TRABAJO COLABORATIVO en ambas orillas del Plata

Experiencias en escuelas públicas

Carla Damisa, Laura Dodino,
Horacio Itzcovich, Inés Piedra Cueva

Consejo de Formación en Educación

unipe Universidad Pedagógica Nacional

ANII Agencia Nacional de Investigación e Innovación

TRABAJO COLABORATIVO EN AMBAS ORILLAS DEL PLATA

Experiencias en escuelas públicas

Carla Damisa, Laura Dodino,
Horacio Itzcovich, Inés Piedra Cueva

Colaboradores:
Patricia Sadovsky, María Mónica Becerril, María Emilia Quaranta,
Patricia García y Virginia Méndez

Consejo de Formación en Educación

unipe Universidad Pedagógica Nacional

ANII Agencia Nacional de Investigación e Innovación

Producción editorial:
GRUPO MAGRO EDITORES
Abayubá 2694 Ap. 101
Tel. 099 419 050
E–mail: info@grupomagro.com
www.grupomagro.com
Montevideo – Uruguay

Editor: Fernando Díaz
Diseño: Patricia Carretto

ISBN impreso: 978-9974-8691-1-0
ISBN en línea: 978-9974-8691-2-7

Printed in Uruguay - Impreso en Uruguay

Estudio comparativo binacional (Uruguay-Argentina) del funcionamiento de espacios colaborativos entre investigadores y docentes durante el proceso de producción de un proyecto de enseñanza de la Matemática mediados por el uso de GeoGebra

ANII: FSED_2_2016_1_130949

Equipo de Uruguay:, *Dodino Laura, Damisa Carla, Piedra Cueva Inés, Méndez Virginia.*
Equipo de Argentina*: Sadovsky Patricia, Becerril Ma. Mónica, García Patricia, Itzcovich Horacio, Quaranta Ma. Emilia.*

Índice

1. Introducción

Este trabajo es el resultado del desarrollo de un proyecto que se proponía comparar el funcionamiento de dos espacios de trabajo colaborativo (Bednarz, 2013; Proulx, 2013; Sensevy, 2011), cada uno de ellos constituido por docentes e investigadores en el área de la didáctica de la matemática.

Uno de los espacios –el de Uruguay– llevó adelante una investigación bajo esta modalidad durante los años 2015 y 2016[1] tomando como eje el uso de las computadoras en las aulas de la escuela primaria para abordar la enseñanza de la geometría, dando cuenta de los conocimientos matemático - didácticos elaborados entre docentes e investigadores, a la luz del desafío de producir una secuencia de enseñanza, implementarla y analizarla de manera colaborativa[2].

El otro espacio –el de Argentina– viene llevando adelante una investigación desde el año 2012 que también tiene como objeto de investigación las ideas matemático - didácticas que se van elaborando en los intercambios dentro del espacio. Los temas que se van abordando en las conversaciones surgen –a diferencia del otro espacio– de preocupaciones que atañen a la tarea de enseñanza que enfrentan los maestros y también, a medida que el grupo colaborativo se va constituyendo, de las propias elaboraciones que se hacen en su seno[3].

Entendíamos, y eso motorizó la formulación de un proyecto conjunto, *que el análisis comparativo de la producción matemático didáctica en dos espacios colaborativos que se sitúan en realidades diferentes puede contribuir a conocer mejor la potencialidad y el alcance de esta modalidad para promover en los docentes una posición autónoma y crítica con relación a la elaboración de sus propios proyectos de enseñanza al tiempo que puede ayudar a precisar las restricciones que impone el fun-*

1. Proyecto: Producción Matemático - Didáctica de un proyecto de enseñanza que incorpore el uso de las XO, en el marco de un trabajo colaborativo entre maestros e investigadores.
2. Damisa-Dodino-Piedra Cueva. (2017). Geometría en el aula con GeoGebra. Un experiencia de trabajo colaborativa en el aula. CFE. Administración Nacional de Educación Pública. Grupo Magr Editores. Montevideo.
3. Sadosvsky, Itzcovich, Becerril, Quaranta, García. (2018). La reconfiguración de un marco conceptual para la enseñanza. Resultados de un trabajo de colaboración entre docentes e investigadores en didáctica de la matemática. (En prensa).

cionamiento de la enseñanza para introducir cambios que suponen rupturas respecto de la tradiciones heredadas de la escuela moderna[4] . Asumimos que el posicionamiento autónomo de los docentes poco a poco va haciendo posible comprender la enseñanza en términos de *hipótesis a explorar* mucho más que como *pasos a seguir* y que radica acá una condición de posibilidad para promover en las aulas una actitud de búsqueda y exploración por parte de los alumnos.

Cada espacio se reunía periódicamente en una escuela. En el caso de Uruguay en la escuela 14 José de San Martín de práctica de Montevideo, en el caso argentino escuelas 11 de Cardales y 30 de Longchmaps ambas de la Provincia de Buenos Aires. Allí se desarrollaban los intercambios sobre asuntos de la enseñanza que preocupaban, se proponían acciones a implementar en las aulas y se analizaban los fenómenos que ocurrían en dicha implementación. Si bien, como era previsible, los asuntos de debate que emergieron en cada espacio resultaron diferentes, variados aspectos que se tornaron prioritarios en cada grupo favorecieron la posibilidad de llevar adelante este estudio comparativo.

Partimos de premisas que compartíamos ambos equipos de investigación, en particular un posicionamiento que asume la necesidad de una participación activa de los docentes en los espacios de investigación que se proponen comprender los problemas de enseñanza que es necesario enfrentar cuando se busca llevar a cabo en las aulas un proyecto en el cual, las ideas matemáticas que los alumnos elaboran a raíz de las tareas que enfrentan son constitutivas de los conceptos que se espera transmitir (Sadovsky, et al., 2017).

