacidad de evitar los procesos circulares.
7. Analizar los símbolos en retrospectiva. Esto implica devolver el significado a los símbolos en medio de la resolución de un problema con el objetivo de obtener datos relevantes.
8. Comprender los diferentes roles que cumplen los símbolos en diferentes contextos.

IMPLICANCIAS PARA LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA

Cada marco teórico permite posicionar la reflexión sobre ciertos objetivos de la enseñanza de la matemática en los que antes no nos habíamos detenido a pensar y también sucede que otras veces arrojan luz sobre problemas que habíamos detectado en nuestra práctica pero no podíamos explicar.

El planteo realizado por Arcavi (1994, 2007) nos aporta en estos dos sentidos. Fomentar que los alumnos desarrollen el sentido de los símbolos implica para el docente diseñar actividades y ejercicios que pongan en evidencia distintos aspectos del trabajo algebraico, mostrando que es una herramienta útil, que facilita la resolución de ciertos problemas, en lugar de imponerla como método de resolución. Nos alerta acerca de que el trabajo en la clase de álgebra no debería centrarse en el desempeño en la manipulación algebraica despojada de sentido que jerarquiza el saber operar con expresiones algebraicas.

A su vez, el planteo de este autor se suma a otros en la misma línea, como por ejemplo las recomendaciones sobre el aprendizaje del álgebra de la NCTM (1991), y todos aportan a abrir y contestar preguntas que tienen buen tiempo de haber sido propuestas: ¿Cuál es el verdadero objetivo de la enseñanza del álgebra? ¿Qué quiere decir *saber* álgebra? ¿Es la habilidad de manipular expresiones algebraicas y operar con ellas el centro de la educación algebraica?

La propuesta de Arcavi (1994, 2007) deja en evidencia que poseer los conocimientos de cómo operar con expresiones algebraicas no alcanza. Existen otras habilidades que son tanto o más importantes como el aprender a establecer relaciones a través de los símbolos, poder interpretarlas, transformarlas con objetivos específicos y crear expresiones que se adecuen a ciertos datos o condiciones.

Así, uno de los propósitos de la enseñanza de la matemática es lograr abrir los caminos que posibiliten el desarrollo de todas estas capacidades en los estudiantes. Este planteo apoya la idea de dejar un poco de lado los procesos mecánicos y rutinarios en el aprendizaje del álgebra para favorecer procesos de mayor complejidad que se sirvan de esa capacidad en el trabajo con los símbolos.

DISEÑO DE ACTIVIDADES

A continuación presentamos distintas actividades que se enmarcan en cada uno de los comportamientos reseñados por Arcavi (1994, 2007) y su correspondiente análisis a priori. Es importante remarcar que una actividad no genera por sí sola en el estudiante el desarrollo de las capacidades anteriormente mencionadas. Es la dirección que el docente le da a la discusión, la conducción de la clase, la forma en que esta se organiza, las condiciones en las que la actividad se propone, los recursos disponibles, entre otros asuntos, los que van a definir el impacto en el aprendizaje (Watson y Mason, 2007).

Comportamiento 1 – amigabilidad con los símbolos

¿Qué número aumentado en uno es igual a su triple disminuido en cuatro?

Esta actividad pretende ayudar a desarrollar el primer comportamiento: amigabilidad con los símbolos. En este ejercicio se plantea un acertijo para encontrar un número que cumpla ciertas condiciones. Mediante el planteo de una ecuación ($a + 1 = 3a - 4$) la resolución es sencilla y se arriba al número en cuestión que es 2,5.

Es posible que por estar planteada la actividad en forma de acertijo, los estudiantes no recurran a los símbolos de forma inmediata; es probable que intenten resolverla por otros medios, como por ejemplo por ensayo y error. Sin embargo, como el número solución no es entero, los intentos no llevarán rápidamente a la respuesta. Se espera, incluso, que algunos alumnos se apresuren a decir que el problema no tiene solución y que no existe un número que cumpla con las condiciones que se piden.

Estos primeros intentos se pueden aprovechar para desarrollar el sentido de los símbolos en el sentido de hacer ver a los estudiantes cómo, a veces, utilizar símbolos para modelar situaciones o resolver problemas, es más eficiente que utilizar otros caminos.

En primera instancia el docente planteará la actividad y se dará a los estudiantes algunos minutos para que intenten resolverla. Las respuestas esperadas ya se expusieron. El docente puede acompañar este proceso preguntando a los estudiantes en cada caso por qué piensan que el acertijo no puede resolverse, si no creen que puede haber alguna otra forma de intentar resolverlo, por qué solo han intentado el tanteo con números naturales o enteros.

Lo deseable sería que al menos un estudiante planteara la ecuación para intentar llegar al resultado. No importa tanto que la ecuación planteada sea la correcta sino que surja la idea de abordar el ejercicio desde ese enfoque.

Una vez que esta idea aparezca, se espera que la resolución del problema sea rápida. Se partirá de la ecuación proporcionada por los alumnos, se verificará que expresa correctamente las relaciones que el enunciado plantea y se resolverá. Con el resultado a la vista, el docente puede volver a hacer las preguntas antes realizadas. Antes de que surgiera la idea de plantear la ecuación, ¿cómo habían intentado resolver la situación? ¿Por qué no encontraron la solución? ¿Podrían haberla encontrado si hubiesen seguido con el método que estaban utilizando? Se pretende promover la reflexión en cuanto a los procedimientos disponibles para enfrentar una actividad.

Comportamiento 2 – manipular y leer a través de los símbolos

Federico quiere comprar para su cuarto una televisión que cuesta \$4290. Ya lleva ahorrados \$1378 y piensa completar el dinero que le falta con los \$280 que su abuela le regala cada fin de semana.
Para saber cuántas semanas le faltan para poder comprarse la televisión, Federico planteó la siguiente ecuación donde s representa el número de semanas: $280s + 1378 = 4290$.
¿Cuántas semanas debe esperar Federico para poder realizar su compra?

La actividad se plantea en un contexto tal, que no basta con resolver la ecuación dada para responder a la pregunta. Si la ecuación se resuelve correctamente se llegará a $s = 10{,}4$. Sin embargo, la respuesta que se busca por parte de los estudiantes es que Federico deberá esperar 11 semanas para poder comprar el televisor.

El objetivo de la actividad es ayudar a desarrollar el segundo comportamiento que Arcavi (1994) señala: poder manipular las expresiones rápidamente olvidando el significado de los símbolos mientras operamos con ellos, pero detenerse en alguna instancia (en este caso la instancia final) a inspeccionar ese significado de los símbolos que en otras etapas de la resolución dejamos de lado.

Es posible que de no detenerse a inspeccionar el resultado al que han llegado y su significado, algunos estudiantes resuelvan la ecuación y al final recuadren la última igualdad. Algunos otros pueden llegar a contestar que Federico tiene que esperar 10,4 semanas.