Al mismo tiempo, compartimos la perspectiva de que la instalación de un espacio colaborativo puede abonar a imaginar un cambio en la concepción del trabajo docente para todos los participantes. Este cambio puede contribuir a que los docentes integren en una perspectiva sus interpretaciones, decisiones, análisis críticos. El pensar sus clases en diálogo con otros docentes e investigadores aportaría diversas miradas y supone dejar de transitar desde un lugar individual y solitario a un espacio compartido donde se piense la enseñanza[5].

Finalmente, y sin ánimo de agotar los puntos de partida compartidos, cabe mencionar que en ambos espacios se registraban las reuniones en audio, se desgrababan, eran analizadas por cada equipo de investigación y resultaban insumos para la reunión siguiente. Esta decisión, compartida también, permitía en cada espacio retomar los temas, revisar las ideas tratadas e ir objetivando la discusión. Esta condición metodológica abona a que tanto docentes como investigado-

4. Proyecto de investigación: Estudio comparativo binacional (Uruguay-Argentina) del funcionamiento de espacios colaborativos entre investigadores y docentes durante el proceso de producción de un proyecto de enseñanza en Matemática mediados por el uso de GeoGebra. ANII: FSED_2_2016_1_130949.
5. Op cit (proyecto ANII-Unipe).

res conciban el espacio de trabajo compartido como un ámbito en el que se construirán nuevas respuestas para las preguntas que se abordan (Sadovsky et al., 2017). No se trata de un mero esfuerzo de voluntad, es una condición a construir dentro de cada espacio, en donde intervienen, entre otros aspectos, la confianza que se va construyendo así como la reflexión sostenida.

En este informe intentaremos, a partir de los asuntos que emergieron en cada espacio, establecer puentes entre unos y otros debates, comparando el modo de funcionamiento que adquirió en cada ámbito, con la finalidad de abonar a un mayor entendimiento del trabajo colaborativo.

Un aspecto a destacar resulta el modo en que ha sido convocado cada espacio: ¿qué condicionamiento impone?, ¿a qué restricciones se ve sometido?, ¿cómo se va configurando el espacio? ¿Qué cuestiones comunes surgen, a pesar de tratarse de historias, ciudades y países diferentes? Son algunos de los interrogantes que se despliegan en el punto 2.

Otro asunto a desarrollar se relaciona con los aspectos que son objeto de discusión en cada espacio (punto 3). En cada uno de ellos nos habíamos propuesto analizar los procesos de problematización de los conocimientos a enseñar: ¿de qué manera se va problematizando la enseñanza?, ¿sobre qué conocimientos?, ¿cómo se incorpora el problema de la validación?, son algunos de los asuntos que rondaron los debates entre los dos equipos de investigación y que se tratan en el punto 3.1.

Dentro de este proceso de problematización, en ambas orillas aparecen las producciones de los niños frente a las propuestas que los docentes despliegan en sus aulas, producciones que indudablemente arriban al espacio colaborativo y que motorizan diversos análisis en cada uno de ellos. ¿Cómo se transforman las producciones de los niños en objeto de trabajo en el espacio?, ¿qué función cumplen?, ¿qué elaboraciones promueven? son algunos de los interrogantes de intercambio y que también se abordan en el punto 3.2.

La variable *tiempo* incidió en el desarrollo del trabajo en los dos espacios, así como en las trayectorias de sus integrantes: ¿qué condiciones planteó tanto para docentes como para investigadores?; ¿qué modificaciones se pudieron identificar en los posicionamientos?; ¿cuáles fueron las condiciones que lo promovieron? Estas cuestiones están presentes en el punto 3.3.

El desarrollo del trabajo generó un conjunto de incertidumbres a raíz de diferentes cuestiones. Una de ellas que compartimos y analizamos en el punto 3.4 refiere al modo de ocuparse de la puesta en común en el aula a raíz de las producciones de los alumnos y de las intervenciones docentes que demandan: ¿cuáles son las incertidumbres que se presentaron?, ¿qué criterios circularon para su abordaje?, ¿qué aportes del docente incorporan?

Finalmente se presentan algunas ideas a modo de conclusiones en el punto 4, intentando sintetizar aquellos aspectos comunes que permiten pensar sobre el desarrollo de un trabajo colaborativo entre docentes e investigadores.

Queremos agradecer a los colectivos docentes de las tres escuelas, maestros y directivos, a todos los niños y sus producciones así como también a las instituciones que nos alojan CFE, UNIPE, ANII.

2. Configuración inicial del espacio colaborativo en cada orilla

La manera en la que se convoca a constituir los espacios de trabajo colaborativo en Uruguay y en Argentina son diferentes. En el primer caso se trata de ocuparse de un asunto pendiente, que emerge de una política de estado: el uso de las ceibalitas[6] en los procesos de enseñanza de la matemática. Más específicamente el trabajo se centra en el uso del GeoGebra[7], recurso poco habitual y que genera interrogantes sobre su uso, su potencialidad y su gestión dentro de las aulas de las escuelas primarias.

Por su parte, en Argentina, el recorrido de los últimos veinte años o más puso en evidencia las dificultades que acarrea elaborar y desarrollar un proyecto de enseñanza que contemple la producción de conocimientos por parte de los niños, como una de sus principales componentes.

Estas son dos aproximaciones diferentes a la conformación del espacio colaborativo –aunque bien podrían ser otras (Proulx, 2013)– y tal como dice Bednarz (2013), van delimitando los asuntos que serán objeto de debate.