Desarrollar el sentido de los símbolos, en este sentido, implica generar en los estudiantes la necesidad de discutir la coherencia de las respuestas a las que se ha llegado, volver al significado de la ecuación que se planteó al comienzo y a lo que representa lo que se plantea como incógnita.

En el proceso de resolución el docente ayudará a los estudiantes a despejar la incógnita de la ecuación. Es conveniente que esta se resuelva correctamente para que luego la discusión pueda centrarse en cómo traducir la solución que arroja la ecuación para responder correctamente la pregunta del problema.

En esta actividad la intervención importante del docente llega a la hora de la puesta en común. Cuando todos los estudiantes hayan terminado su abordaje se les preguntará a distintos alumnos a qué llegaron y se espera la variedad de respuestas mencionadas anteriormente.

Se observará junto a los estudiantes que Federico recibe 280 pesos cada fin de semana. Al recibir esa cantidad de dinero no es posible que en 10,4 semanas haya alcanzado la cantidad de dinero necesario para comprar el televisor sino que deberá esperar que se cumplan las 11 semanas para recibir los últimos 280 pesos.

Otra actividad propuesta es la siguiente:

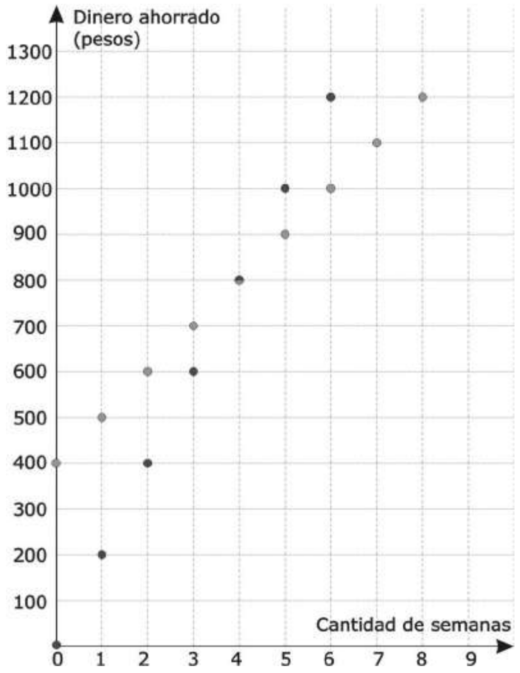
> ¿Cuántas raíces reales tiene la función *f* definida de R en R tal que $f(x) = (x-3)^2 + 2$?

Es probable que los alumnos se precipiten sobre la expresión algebraica para transformarla en otra expresión equivalente de la forma ax^2+bx+c para luego plantear la ecuación $ax^2+bx+c = 0$ y aplicar la fórmula resolvente o estudiar su discriminante.

La intervención docente podría consistir en conducir a los estudiantes, por medio de preguntas adecuadas, a que realicen un análisis a priori de la expresión algebraica dada, para leer a través de los símbolos y concluir que se está ante la suma de un cuadrado más un real positivo, lo que será positivo para cualquier valor real de *x* que se tome.

Comportamiento 3 – diseñar expresiones que expresen información dada o deseada

> En una salida al centro, Romina y Paula vieron una campera que les resultó preciosa y ambas decidieron que querían comprársela, aunque en colores diferentes. Las dos amigas comenzaron a ahorrar dinero para poder comprarse la campera.
>
> La gráfica que se muestra a continuación, muestra la cantidad de dinero ahorrado por Romina y Paula en el correr de las semanas, hasta completar la cantidad requerida.



a. ¿Cuál es el precio de la campera?

b. ¿En qué momento tenían Romina y Paula la misma cantidad de dinero ahorrado?

c. Deduce una fórmula para la gráfica correspondiente a los ahorros de Romina (puntos de color más oscuro).

d. Indica cuál de las siguientes fórmulas se ajusta a la gráfica de la cantidad de dinero ahorrado (a) por Paula en función de la cantidad de semanas (s).

1) $a(s) = 150s$

2) $a(s) = 100s + 400$

3) $a(s) = 200s + 400$

Esta actividad pretende contribuir al desarrollo del comportamiento número 3 señalado por Arcavi: la capacidad de diseñar relaciones simbólicas que expresen cierta información dada o deseada. Esto aparece con claridad en las partes *c* y *d*, donde se debe deducir y seleccionar una fórmula para las gráficas, lo que deberá hacerse utilizando la información que aporta la gráfica. Sin embargo las respuestas difícilmente surjan de forma inmediata (sobre todo en la parte *c*), con lo que será necesario realizar pasos intermedios y crear estrategias para lograr el objetivo deseado.

Las partes *a* y *b* se responderán de forma individual y se realizará una puesta en común. Para las partes *c* y *d* los estudiantes podrán trabajar en grupos con el objetivo de potenciar las ideas que puedan aparecer. Para resolver la parte *c*, la sugerencia que puede realizar el docente es la de elaborar una tabla de valores que refleje los datos presentados por la gráfica.

Esto llevaría a obtener lo siguiente:

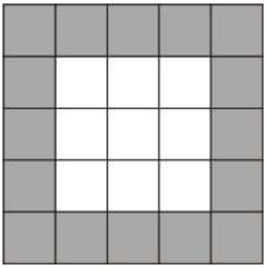
Romina	Cantidad de semanas	0	1	2	3	4	5	6
	Dinero ahorrado	0	200	400	600	800	1000	1200

A partir de la tabla se puede deducir la fórmula $d(s) = 200s$ para calcular la cantidad de dinero ahorrado (d) por Romina según la cantidad de semanas (s) transcurridas.

Al momento de exponer las respuestas y caminos realizados por los diferentes grupos para llegar a la fórmula que se solicitaba, se hará hincapié en la necesidad de analizar los datos que se tienen y considerar la posibilidad de transformarlos o expresarlos de otra manera para que resulten de mayor utilidad.

Comportamiento 4 – reconocer en expresiones equivalentes significados no equivalentes

Trabajando en clase, Lucía encontró la siguiente fórmula para contar la cantidad de cuadraditos coloreados que contiene un cuadrado cuadriculado con n cuadraditos de lado (n natural mayor o igual a 3): $n^2 - (n - 2)^2$.



Una compañera de Lucía, que había utilizado una fórmula diferente, observó su fórmula y dijo "entonces la cantidad de cuadraditos que hay en el contorno es siempre un múltiplo de cuatro".
¿Será siempre cierto? ¿Cómo puede averiguarlo Lucía a partir de la fórmula que ella dedujo?

Con esta actividad[1] se pretende desarrollar la capacidad de manipular expresiones simbólicas para obtener nuevos datos que las primeras no nos aportan.

[1] Esta actividad está inspirada en las sugeridas en Sessa (2005).

Se parte de un supuesto problema que se está resolviendo en clase en el que se deben deducir fórmulas que expresen ciertos patrones; en este caso, la cantidad de cuadraditos que hay en el contorno de un cuadrado cuadriculado.