Por un lado cabe señalar que el espacio de Uruguay ya tiene una noción de lo que se va a tratar: geometría y uso del GeoGebra, ya hay un tema "en común" originado por la misma convocatoria. En tanto, en el espacio de Argentina no está definido el objeto de trabajo, la convocatoria invita a reflexionar sobre problemas de enseñanza de la matemática, en consecuencia "lo común", al menos al inicio, resulta más "brumoso". De todas maneras, con el transcurrir de las reuniones se van constituyendo, en cada espacio, asuntos comunes que preocupan a todos (ver punto 3).

6. Se denominan familiarmente "ceibalitas" a las computadoras que se entregan a los alumnos uruguayos en edad escolar a partir del Plan Ceibal.
7. El GeoGebra es un programa libre que permite, entre otras cuestiones, representar, mediante dibujos, figuras geométricas usando diferentes herramientas asociadas a las propiedades que las caracterizan.

A pesar de estas diferencias, un aspecto que se identifica en cada espacio es el posicionamiento de los docentes en relación con la investigación. En una y otra orilla, la formación inicial no ubica a los docentes en una posición investigativa con respecto a sus proyectos de enseñanza ni existen espacios en las Escuelas que permitan volver y reflexionar sobre las prácticas desplegadas. En consecuencia, la separación entre enseñanza e investigación se evidencia desde los primeros encuentros, y resulta, en cierta medida, ser solidaria con la distancia histórica que se manifiesta entre teoría y práctica (Sensevy, 2011). El espacio colaborativo es un modo de poner en debate esta ruptura. Ambos equipos, aunque de diferentes maneras, nos propusimos de entrada sostener una aproximación exploratoria a los problemas de la enseñanza que los maestros iban identificando en el espacio colaborativo, resultando entonces imperioso recurrir a las aulas para recabar datos sobre las anticipaciones que se realizaban (ver ítem 3.4).

Se desarrolla así un juego entre las preguntas que van surgiendo, las planificaciones o ideas que se van elaborando para ensayar en las aulas –a raíz de esas preguntas– y los fundamentos que se van construyendo y que buscan argumentar las decisiones que se adoptan. Este formato va generando un campo de análisis que incorpora la reflexión sobre las prácticas de enseñanza; las acciones que se desarrollan en las aulas resultan ser un insumo para el debate y a su vez colaboran en modificar la posición inicial, asumiendo una perspectiva exploratoria como modo de avanzar en el tratamiento de los asuntos que surgen e incluyendo la necesidad de comenzar a "tomar distancia" para la reflexión. Así lo expresan algunas docentes:

> M_U: *A mí me parece súper interesante. Personalmente es algo nuevo y me genera un desafío, no es algo que se diga ah mirá yo lo trabajé así...y me parece que desde la investigación aporta, que es algo nuevo porque no hay material al respecto* (refiriéndose al tratamiento de los ángulos en las aulas de escuelas primarias).
>
> M_A: *Yo quiero trabajar eso, la relación entre los cálculos... ese problema quiero ver, si usan el que saben hacer para el otro. ¿Con qué salen?...* [8]

Ambas expresiones nos animan a interpretar docentes interrogándose sobre aspectos vinculados a la enseñanza y la necesidad de explorar en las aulas como modo de avanzar en las ideas que se van debatiendo. Al mismo tiempo, pareciera que el objeto que es interrogado es eso que llevo al aula y no el docente con todos los problemas que atraviesan el trabajo en el aula. No asoman en un principio con claridad los problemas que pueden surgir como problemas de enseñanza.

8. Con la escritura M_u designamos a una maestra que participa en el espacio colaborativo en Uruguay y con M_A designamos a una docente del espacio colaborativo de Argentina. Si bien usamos siempre M, no indica que se trate siempre de los mismos docentes.

Esto también es parte de la evolución en la posición exploratoria que van asumiendo los docentes.

Otro aspecto que podemos identificar en cada espacio refiere a la tensión entre certezas e incertidumbres, y que también abona al posicionamiento exploratorio. En reuniones en ambas orillas se generan dudas acerca del modo de abordar ciertos conocimientos.

En el espacio de Uruguay, frente a la complejidad del tratamiento de los ángulos –uno de los temas que ronda los debates– y que evidencia un recorrido cuyo sentido empieza a cuestionarse, una de las docentes sentencia:

> M_U: *El tema ángulos es que todo el mundo le saca el cuerpo, porque no sabes cómo entrarle. Sabes que a través de los polígonos pero nunca le hincas el diente. Es como que lo rondas, lo rondas, lo rondas...*

En tanto que en el espacio de Argentina y a raíz del análisis de ciertas dificultades de los alumnos que los docentes identifican en el terreno del cálculo (varios alumnos evidencian dificultades con la cuenta de restar) una de las docentes sentencia:

> M_A: *Y la resta es interesante... porque los míos cuando la cifra de arriba es más chica que la de abajo, hacen la resta al revés [refiriéndose a las unidades de minuendo y sustraendo]. O sea, no se dan cuenta... tienen que empezar haciendo 5 - 6, que no se puede, hacen 6 - 5 y me dicen 1.*
>
> M_A: *Claro, no consideran todo el número, solo la última cifra...*
>
> D_A: *Y entonces hay que ver qué consideramos como número, si el todo o cada cifra, cada parte.*[9]

Estas incertidumbres tensionan entre concepciones genuinas que tienen los docentes –producto de su historia y que moldean las decisiones didácticas que adoptan– y aquellas que se ponen en debate en el espacio como consecuencia de las nuevas preguntas que se van generando. No se trata de rupturas entre viejos y nuevos posicionamientos, entendemos que, lejos de una visión según la cual la innovación tiene un valor por el solo hecho de ser tal, las maestras van elaborando transformaciones en una perspectiva mucho más dialéctica entre pasado y presente que lo que explícitamente reconocen (Sadovsky et al., 2018).