En esta actividad particular, hay una gran variedad de fórmulas que expresan el patrón referido al número de cuadraditos coloreados en el borde. En la gran mayoría de ellas, como pueden ser por ejemplo $4(n - 1)$ o $4n - 4$, resulta bastante evidente que cualquier valor numérico que arrojen esas expresiones será siempre un múltiplo de cuatro pero en la expresión a la que llegó Lucía no es para nada evidente. Para poder llegar a concluir que la afirmación de la compañera de Lucía es verdadera, se deberán realizar manipulaciones a la fórmula que Lucía dedujo para encontrar otra equivalente en la que el resultado pueda ser interpretado con mayor facilidad.

Es posible que al comienzo los estudiantes intenten sustituir la n por diferentes valores en la expresión de Lucía para constatar que esos valores numéricos que se obtienen son efectivamente múltiplos de cuatro; pero esto no será suficiente para demostrar que esto sucede para cualquier n en las condiciones del problema.

Para enriquecer el trabajo se puede preguntar a los estudiantes cómo habrá sabido la compañera de Lucía que la cantidad de cuadraditos coloreados siempre es múltiplo de cuatro, si la expresión equivalente a la que se llega expresa también la cantidad de cuadraditos en el contorno y cómo pudo haberse generado la misma (esto está relacionado con el comportamiento número 7).

Comportamiento 5 – la elección de los símbolos

Laura le preguntó a su profesora de matemática cuál es su edad y su profesora, para hacerla pensar bastante, le respondió: toma cinco veces la edad que tendré dentro de cuatro años, réstale cinco veces la edad que tenía hace tres años y esa es exactamente la edad que tengo.
¿Qué edad tiene la profesora de Laura?

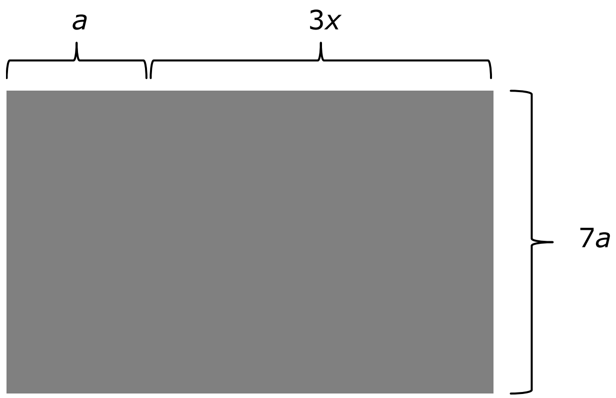
Esta actividad tiene por objetivo focalizar en la elección de los símbolos a la hora de resolver un problema. En este caso se trata de un acertijo que puede resultar confuso pues requiere la consideración simultánea de varias relaciones aritméticas para el planteo de una ecuación que permita resolver el problema.

En primer lugar, hay varias cantidades desconocidas: la edad en cuestión, la edad que tendrá en cuatro años y la que tenía hace tres. Aquí se presenta el mayor problema: cómo expresar cada una de estas cantidades desconocidas.

La principal dificultad reside en decidir cuál será la incógnita más sencilla a considerar para luego expresar las cantidades en función de ella. Puede hacerse un análisis de las situaciones posibles para luego elegir una de las opciones y evaluar con los alumnos qué puede significar que una ecuación es "más sencilla" que otra.

Comportamiento 6 – habilidades flexibles en la manipulación de los símbolos

¿Cuál debe ser el valor de *x* para que este rectángulo sea un cuadrado?



Esta actividad tiene por objetivo ayudar al desarrollo de la habilidad número 6 planteada por Arcavi: la flexibilidad en la manipulación de los símbolos.

Para resolverla, primero debe crearse una ecuación (lo que podríamos vincular con el comportamiento número 3, en el sentido de que estamos creado una expresión que exprese la información dada por el ejercicio). Luego, esta ecuación debe resolverse teniendo en cuenta que la incógnita de la misma es *x* (con lo que también entra en juego el comportamiento número 8: reconocer los símbolos en diferentes contextos).

Se espera que los estudiantes planteen la ecuación $a + 3x = 7a$. Esta ecuación requiere que el alumno comprenda los diferentes roles que juegan cada uno de los literales en el ejercicio.

Es posible que los estudiantes duden qué es lo que se debe despejar. También puede suceder que lleguen a la igualdad deseada pero no comprendan su significado.

Comportamiento 7 – los símbolos en retrospectiva

La expresión $8a + 6$ corresponde al perímetro de un cuadrado de lado variable con la condición de que su medida es siempre un número natural.

1. Indica tres posibles perímetros que correspondan a diferentes valores de a.
2. Modifica la expresión para que quede de manifiesto la medida del lado del cuadrado en función de a.
3. Indica tres posibles medidas de los lados que correspondan a diferentes valores de a.
4. Las medidas que presentaste en la parte 3, ¿corresponden a números naturales?
5. ¿a puede tomar valores naturales?

En esta actividad se ponen de manifiesto los comportamientos 7 y 4, ya que por un lado surge la necesidad de revisar los significados de los símbolos durante el desarrollo de un procedimiento o inspección de los resultados y, por otro, la información que brinda la expresión original y la obtenida en la parte 2, son diferentes**.** Si observamos la expresión original responderíamos a la pregunta 5 afirmativamente, no así al observar la expresión que deja de manifiesto el lado del cuadrado. Para llegar a lo que se pide debemos tener en cuenta que el perímetro de un cuadrado es 4*l*, donde *l* representa la medida del lado del cuadrado. Habría que modificar la expresión 8*a* + 6 para reescribirla con un factor 4. Si extraemos 4 como factor común obtenemos la expresión $4\left(2a+\frac{6}{4}\right)$ o $4\left(2a+\frac{3}{2}\right)$ y de aquí concluimos que el lado del cuadrado es $2a+\frac{3}{2}$. De esta última expresión se deduce fácilmente que *a* no puede tomar valores naturales porque si así fuera, los lados del cuadrado no lo serían.

Comportamiento 8 – símbolos en contexto

1. ¿Para qué valores de *a* la ecuación *ax* = 18 tiene raíz entera?
2. ¿Para qué valores de *a* la ecuación 3*x* + *a* = 15 tiene raíz natural?
3. ¿Para algún valor de *a* tienen ambas ecuaciones una raíz natural par?
4. Indica, para cada uno de los casos anteriores, una ecuación que corresponda a un valor de *a* que cumpla la condición correspondiente y resuélvela.

En esta actividad se busca poner en evidencia el comportamiento 8 ya que será necesario identificar los diferentes roles que cumplen a y x en las ecuaciones. a es un parámetro que debe cumplir la condición que se indica en cada ítem, condicionando a x (para cada a que cumpla las condiciones requeridas habrá un valor de x, raíz de la ecuación).