9. Sadovsky, Quaranta, Itzcovich, Becerril, García. (2015). Producción matemático-didáctica: una experiencia de planificación colaborativa entre maestros e investigadores. En A. Pereyra, & D. Fridman, Prácticas Pedagógicas y Políticas Educativas. Investigaciones en el territorio Bonaerense (pp. 221–250). Buenos Aires, Argentina: Gonnet: Unipe: Editorial Universitaria.
Con D_A designanmos a directora argentina y con M_A maestra argentina.

A su vez, podemos establecer una relación entre incertidumbres y posicionamiento exploratorio. Al avanzar en los debates en las sucesivas reuniones e identificar ciertos problemas de enseñanza, las preguntas que se elaboran en torno a ellos son originales, también provenientes de las tensiones entre "viejas y nuevas concepciones" y requieren de ensayos en las aulas para recolectar insumos que permitan analizarlos. La exploración entonces irrumpe como necesaria para tratar con la incertidumbre que generan esos mismos interrogantes. Y la exploración abona a disminuir la incertidumbre. (Ver ítems 3.2 y 3.4).

Un último aspecto que quisiéramos destacar en este ítem refiere al arribo a asuntos "comunes" de debate en cada espacio colaborativo. O sea, a pesar de los diferentes modos en que se constituyen los equipos de uno y otro lado del Río, en cada uno de ellos se van identificando asuntos "comunes" para todos los integrantes. En el caso de Uruguay, se establece un trabajo matemático en el que confluyen: el propósito de construir colaborativamente un proyecto de enseñanza sobre los ángulos (Damisa, et al., 2017) y ciertas imposiciones de la herramienta que "trae" elementos que no aparecerían en el lápiz y papel.

En uno de los encuentros una docente sentencia:

> los gurises están familiarizados con la nominación de ángulo, de la etiqueta saben, pero se trabaja para la construcción de la noción y todo lo que implica, las propiedades que tengan y no con esto de que el ángulo es tal cosa. (Damisa, et al. 2017, p.35).

Dotar de sentido al objeto ángulo inserto en una planificación para ser propuesta a los alumnos se constituye en un desafío dentro del espacio. La tensión entre las rutinas usuales del tratamiento de los ángulos en las aulas y las concepciones que ubican a los alumnos en un lugar de producción, incluyendo ahora la herramienta GeoGebra, tironean los debates, abre nuevos interrogantes que, en cierta medida, abonan también al proceso exploratorio mencionado anteriormente. Estos aspectos, junto con la intención colaborativa, "arman" una escena de análisis y producción "en común".

En tanto que, en el caso de Argentina, la preocupación por la evolución de las producciones de los alumnos en términos de recursos de cálculo exige, como uno de los asuntos, comprender con mayor profundidad esas producciones. Los docentes entonces aportan al espacio hojas de los niños con procedimientos de resolución. Al tratarse de una interpretación que se hace sobre producciones "in situ", no previstas, resulta un desafío en común esa interpretación (Sadovsky et al., 2015), que requiere tratar con relaciones matemáticas que subyacen a las escrituras y los procedimientos de los niños. En una de las reuniones de trabajo y a la luz de la interpretación de una producción de un alumno se da el siguiente dialogo:

Investigador: O sea, la lógica de la actividad es la siguiente. Sabiendo que 30 - 20 es 10, ¿cómo hago para encontrar 30 - 19; 30 - 18; 30 - 17; 30 - 21...? Y para el primero da como resultado 9. Tratemos de identificar primero qué está pensando esta nena para poner ahí un 9, ¿de dónde sacará el 9?...

Maestra C_A: Sí, según ella 30 - 19 = 9; ella intentó a este 19 agregarle para que le dé 30, eso es lo que hizo ella...

Investigador $_A$: Pero después escribe "30 - 18 = 8" y "30 - 17 = 7"...

Maestra M_A: Tuvo presente que iba disminuyendo el número...

Maestra C_A: ¿Qué? Como este bajaba, ¿también tenía que bajar?...

Investigadora $_A$: Otra posibilidad puede ser que, cuando ella lo hizo, identificó que el resultado era el mismo número que las unidades, entonces podríamos pensar que repite esa regularidad. Ahí ella está intentando buscar o agarrarse de algo que sucede... **no sabemos bien cuál es.** (Sadovsky, Quaranta, Itzcovich, Becerril y García, 2015 b, p.16).

Es decir, la producción o interpretación de relaciones matemáticas no del todo convencionales y poco exploradas, las diferentes interpretaciones que pueden aparecer, genera un conjunto de interacciones entre docentes e investigadores que van conformando uno de los asuntos que podemos denominar "lo común" (Sadovsky, Itzcovich, Quaranta, Becerril y García, 2016) dentro de cada espacio.

Lo "común" entonces podemos caracterizarlo como aquellos aspectos relacionados con la enseñanza que emanan de asuntos o problemas identificados por el grupo y para los cuáles ninguno de los integrantes tiene un posicionamiento establecido con anterioridad y claramente definido. Esta aproximación es una posible y no implica que no pudieran producirse otras características, pero la que identificamos nos permite comparar "lo común" que surgió en cada espacio.

3. Ideas que emergen en los espacios colaborativos de ambas orillas

3.1. La problematización del conocimiento a enseñar

En ambas orillas del Plata la problematización del conocimiento a enseñar fue un aspecto compartido. Por un lado, en la investigación del equipo de CFE dicha problematización fue producto de la mediación del GeoGebra, atendiendo el trabajo con los ángulos "de afuera y de adentro"[10] en polígonos. Por otro, en el equipo de UNIPE fue producto de la duda de cómo lograr avances en las producciones de los alumnos en relación a las estrategias usadas para resolver cálculos.

a) ¿Cómo se fue desarrollando esta problematización en cada equipos?