En la parte 1 podemos observar que para obtener una raíz entera, a tiene que ser divisor de dieciocho. En la parte 2, $15 - a$ tiene que ser múltiplo de tres y mayor o igual que cero, por lo tanto a tiene que ser múltiplo de tres y menor o igual a quince. En la parte 3 debemos restringir los valores que obtuvimos en las partes 1 y 2 para que se cumpla la condición planteada. El docente debería centrar su trabajo en procura de que los estudiantes identifiquen los roles de las dos variables, la función que cumplen y en qué forma se relacionan.

EL EJERCICIO DE DISEÑAR ACTIVIDADES CON INTENCIÓN

Todos los docentes adaptan, crean o extraen actividades de diferentes fuentes, con el objetivo de enseñar. Es habitual que el proceso de adaptación o creación esté guiado, fundamentalmente, por el contenido a enseñar como máximo criterio que orienta esas tareas. Este trabajo pone en evidencia que considerar solamente el contenido a enseñar podría estar posponiendo los distintos usos y habilidades que requiere el darle sentido al trabajo con los símbolos, como fue el caso que abordamos. La propuesta planteada es inmensamente rica no solo porque orienta el diseño, la discusiones en la clase y los asuntos a jerarquizar sino también porque ofrece al docente una sistematización de los distintos comportamientos a desarrollar en el trabajo con los símbolos y, por qué no, la posibilidad de encontrar nuevos sentidos, que tal como Arcavi (1994) lo advierte, podrían ayudar a enriquecer y completar la lista, no acabada, que él ofrece.

REFERENCIAS

Arcavi, A. (2007) El desarrollo y el uso del sentido de los símbolos. Conferencia realizada como Profesor visitante, CRICED, Tsukuba University- Japan. Recuperado el 3 de noviembre de 2014 desde http://ebookbrowse.com/arcavi05-el-desarrollo-y-el-uso-del-sentido-de-los-simbolos-doc-d37871752

Arcavi, A. (1994). Symbol sense: informal sense-making in formal mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 14(3), 24-35. Recuperado el 3 de noviembre de 2014 desde http://www.fisme.science.uu.nl/fisme/nl/projecten/minisymposiumalgebraict/Arcavi1994FLM.pdf

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (1991). *Estándares curriculares y de evaluación para la educación matemática*. Sevilla: SAEM Thales.

Sessa, C. (2005). *Iniciación al estudio didáctico del Álgebra. Orígenes y perspectivas*. Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Watson, A. y Mason, J. (2007) Taken-as-shared: a review of common assumptions about mathematical tasks in teacher education. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 10, 205-215.

¿POR QUÉ HACEMOS LO QUE HACEMOS EN EL AULA? ANÁLISIS CRÍTICO DEL DISCURSO DE UN PROFESOR EN TORNO AL TEMA TRIGONOMETRÍA

FRANCA LEVIN, VERÓNICA MOLFINO

INTRODUCCIÓN

En el marco de la asignatura Análisis del Discurso Matemático Escolar[1], se nos propuso a los estudiantes analizar el discurso de un docente específico, entendido como una acción social, utilizando el Análisis Crítico del Discurso (ACD) como herramienta metodológica (Van Dijk, 1999). En este escrito presentamos el análisis del discurso sobre Trigonometría emitido por un profesor de enseñanza media, en una clase de 3er año de ciclo básico en un liceo privado.

Analizamos programas, libros de texto (los utilizados como referencia por el profesor y otros no utilizados por él), lo observado en una clase concreta y entrevistamos al docente con el objetivo de responder la pregunta ¿Por qué el docente hace lo que hace en su clase, cuando trabaja el tema Trigonometría?

[1] Correspondiente al último año de la carrera de Profesor de Matemática del Consejo de Formación en Educación-IPA (Montevideo, Uruguay).

ANTECEDENTES Y MARCO TEÓRICO

Desde una visión socioepistemológica

> Se entiende al *discurso Matemático Escolar* (dME) como la manifestación del conocimiento matemático normada por las creencias del profesor y los estudiantes sobre lo que es la enseñanza y lo que es la matemática, por lo que dicta el currículum y por las necesidades e intereses de todos los actores de la noosfera (entendida en el sentido en que la desarrolla Chevallard (1991) en el contexto de la teoría de la Transposición Didáctica). (Molfino y Buendía, 2011, p. 128).

El dME es lo que estructura la acción educativa en todas sus componentes y está constituido por diversos factores: diálogos internos del aula, programas oficiales, libros de texto (contemporáneos y de antaño), formación del docente, pautas escritas y orales de las autoridades educativas, escritos científicos, páginas web de difusión del concepto a trabajar y todas las manifestaciones relativas al concepto en contextos escolares. En este trabajo entendemos a dicho discurso como una acción social, en el sentido de Van Dijk (1999) y lo analizaremos según la herramienta metodológica propia de dicha teoría: el *Análisis Crítico del Discurso* (ACD).

Según Van Dijk,

> El ACD es un tipo de investigación analítica sobre el discurso que estudia primariamente el modo en que el abuso del poder social, el dominio y la desigualdad son practicados, reproducidos, y ocasionalmente combatidos, por los textos y el habla en el contexto social y político. (1999, p. 23).

Este tipo de análisis fue desarrollado para explicar diversos problemas sociales mediante el reconocimiento de relaciones de poder; en este escrito proponemos, siguiendo lo propuesto en Molfino y Buendía (2011), su aplicación al ámbito concreto de la Matemática Escolar.

Los docentes continuamente formulamos y reformulamos un discurso con cierta intencionalidad que apunta a objetivos concretos, incidiendo directamente en la construcción de las subjetividades de nuestros estudiantes y consecuentemente, de la sociedad. “El análisis del discurso como acción social evidencia los fines sociales, políticos o culturales del discurso dentro de las instituciones, los grupos o la sociedad y la cultura en general” (Molfino y Buendía, 2011, p. 130). El dME está fuertemente determinado por las relaciones de poder que entran en juego en la actividad educativa: autoridades de la educación, referentes académicos, direcciones y colegas, grupos de padres, autores de libros de texto y todos aquellos que influyeron en la formación del docente, entre otros.

> Es necesario explicitar la intencionalidad con que una persona, miembro de un determinado grupo, escribe un libro de texto, diseña un programa, selecciona o jerarquiza temas para dar en un curso, e incluso la manera de presentarlo. Cada acción discursiva implica un determinado propósito, genera una determinada consecuencia y responde a una determinada representación mental de los acontecimientos. (Molfino y Buendía, 2011, p. 132)

El objetivo de este trabajo es evidenciar cuáles son los grupos de poder que inciden directamente en el discurso de un docente desde este punto de vista y cómo lo hacen. Estas relaciones de poder generalmente quedan escondidas bajo un manto de oscuridad. Es tarea del ACD hacer transparente estas relaciones y la influencia que tienen en el discurso del “dominado”.

ASPECTOS METODOLÓGICOS

Para realizar este análisis se tuvieron en cuenta las planificaciones anuales y de unidad del docente, el programa oficial elaborado por el Consejo de Educación Secundaria, el análisis del libro de texto de referencia así como también la consideración de libros de antaño y extranjeros que pueden llegar a influenciar el discurso; la observación de una clase y entrevistas con el docente para tener un mayor conocimiento de la estructura de la institución, experiencias personales y perspectivas propias. Vale aclarar que la institución en la cual se desempeña el docente es de carácter privado y religioso.

En esta oportunidad analizamos el discurso de un docente del cual destacamos las siguientes características al momento de realizar el estudio (octubre de 2013):

- Continúa sus estudios de formación, aunque son escasas las asignaturas que le restan para egresar.
- Es miembro activo del Instituto GeoGebra Uruguay.
- Ha sido profesor adjunto de docentes de larga trayectoria.
- No ha sido visitado por la Inspección de Matemática desde que comenzó a ejercer la docencia hace tres años.

OBSERVACIÓN Y ANÁLISIS DE UNA CLASE

En clases anteriores a la observada, el profesor había formalizado los conceptos y las definiciones de las razones trigonométricas en un triángulo rectángulo, así como propuesto actividades de aplicación cuyo objetivo era calcular la medida de uno de los ángulos no conocidos de un triángulo rectángulo.

En la planificación de esta clase, y de la unidad en general, se observa una fuerte influencia de la diagramación del programa oficial y del libro de referencia seleccionado por el docente (*Au*[2]). Se desprende la idea de progresividad en el tratamiento de la Trigonometría. Según el docente, *se trabaja con razones trigonométricas en 3º año* por dos razones: la aplicación directa a problemas de cálculo de medidas y ángulos; y como prerrequisito para el estudio posterior de las funciones trigonométricas. Esta idea es justamente la que está presente tanto en los libros de texto como en los programas oficiales del CES.

En la entrevista el docente puntualizó:

> En esa clase particular el objetivo era cómo calcular el ángulo con Trigonometría. Porque lo que habíamos trabajado antes era cómo calcular la medida de los lados sabiendo un ángulo y un lado. Entonces <u>lo que faltaba ver</u> era cómo despejar en esa ecuación que se forma, cuando tengo el ángulo de incógnita. (Comunicación personal, 17 de octubre de 2013).

[2] Se usó la siguiente nomenclatura para referenciar los textos: la minúscula *u* significa que los autores son uruguayos y la mayúscula *A*, *B*, *C* se usa para diferenciar los textos. La minúscula *f* se usa para hacer referencia a libros de texto de origen francés.

Relacionamos esta descripción de objetivos del docente directamente con una diagramación de uno de los libros franceses que se tomaron en cuenta para el análisis (*Af*), lo que llama poderosamente la atención dado que no fue utilizado como referencia por el docente. En el capítulo referente a Trigonometría del libro mencionado se distingue un apartado titulado "*Lo que se espera de mí*" y se especifican dos aspectos:

- Saber calcular la medida de un ángulo en un triángulo rectángulo.
- Saber calcular la medida de un lado de un triángulo rectángulo.

Esto puede ser prueba, a su vez, de la influencia de los libros franceses sobre el currículo uruguayo y las formas establecidas de dar este tema. Esos dos parecerían ser los objetivos fundamentales de todo curso de Trigonometría en 3er año de ciclo básico, ya que es a donde apuntan tanto los libros de texto de referencia como las especificaciones del programa oficial del CES.

En referencia al tema Trigonometría, el programa oficial aclara que "el estudio se limitará a las relaciones seno, coseno, y tangente de un ángulo agudo, las que serán aplicadas en ejercicios de cálculo de medidas de segmentos y ángulos" (CES, 2006).

La expresión subrayada nos pinta de cuerpo entero el discurso hegemónico en cuanto a *lo que se debe dar de relaciones trigonométricas en 3er* año. Esto nos llevaría a pensar que la única forma de presentar y trabajar con las razones trigonométricas es calcular medidas en triángulos rectángulos que de otra forma no podríamos medir. Es decir, parecería haber *una única* forma de trabajar con Trigonometría. Sin embargo, acordamos con Montiel

(2005) que ello no es necesariamente así. Existen otras teorías y enfoques que no están amparadas por los libros de texto recomendados para estudiantes de educación media ni tampoco por las autoridades de la educación a la hora de confeccionar los planes y programas.

A grandes rasgos el trabajo de investigación de Montiel (2005) propone recrear la práctica social de la *anticipación* en el ámbito de la astronomía, reconciliando el estudio de la trigonometría con el estudio de la proporcionalidad. Si observamos los ejemplos y las propuestas de los libros de texto analizados, la proporcionalidad está presente en todas las modelizaciones pero pasa inadvertida, no se considera objeto de estudio.

Con respecto a la metodología de trabajo el docente la definió como "una mezcla entre expositivo y trabajo en grupo". Esta mixtura podría deberse a su propia formación docente, en lo que hace concretamente a las prácticas educativas de sus profesores de asignaturas específicas de Matemática (más de tipo expositivo) y lo que se recomienda en los cursos de didáctica-práctica docente. Si bien esto no fue constatado en entrevista con el docente, lo manejamos como hipótesis ya que es lo que vivenció Franca en su reciente formación, una de las autoras de este artículo y compañera de estudio del profesor observado.

En cuanto a las actividades trabajadas en clase fueron básicamente ejemplos y ejercicios de aplicación. En la ficha de actividades que se entregó a los estudiantes no hay ningún problema genuino; esto es, cuya solución no se desprenda directamente de aplicar lo que se vio en clase. Muchos de estos ejercicios están presentes en los libros de texto franceses y uruguayos que se analizaron, lo que deja entrever la relación de poder que este grupo social ejerce en la actividad docente.

El ser miembro activo del Instituto GeoGebra Uruguay le da cierta ventaja a la hora de trabajar con este tipo de recursos ya que tiene la habilidad y capacidad de realizar actividades llamativas e innovadoras con este software. En el tema Trigonometría puntualmente no se trabajó con las computadoras, a diferencia de cuando se estudió la función polinómica de segundo grado, por ejemplo, según relató en una entrevista. El docente indica, a modo de explicación, que al tratarse de un colegio privado los estudiantes no cuentan con las computadoras portátiles del Plan Ceibal y por otro lado, la sala de informática del colegio solo está disponible un día a la semana, lo cual dificulta aún más su uso. Estas limitaciones de infraestructura influyen en el discurso del docente, ya que no trabaja con las computadoras como sería de su interés. Nosotras manejamos otra posible explicación del hecho de que él no necesitó el uso de herramientas informáticas para este tema: el tipo de actividades que plantea. Al tratarse de actividades de cálculo de magnitudes en contextos estáticos, basta con la propuesta escrita tradicional (tal como se presenta en la mayoría de los libros de texto); por ello no busca para este tema otro tipo de actividades que justifiquen el esfuerzo del uso de las computadoras, como sí lo hizo para el dictado de otros temas del programa.