En el primer día de reunión, la maestra M2 del equipo de CFE, comparte producciones de los alumnos sobre una actividad que consistía en "adivinar", a través de preguntas, qué figura se había escondido. Trae al espacio de reunión las producciones ya analizadas con la idea a partir de su interpretación de que *"los alumnos no manejan la idea de perpendicularidad."* M2 interpreta que sus alumnos no tienen claro el concepto de perpendicularidad entre rectas.

Además sostiene que:

M2: *La síntesis de esta actividad fue que podíamos mirar: vértices, lados, ninguna pregunta fue a la perpendicularidad, 90° fue lo más cercano. La idea de ángulo, nada.* (Reunión 1)

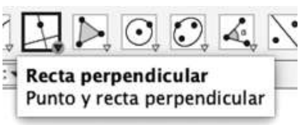
10. Más adelante en este documento definiremos lo que denominamos ángulos de adentro y de afuera.

Esto lleva a la maestra a implementar otras actividades que involucran las ideas de ángulo recto, rectas perpendiculares en paralelogramos a partir de construcción de paralelogramos móviles. Los resultados de dichas tareas, producciones escritas y videos con explicaciones, son llevadas al espacio colaborativo. A su vez en éste se va discutiendo sobre el uso del recurso GeoGebra, su potencialidad, si los niños saben usarlo, cómo influiría esto en el tratamiento de algunas cuestiones de geometría, etc. El tema de la perpendicular sigue circulando en el espacio y ahora además se suma el problema del uso del recurso GeoGebra. La voz de M1 ilustra lo dicho:

> M1: *El problema con la herramienta está... Por ejemplo la idea de la perpendicularidad si la precisa, yo no le voy a mostrar dónde está lo que tiene... acá está la perpendicular... ¿cómo hago? ¿qué tiene esta herramienta, qué necesito para trazar la perpendicular? (Reunión 2)*

Aparece así una tensión en el abordaje a la idea de rectas perpendicualres a partir del uso de GeoGebra. M1 plantea una serie de interrogantes no solo frente al objeto matemático en discusión sino a ¿cómo hago esto, con GeoGebra?

Se van estableciendo así relaciones entre las rectas perpendiculares, los ángulos rectos y el uso del GeoGebra comenzándose a construir una nueva mirada sobre estos asuntos matemáticos y algunas decisiones didácticas. Obsérvese que M1 plantea que no le va a mostrar "*la perpendicularidad*", refiriéndose a la ventana del GeoGebra donde aparece un ícono que indica rectas perpendiculares.



Por un lado, que el ícono esté a disposición en el GeoGebra no significa que los alumnos lo vayan a usar si no tienen otras ideas disponibles sobre la perpendicularidad. Por ejemplo que "*si tengo dos rectas perpendiculares, entonces también tengo ángulos rectos.*" Y de manera recíproca, la exploración a partir de la herramienta GeoGebra con la ventana de rectas perpendiculares con la de ángulos y su medida permitiría la interacción de representaciones de rectas donde se pueden movilizar nuevas ideas en relación con la perpendicualridad: *"las rectas perpendiculares pueden contener lados de ángulos rectos"*. Es decir, es una situación dialéctica que permite la construcción de ideas geométricas a partir de la exploración con GeoGebra y que con el GeoGebra puedan ser dinamizadas ciertas ideas geométricas para identificar el alcance de las mismas. Surge así en el espacio colaborativo, una tensión entre la relación de la herramienta GeoGebra con las ideas geométricas. De este modo, al comenzar a analizarse desde otros lugares los ángulos rectos y las perpendiculares ya no son los mismos objetos matemáticos, se problematizan, aparecen como un problema didáctico. Es así que se comienzan a construir nuevas redes de ideas que permearán las acciones en el aula mediadas por el GeoGebra.

Cuando M2 plantea su preocupación de la no identificación de ángulos rectos y rectas perpendiculares en los rectángulos, por parte de los niños circula en el espacio colaborativo cierta duda o incertidumbre, sobre que el tema va más allá de ángulos rectos y su relación con rectas perpendiculares: es el trabajo con ángulos. Esto se refleja en la voz de M2:

> "*yo empecé por la perpendicularidad, pero terminé con ángulos...*"

Es decir que a partir de los intercambios, la exploración sobre la preocupación inicial de ángulo recto, rectas perpendiculares, se va transformando en la de ángulo y esta a su vez lo hace en ángulos en polígonos y sus relaciones entre los de afuera y adentro (más adelante en este mismo punto se desarrolla).

Por otro lado, en el equipo de UNIPE está en juego el vínculo entre los tipos de cálculos personales realizados por los alumnos y la relación con los algoritmos convencionales. Se evidencian dos asuntos en juego: el trabajar a partir de las producciones de los alumnos en relación a los cálculos que producen y el arribo, de alguna manera, a capturar los algoritmos convencionales con sentido y no solo de forma mecánica. Esa tensión fue instaurando y tejiendo ideas matemáticas frente a las perspectivas de algunos maestros. Citamos a continuación algunas de esas ideas que presentaron los maestros en el espacio de colaboración con el fin de avanzar, "de alguna manera", hacia los algoritmos convencionales.

> *Maestra E: Yo creo que llega un momento en el que hay que decir "bueno chicos, esto lo hicimos de esta manera hasta aquí, ahora les cuento cómo lo vamos a hacer de aquí para adelante...".* (Reunión 1, año II).

A su vez otras voces de maestros nos muestran que no han tenido oportunidad de analizar y jerarquizar los distintos tipos de estrategias personales que despliegan los alumnos.