Un aspecto que se menciona en los objetivos generales del curso en la planificación anual del docente es "lograr condiciones efectivas de trabajo en grupo y promover espacios de discusión y razonamiento, fortaleciendo el relacionamiento entre pares, la formación ciudadana de los estudiantes y la profunda asimilación de conceptos." Este aspecto pudo constatarse en la visita de clase, apreciándose una buena cooperación y dinámica de grupo. El docente promueve este espacio de participación de los estudiantes proponiendo actividades para realizar en grupos y discutir juntos la solución.

GRUPOS DE PODER

Distinguimos cinco grupos de poder que influyen en el discurso del docente analizado.

- *Autoridades educativas*

Cuando hablamos de autoridades de la educación nos referimos, puntualmente a los Inspectores de Matemática del Consejo de Educación Secundaria (CES) que son los representantes más directos de las autoridades educativas en lo concerniente al dME. Una de las tareas de dicho grupo es visitar a los docentes y realizar un informe otorgando una calificación que será determinante a la hora de elegir una futura institución de trabajo. Esto determina una clara relación de poder entre Inspectores y docentes. Esto lleva a los docentes a tener especial cuidado en mantener el registro del curso, realizar planificaciones anuales y por unidad, mantener al corriente la libreta del profesor y atender las pautas didácticas de los Inspectores, específicamente a lo que hace al contenido, su jerarquización, secuenciación y forma de presentación.

Estos aspectos que ejercen el poder sobre la tarea de los docentes se suman lógicamente a la confección de los planes y programas curriculares, los cuales determinan el contenido y la forma en que los conceptos deben trabajarse dentro del aula. Reconocemos aquí una de las mayores influencias por parte de los Inspectores en la tarea de los docentes, en particular del docente observado. En el tema Trigonometría puntualmente observamos cómo las recomendaciones de la inspección a través del programa son asumidas y reconocidas como propias por parte del docente.

En este caso particular, el docente comenzó a dar clase hace tres años y todavía no ha sido visitado por Inspección, pero es consciente que en cualquier momento puede serlo, determinando así su futuro laboral a corto y mediano plazo, lo que lo motiva a adecuarse lo máximo posible a las pautas de este grupo.

- *Dirección del Colegio*

Según expresa el profesor, en esta institución el equipo directivo está muy presente en la tarea docente, apreciándose un seguimiento continuo de la tarea de todos los profesores; "*no te deja estar*" describe en la entrevista (Comunicación personal, 17 de octubre de 2013). Siente la continua presión de elevar reportes, aunque sean verbales, al equipo directivo.

También existe otro actor que se encarga del seguimiento del grupo, que es la figura de adscripto (en este colegio cuentan con un adscripto por grupo). Esto sin duda brinda a los docentes una más amplia perspectiva de la realidad de los estudiantes, pero también constituye una herramienta de control por parte de las autoridades del colegio, tanto para los alumnos como para los docentes.

La relación de poder *autoridades del colegio – docentes* se materializa sobre todo si lo analizamos desde el punto de vista de seguridad laboral. Mientras en la enseñanza pública un docente tiene prácticamente garantizado su lugar en la institución a lo largo de todo el año lectivo (hasta que se realicen nuevas elecciones de horas), en las instituciones privadas esto no es tan así. Si bien el derecho laboral ha sufrido interesantes cambios y aportes en los últimos años, los colegios privados no dejan de ser empresas, donde la seguridad de tener trabajo el día de mañana no está garantizada. Este también es un aspecto de ejercicio del poder por parte de las autoridades del colegio, e incluso padres y alumnos.

En referencia al tema que estamos analizando, esta influencia puede apreciarse en la necesidad que ve el docente de apegarse al libro pedido a los estudiantes a principio de año. En la entrevista manifiesta que la Dirección brinda a principio del año escolar a los estudiantes la lista de los libros que sus profesores usarán en el año. Y, según él mismo expresa, "*el objetivo de pedir un libro es usarlo*" (Comunicación personal, 17 de octubre de 2013). Esto sugiere que el docente siente la presión de utilizar el libro como parte del contrato no explicitado con Dirección, alumnos y padres.

- *Referentes académicos y actual formación*

El docente cuyo discurso estamos analizando es estudiante avanzado del Instituto de Profesores Artigas donde convive diariamente con otros estudiantes y docentes de larga trayectoria.

El hecho de estar todavía inmerso en formación docente hace que tenga mayor contacto con propuestas alternativas de trabajo, modelos didácticos diferentes a los tradicionales, e incluso una mayor predisposición a probar recursos didácticos variados.

Pero también significa que continúa siendo parte de un sistema educativo reproductor de un discurso tradicionalista. En el IPA conviven dos concepciones diferentes de lo que es enseñar Matemática. Por un lado encontramos los docentes de Didáctica que con su discurso hacen énfasis en que el estudiante sea verdadero partícipe en la generación del conocimiento y el docente sea guía y no expositor. Por otro lado, la gran mayoría de los cursos de Matemática que se imparten en el IPA carecen de esta metodología, siendo casi exclusivamente normativos. Esta predominante modalidad puede ser determinante en la futura tarea docente de los estudiantes del IPA, que la considerarán como modelo de clase de matemática ya sea consciente o inconscientemente.

Este conflicto también se visualiza en la presentación de los objetos matemáticos a los alumnos. En una de las entrevistas, el docente afirma que induce a los estudiantes al descubrimiento de los conceptos matemáticos a través de situaciones problema, haciendo surgir necesidades matemáticas. Sin embargo, en la clase que se observó, las preguntas del docente fueron siempre cerradas y dirigidas, donde el estudiante no tenía demasiado margen de respuesta. Este es un claro ejemplo del conflicto en la formación docente descripto anteriormente: el discurso de los docentes de Didáctica en cuanto a cómo deberían ser presentados los conceptos matemáticos está presente desde la teoría pero no es llevado a la práctica debido quizá a que la propia formación del docente estuvo mayoritariamente marcada por la presentación de objetos matemáticos como verdades absolutas irrefutables.

Por último, ha sido profesor adjunto de dos docentes con gran trayectoria y renombre. Uno de ellos es docente de didáctica en el IPA y el otro se desempeña como Inspector de Matemática del CES. El propio docente reconoce la influencia directa de ambos en su acción educativa.

- *Grupo de padres*

Según Van Dijk, "el discurso constituye a la sociedad y a la cultura" (1999, p.24), por lo que existe un vínculo dialéctico entre ambos grupos. La influencia del discurso en la sociedad es bastante clara a través del grupo social de los alumnos. La reciprocidad de esta relación se establece más que nada en la figura de los padres, que exigirán al colegio el cumplimiento de las necesidades y objetivos que se señalan para los hijos.