> *Maestra C: A mí, si no hace la multiplicación, no me molesta para nada...por ejemplo, yo les doy 24 libros en 24 estantes, hay algunos que hacen 24 x 24, listo, está bien... pero hay otros que, por ejemplo, yo les enseñe a agrupar por 10, hacen 24 x 10 = 240, 480...de a 10, no necesitás saber las tablas, estás razonando y así lo hacen y el que suma...24, 24, 24...y bueno, si no le da la multiplicación, no le da... De las tres maneras está bien.* (Reunión 1, año II).

La maestra C pone de relevancia que lo importante es el hacer, sin validar solamente un camino posible pero dentro de las estrategias que relata no todas atienden a los mismos asuntos matemáticos en juego.

Al decir del equipo de investigación de UNIPE (Sadovsky et al., 2015 5b), surge en el espacio de colaboración un aspecto que tensiona y que genera un doble mandato –*que hagan como puedan y que sepan las cuentas*– dando lugar a que se constituya como problema didáctico la creación de puentes entre las estrategias de cálculo con las que vienen trabajando los alumnos y el dominio de los recursos más convencionales.

En las reuniones aflora de manera casi permanente cómo hacer por un lado para dar espacio a las producciones de los niños y por otro lograr que se apropien de los algoritmos convencionales que son los que socialmente se exigen. "Los docentes parecen considerar que a lo largo del primer ciclo los niños despliegan una variedad de recursos que deberían ser "superados" al recorrer el segundo ciclo de la escolaridad" (Sadovsky et al., 2015b, p.14). Sin embargo se dan cuenta que son muchos los alumnos que llegan a 6to grado manejando estrategias desplegadas en el 1er ciclo y que aún no utilizan los algoritmos convencionales. La idea que los maestros presentan no es que el fin sea el manejo mecánico de los algoritmos convencionales sino que logren mantener el sentido de lo que hacen de igual modo que cuando proceden con estrategias personales, es decir preservando un alto grado de comprensión.

En ambos equipos surgen en el espacio de colaboración tensiones que abonan a la conformación del espacio en términos de interrogantes que aparecen y que no hay respuesta para ello de manera predeterminada. Se irán construyendo las respuestas a las preguntas que generan las tensiones a lo largo de las distintas reuniones. Sensevy (2011), sostiene que para que se dé la construcción del espacio de colaboración es necesario instalar una simetría que se basa en la elaboración compartida de razones en el marco de los trabajos que se realicen antes que en la negociación de las diferencias.

En el equipo de investigación del CFE aparece tensión en el uso de GeoGebra en relación a: las actividades que se diseñarían, a las posibles producciones de los alumnos, la puesta en común, cómo surgen los saberes, cómo se sostienen (los conocimientos), cómo juega el GeoGebra en la producción de explicaciones.

A su vez en el equipo de UNIPE se entró en el juego del trabajo con las relaciones entre los cálculos y de ahí a la consideración del análisis de las producciones de los alumnos como una actividad principal del grupo con el fin de producir interpretaciones en relación a la vinculación de los procedimientos personales con el algoritmo convencional al cual se quería arribar.

Las distintas tensiones generadas en ambos equipos exigieron producir en terreno junto con los maestros, directivos y practicantes[11] interpretaciones por un lado sobre las producciones de los alumnos (UNIPE) y por otro en el equipo del CFE, el GeoGebra como movilizador de algunas ideas sobre ángulos, ángulos rectos y rectas perpendiculares, ángulos de afuera y de adentro en polígonos, que parecían no estar presentes en los alumnos. Estas tensiones jugaron en ambos espacios colaborativos a favor de la construcción de un clima de confianza en el que todos juntos –maestros e investigadores– nos involucramos en una tarea desafiante y original.

b) Hitos en ambos equipos

Llamamos hitos a instancias en las que se producen situaciones puntuales y significativas que marcan un momento importante en el desarrollo del proceso en cada espacio colaborativo.

En referencia al equipo de CFE la entrada del uso de GeoGebra produce de manera significativa cambios a nivel de la manera de abordar el trabajo de los ángulos con GeoGebra y consideraciones sobre lo que denominamos clonación[12]. A su vez en el equipo de UNIPE el estudio de las producciones de los niños dio lugar a mirar las relaciones entre cálculos como objeto de enseñanza. En ambos equipos aunque los asuntos identificados como hitos son distintos inciden sobre las decisiones de enseñanza. Es decir que son asuntos comparables en términos de lo que se produce con foco en la enseñanza. Una diferencia entre ambos equipos es que en el equipo de CFE el asunto a problematizar fue matemático – didáctico, tanto para maestros como para investigadores. Mientras que en el equipo de UNIPE la mirada en las relaciones entre los cálculos es nuevo para los maestros, no para los investigadores.

A continuación presentaremos brevemente un desarrollo de los hitos de cada equipo.

En el equipo de Uruguay uno de los hitos, como ya dijimos, fue la presencia del GeoGebra no de manera declarativa sino en acto. El uso de GeoGebra en el espacio de colaboración se produce de manera efectiva y por ende pasa a ser una marca concreta de la construcción de simetría porque a partir de él se producen varios hechos relevantes:

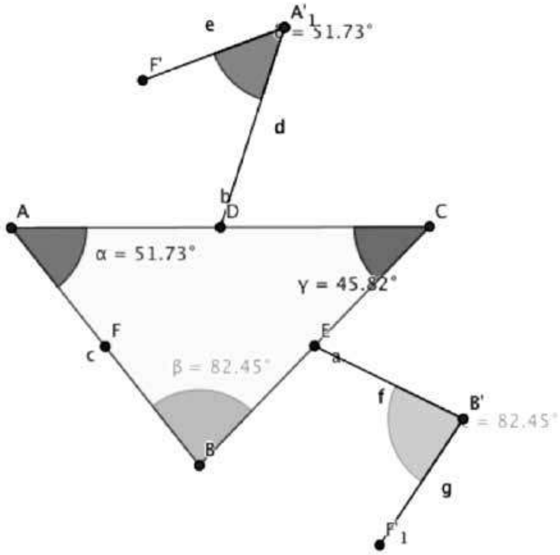
1. los asuntos relacionados a la clonación,

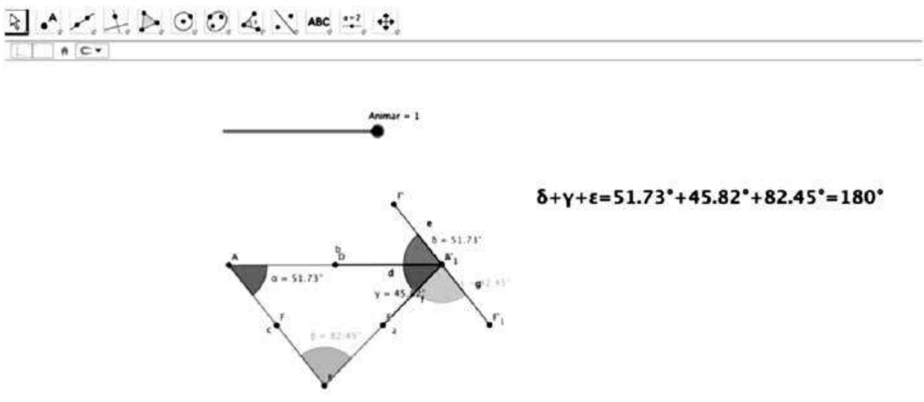
11. Los practicantes conforman también el espacio de colaboración solamente en el equipo del CFE. Son alumnos que están estudiando para maestros y hacen sus prácticas pre profesionales en las escuelas llamadas de práctica vinculadas con los Institutos de Formación Docente.
12. Esta idea de clonación se desarrolla más adelante.

2. las relaciones entre los ángulos de “adentro y de afuera” a partir del GeoGebra,

Este hito surge cuando en el espacio de colaboración, en la reunión 5, la maestra M1 lleva un procedimiento para simular con GeoGebra la prueba a través de la cual, por rasgado de ángulos de un triángulo, se verifica que la suma de sus ángulos interiores es un llano o 180°. Para simular la experiencia de “rasgado de puntitas” con GeoGebra M1 tuvo que construir un simulador en varios pasos para que se pudiesen visualizar a través del programa el corte y la colocación adecuada de los tres ángulos interiores de manera que resultaran consecutivos.

Las imágenes que siguen ilustran el proceso.





Las destrezas necesarias usadas para la construcción de cómo proceder para realizar esa prueba, las ideas matemáticas en juego desde rotaciones de ángulos, sobre la determinación de los centros y los ángulos de esas rotaciones, mostró un grado de complejidad tal que no se relacionaba con lo que se que quería producir. El asunto era que seguíamos produciendo una prueba pragmática, ahora con GeoGebra, pero con mayor grado de complejidad sin aportar nada nuevo en relación a los conocimientos matemáticos: suma de ángulos interiores de un triángulo.

Reconocer este hecho supuso que pensáramos que no todas las actividades que se hacen con lápiz y papel, con regla y compás, u otros recursos necesariamente se vuelven más potentes, más sencillas de entender, o mejores si se realiza con GeoGebra. El uso del instrumento persé no garantizaba nada. Recordemos a Trouche y Gueudet (2009), el autor sostiene que los instrumentos se constituyen por el artefacto y los esquemas de utilización que despliega el sujeto.

Es así que durante el proceso de análisis de lo que habíamos construido en el espacio de colaboración identificamos y logramos describir la idea sobre la cual las actividades pensadas en términos “hago lo mismo en todos los aspectos matemáticos y didácticos con lápiz y papel que con GeoGebra” nacían y morían rápidamente. Damisa, et al., (2017), sostienen que las actividades pensadas en esos términos nacen y mueren a la vez porque al tener la intención de clonar un procedimiento, esta puede permitir comenzar o profundizar la exploración del artefacto, sin embargo, el aprendiz es exigido a movilizar otros conocimientos. El nuevo artefacto impone condiciones o restricciones diferentes a los que se sucedían con otros.

Es así que en el marco de la investigación de CFE se define dos tipos de clonación.

Clonación tipo 1[13]: en términos de un cierto trabajo que intenta replicar lo que se hace con lápiz y papel. Es el proceso por el cual un aprendiz de un recurso nuevo, en este caso particular el GeoGebra, intenta aplicar los mismos saberes (conceptos, modos de hacer, de tratar, etc.) propios de otro recurso similar conocido sin realizarle a priori modificaciones, considerándolo una unidad genéticamente igual a su predecesora, es decir un clon.

Clonación tipo 2: Está referenciada a lo didáctico en términos de las condiciones bajo las cuales se desarrolla la tarea. Por ejemplo, cuando el docente no modifica a priori:

- la consigna de la tarea,
- las condiciones de realización: tiempos, organización grupal, materiales, etc.,

13. Damisa, et al., (2017).

- anticipaciones de posibles procedimientos puestos en juego por parte de los alumnos y las posibles intervenciones docentes,
- la gestión de la puesta en común y
- los cierres provisorios en relación a la actividad realizada. (Damisa, et al., 2017, p.p. 50-51).

La clonación de tipo 1 se evidenció como citamos anteriormente al intentar realizar el rasgado de las puntas de los ángulos de un triángulo usando GeoGebra. La clonación tipo 2 se detecta al no modificarse inicialmente la consigna del problema cuando se cambia el lápiz y papel por el GeoGebra.