En la educación pública este rol lo cumple la sociedad en general, exigiendo resultados, materializados en las encuestas e investigaciones en cuanto al rendimiento escolar. En este caso al tratarse de un colegio privado, la presión la ejercen directamente los padres, aunque sea de forma indirecta como mencionamos anteriormente (al pedir que se compre un libro específico, después es de esperar que sea utilizado en clase).

- *Autores de libros de texto*

De acuerdo con Van Dijk, "el discurso hace un trabajo ideológico" (1999, p. 24). Para determinarlo es necesario analizar los libros de texto utilizados, considerando cómo son trabajados e interpretados los conceptos y qué efectos sociales tienen. Por ello, se estudiaron libros de texto, tanto nacionales como extranjeros, para discernir la verdadera influencia que estos tuvieron en la confección de este libro, delimitando el discurso y la labor ideológica que se ejercerá sobre los estudiantes.

El docente se basa principalmente en el libro de referencia del curso a la hora de planificar y dictar sus clases (*Au*), en parte influenciado, como explicamos, por la orden del equipo directivo, que exige a los profesores señalar un libro de referencia del curso para que los alumnos lo compren. Ante este lineamiento, resultaría contradictorio no utilizar el texto señalado.

Además de analizar ese libro, se tomaron como referencia los textos nacionales *Bu* y *Cu* para analizar cómo se han tratado las relaciones trigonométricas a lo largo de la historia en la educación secundaria uruguaya, y cuál es el legado que esos libros dejaron para los textos actuales.

Por otro lado se observaron dos libros de texto de origen francés: *Af* y *Bf*. Molfino y Buendía (2011) explican la influencia de las corrientes didácticas europeas en el discurso escolar uruguayo a través de las olas migratorias que llegaron al Río de la Plata desde inicios del siglo XX. Así la cultura uruguaya recibió gran cantidad de aportes por parte de los inmigrantes, a los cuales la educación no fue ajena.

Uno de los aspectos que se destacaron del libro de texto *Au* fue el lugar que se le brindó a la historia de la matemática en el capítulo. Esta no es una novedad con respecto a textos anteriores, ya que en *Cu* (1941) también se le otorga un espacio a este punto en cada uno de sus capítulos.

En los tres libros de texto uruguayos analizados observamos similitudes en cuanto a la introducción del tema. Si bien se generan diferentes actividades, en los tres casos la Trigonometría parece surgir como *aquello que nos brindará las herramientas para calcular medidas que pueden o no ser medibles.* De esta forma vemos cómo esta concepción de *lo que es* la Trigonometría y *para qué* se trabaja está presente en el discurso escolar desde los primeros libros de texto a mediados del siglo XX.

En cuanto a la estructura de los capítulos observamos una gran similitud entre las presentaciones de los libros *Au* y *Bu*, sobre todo en lo que tiene que ver con la introducción de los conceptos:

- Se asocia el concepto de Trigonometría con los triángulos semejantes; es decir, se apela a conceptos anteriores para formalizar uno nuevo.
- A lo anterior se llega a través de actividades similares, donde se muestra las razones entre lados de un triángulo rectángulo para diferentes casos de triángulos (todos semejantes).
- Se presenta la calculadora como una herramienta básica en este tema.
- Posteriormente se formalizan las definiciones.

Esto podemos verlo también en uno de los libros franceses (*Af*), aunque tiene una estructura determinada de antemano para todos los capítulos del libro. Sin embargo, como se puede apreciar en los subtítulos del capítulo, se hace un gran énfasis en la parte de ejercitación con diversos ejercicios de aplicación. Lo que pudo influir directamente en los libros de texto uruguayos, que toman en gran medida muchos de estos ejercicios.

Podemos concluir que el libro de texto señalado por el docente como guía del curso continúa reproduciendo un discurso que se ha mantenido a lo largo de la historia de la educación media uruguaya y también influenciado por los aportes europeos. Más allá de las variaciones de enfoques, en el discurso e ideología que transmite el libro, o en particular este capítulo, subyace una concepción de la Trigonometría que no ha variado en tiempo ni espacio.

ALGUNAS REFLEXIONES EN TORNO AL DISCURSO DEL DOCENTE

Vemos cómo los diferentes grupos de poder analizados influyen directa o indirectamente en el discurso docente. En especial destacamos la estructura de los libros de texto y programa que marcan fuertemente el camino a recorrer en el curso, delimitando prioridades y jerarquizaciones. Analizamos también cómo estos mismos libros de texto son reproductores de un discurso mucho más global e internacional, que define la forma y el modo en como las relaciones trigonométricas deben tratarse en la Educación Media. Los ejercicios y las propuestas presentadas a los estudiantes vienen influenciados por el desarrollo histórico del discurso escolar de Trigonometría. Concluimos entonces que el dME del docente observado se asienta en una reproducción de lo que se ha entendido por Trigonometría a lo largo de los años, sin cuestionar la validez ni la eficiencia de ese modelo.

La formación del docente también resultó fundamental a la hora de analizar el discurso, en especial en la instancia de actividad dentro del aula. El conflicto generado por los modelos didácticos reproducidos en el IPA se traslada al discurso del futuro docente. Por un lado encontramos el aspecto teórico de *cómo* y a través de *qué* recursos debemos dar clase, propio de los cursos de didáctica. Por otro lado el aspecto práctico, relacionado con la forma en que los docentes recibieron su formación matemática. En definitiva se polariza el discurso docente, de un lado lo *teórico*, lo que consideramos *debería ser una clase de matemática*; y por el otro lo *práctico*, lo qué *en realidad realizamos adentro del aula.*

Si bien en este caso se analizó el discurso de un docente particular, no sería descabellado aventurar que son minoría los profesores de educación secundaria que cuestionan cotidianamente las formas y modos de presentar los objetos matemáticos a sus estudiantes y buscan alternativas didácticas de forma sistemática. Las razones son variadas y probablemente atienden a una problemática mucho más compleja; pero en la medida que no tomemos consciencia de *por qué* hacemos lo que hacemos, de *cómo* construimos nuestra concepción de lo que debe ser una clase de matemática, de *quienes* nos determinan el modo y la forma de nuestra acción educativa, de *cuáles* son nuestros objetivos reales y *cómo* podemos hacer para lograrlos, se continuará reproduciendo un discurso tradicional y totalmente anacrónico que solo atiende a las necesidades de unos pocos.

Este tipo de trabajos e investigaciones intentan aportar a la construcción de una educación matemática más crítica e independiente, y despertar en aquellos que están al frente de una clase la necesidad de buscar alternativas didácticas a lo que se les impone y sugiere desde los grupos de poder.

REFERENCIAS

Aguilar, P., Louquet, P. y Moulia, L. (1978). *Mathématiques, classe de troisième*. París: Colin.

Chevallard, Y. (1991). *La transposición didáctica: del saber sabio al saber enseñado*. Buenos Aires: Aique.

Coppetti, M. (1941). *Álgebra y Trigonometría, Tercer Año*. Montevideo: (no especifica editorial).

Fernández, C., López, M. y González, M. (1995). *Matemática 3º c.b.u.* Montevideo: Monteverde.

Molfino, V. y Buendía, G. (2011). Análisis del Discurso como Acción Social: su rol en la construcción y difusión de conocimiento matemático. En Buendía, G. (Coord.). *Reflexión e investigación en matemática educativa* (pp. 117-150). México D.F.: Lectorum

Mollet-Peti, F. (1993). *Maths 3^{e}, Irem de Strasbourg*. Paris: Irem.

Montiel, G. (2005). *Estudio Socioepistemológico de la función Trigonométrica*. (Tesis de doctorado no publicada). Instituto Politécnico Nacional. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada. México DF.

Ochoviet, C. y Olave, M. (2009). *Matemática 3*. Montevideo: Santillana.

Van Dijk, T. (1999). El análisis crítico del discurso. *Anthropos*, 186, 23-36.

AUTORES

GABRIELA BUENDÍA es Doctora en Matemática Educativa (CINVESTAV, IPN, México). Se ha desempeñado como profesora e investigadora en CICATA-IPN (México). Actualmente es investigadora del Colegio Mexicano de Matemática Educativa AC.

MARIO DALCÍN es Magister en Ciencias en Matemática Educativa (CICATA-IPN, México). Se ha desempeñado como docente del Instituto de Profesores Artigas y como investigador en el Instituto de Perfeccionamiento y Estudios Superiores (Uruguay).

VERÓNICA MOLFINO es Doctora en Matemática Educativa (CICATA-IPN, México). Se ha desempeñado como docente del Instituto de Profesores Artigas y del Profesorado Semipresencial, y como docente de posgrado en el Instituto de Perfeccionamiento y Estudios Superiores (Uruguay).

CRISTINA OCHOVIET es Doctora en Matemática Educativa (CICATA-IPN, México). Se ha desempeñado como docente del Instituto de Profesores Artigas y del Profesorado Semipresencial, y como docente de posgrado e investigadora en el Instituto de Perfeccionamiento y Estudios Superiores (Uruguay).

SOFÍA ACOSTA es egresada del Instituto de Profesores Artigas (2013). Los artículos de su autoría que se incluyen en esta obra son creaciones colectivas fruto de trabajos elaborados en el marco de la asignatura Análisis del Discurso Matemático Escolar (2012). Actualmente se desempeña como docente en el Liceo N° 64 y en el Instituto Crandon (Montevideo).

MARCELO ASTORUCCI es estudiante de cuarto año del Instituto de Profesores Artigas. Sus aportes a este libro surgen de su trabajo en la asignatura Didáctica de la Matemática III (2014).

VÍCTOR BONELLO es Profesor de Matemática egresado del Instituto de Profesores Artigas (2014). Participó en la elaboración de los materiales para este libro como estudiante de cuarto año del Instituto de Profesores Artigas al cursar la asignatura Didáctica de la Matemática III (2014).

CECILIA CORUJO es estudiante de cuarto año del Instituto de Profesores Artigas. Elaboró materiales que fueron incluidos en esta obra mientras cursaba la asignatura Didáctica de la Matemática III (2014).

GABRIELA FIGARES es egresada del Instituto de Profesores Artigas (2014). Los artículos de su autoría que se incluyen en esta obra son creaciones colectivas fruto de trabajos elaborados en el marco de la asignatura Análisis del Discurso Matemático Escolar (2012). Actualmente se desempeña como docente en liceos públicos y privados de San José de Mayo y continúa su formación mediante la carrera *Tecnólogo en Informática* de la Facultad de Ingeniería, UdelaR.

FIORELLA GIOVANNINI es estudiante de cuarto año del Instituto de Profesores Artigas. Las actividades que se incluyen en esta obra las elaboró para el curso de Didáctica de la Matemática III (2014).

FRANCA LEVIN es estudiante de cuarto año del Instituto de Profesores Artigas. El trabajo de su autoría que se incluye en esta obra lo elaboró para el trabajo final de la asignatura Análisis del Discurso Matemático Escolar (2013).

VICTORIA LÓPEZ es egresada del Instituto de Profesores Artigas (2012). Los artículos de su autoría que se incluyen en esta obra son creaciones colectivas fruto de trabajos elaborados en el marco de la asignatura Análisis del Discurso Matemático Escolar (2012). Actualmente se desempeña como docente en el Liceo N° 31 y en el Colegio Latinoamericano (Montevideo).

VICTORIA MESA es egresada del Instituto de Profesores Artigas (2012). Los artículos de su autoría que se incluyen en esta obra son creaciones colectivas fruto de trabajos elaborados en el marco de la asignatura Análisis del Discurso Matemático Escolar (2012). Actualmente se desempeña como docente en los Liceos N° 1 y 2 de Sauce (Canelones) y cursa el posgrado *Diploma en Matemática*, IPES – UdelaR.

PATRICIA NAVARRO es estudiante de cuarto año del Instituto de Profesores Artigas. Su aporte a esta obra surge de su trabajo para la asignatura Didáctica de la Matemática III (2014).

CAMILA PADILLA es estudiante de cuarto año del Instituto de Profesores Artigas. Sus aportes creativos a este libro surgen de su trabajo en la asignatura Didáctica de la Matemática III (2014).

FLORENCIA RIVERO es egresada del Instituto de Profesores Artigas (2013). Los artículos de su autoría que se incluyen en esta obra son creaciones colectivas fruto de trabajos elaborados en el marco de la asignatura Análisis del Discurso Matemático Escolar (2012). Actualmente se desempeña como docente en el Liceo N° 62 y en el Colegio Latinoamericano (Montevideo) y cursa el posgrado *Diploma en Matemática*, IPES – UdelaR.

ÁLVARO ROSA es estudiante de segundo año del Instituto de Profesores Artigas. Sus aportes al trabajo que se presenta en este libro surgen de reflexiones en torno a propuestas vinculadas a la asignatura Geometría.

«La relación entre la práctica y la investigación continúa siendo un problema a resolver desde la comunidad de educadores matemáticos» y eso es, lector, lo que encontrará en este libro.

Se trata de una propuesta cuyo origen es el trabajo cotidiano de docentes y estudiantes de la especialidad Matemática del Instituto de Profesores Artigas. Basado en una comunicación fructífera y en un claro conocimiento de la investigación vanguardista en el área de la Matemática Educativa, ese trabajo se cristaliza en seis escritos con planteamientos claros ante dicho problema.

A través de entender, analizar y poner en juego elementos teóricos concisos, este conjunto de propuestas conforma un material útil para todo aquel que se pregunte cómo impactar realmente en el aula desde la investigación.

Gabriela Buendía
Ciudad de México, Noviembre 2014

ISBN 978-9974-711-37-2

9 789974 711372