Usando las categorías de Bednarz (2017)[14], podríamos situar la clonación en una interfecundación, es decir un saber nuevo que se construye en el encuentro de las dos comunidades la de los prácticos (maestras) y la de los teóricos (investigadores). Es así como sostiene Dubet (1994, 2007) citado por Bednarz, que este nuevo saber implica una doble exigencia la de estar de acuerdo a las reglas de la producción didáctica y además necesita ser creíble para los maestros que participaron en el espacio.

Por otro lado, la entrada del GeoGebra al espacio de colaboración también cambió la mirada en la forma de abordar el tema ángulos. Es a partir del intento de clonación de la actividad de rasgado para suma de ángulos interiores de un triángulo, traído por M1, que las investigadoras proponemos realizar en el espacio de colaboración, con el GeoGebra, la construcción de un triángulo cualquiera, "pintar" sus ángulos y medirlos. Al intentar marcar y medir los ángulos interiores, aparecen los ángulos de afuera, éstos son los que completan 360º con cada ángulo interior del triángulo. La denominación ángulo de afuera surge en relación a cada ángulo interior del triángulo. Si le llamábamos ángulo exterior no era el que se estaba marcando con GeoGebra. Es decir que aparece esta denominación como necesidad de identificar un ángulo que no es interior al triángulo pero que no es el exterior.

Es en este escenario se comienza a relacionar cantidad de ángulos interiores– a partir de ahora lo denominamos: **de adentro**[15]– con cantidad de ángulos de afuera. Se identifican en el espacio de colaboración otras relaciones referidas a la suma de todos los ángulos de adentro con los ángulos de afuera, esta es constante: en un triángulo es (3 x 360º). A su vez, la suma de todos los ángulos de afuera en un triángulo es (3 x 360 – 180). Además, se profundiza también la relación entre de la suma de todos los ángulos de afuera y todos los de adentro en

14. Bednarz, N. (2017). Conferencia en el marco de EDIMAT. Neuquén 2017.
15. La denominación de ángulo de adentro se asumió como relación con el ángulo de afuera. En los polígonos en cada vértice existe un ángulo de adentro y su respectivo ángulo de afuera, ambos forman un ángulo completo.

un cuadrilátero, en un pentágono, etc. Aparecen así las relaciones entre los ángulos en polígonos y no solo el trabajo con propiedades aisladas de ellos, situando un cambio sustantivo en relación a la enseñanza de esos objetos matemáticos en la escuela primaria.

En palabras de la maestra M3:

> M3: *Así como uno habla de la suma de los ángulos interiores se podría hablar de la suma de los (exteriores) de afuera...Y entonces eso que veíamos el otro día como un obstáculo didáctico que siempre que nosotras enseñamos ángulos siempre vemos el convexo y nunca el cóncavo, entonces podríamos hablar de la suma de los ángulos internos y no vemos las regularidades que se dan en los externos (los de afuera). (Reunión 5).*

En el punto 3.2 se analizarán las producciones de los alumnos a partir de una secuencia de actividades producida en el espacio de colaboración para abordar el trabajo con "ángulos de afuera y de adentro en ..."

En el equipo de Argentina también se producen momentos considerados fundamentales que ponen el foco en la enseñanza y en las nuevas condiciones que se pueden generar en el aula. Es así que a partir del análisis de las producciones de los alumnos, que los maestros van aportando al espacio de colaboración, éstas se convierten en dinamizador de nuevos asuntos para la enseñanza.

A raíz de la presentación de algunos episodios que parecen inicialmente separados y sin conexión comienzan a establecerse relaciones entre los cálculos a partir de las interpretaciones que se van produciendo por parte del equipo a instancias de intervenciones de los investigadores.

La estrategia para sumar de un niño de tercer grado frente a la suma 37 + 28, dispara distintas interpretaciones sobre la producción. Es así que el maestro Ar sorprendido de la producción del alumno, saca fotografías y las trae para compartir al espacio de colaboración.

> ... este alumno escribía al lado del número, una rayita por cada decena y un redondelito por cada unidad. Contaba el total de unidades y anotaba el resultado si era menor que diez y luego contaba la cantidad de decenas y escribía la suma total. Podríamos decir que al procedimiento convencional de suma le agregaba la intermediación de rayitas y redondeles. Si la suma de las unidades superaba 10 (la famosa cuenta "con dificultad"), entonces comenzaba contando de a 10 en función de la cantidad de decenas y luego agregaba una a una las unidades (para 37 + 28, el niño contó 10, 20, 30, 40, 50, y luego 51, 52, 53, ...,60, 61, 62, 63, 64, 65). (Sadovsky et al, 2018, p.8).

A partir de la intervención de los investigadores con el fin de convocar a analizar conjuntamente qué sabe el niño que realizó esta producción aparecen las siguientes respuestas:

"… algunos maestros desestiman que esté usando un saber interesante, otros se preguntan cómo se habrá dado cuenta y otros interpretan que el niño puede descomponer el número en dieces y sueltos. Los coordinadores subrayan que frente a la "dificultad" de que la suma de las unidades supera 10, el niño interpreta las cifras del número en función de la posición que ocupan traduciéndolas a decenas o unidades según corresponda y que plantea una estrategia de conteo consistente con esa interpretación." (Sadovsky et al.,2015, p.13).

Obsérvese que surgen diferentes interpretaciones sobre una misma producción. De este modo al ponerse de manifiesto esas diferencias movilizan asuntos que hasta el momento parecían homogéneas en los discursos de los maestros en relación a lo que los niños producían.

Los investigadores convocan a establecer relaciones entre la producción presentada por la maestra C (p.3 de este doc) y la del alumno de tercer grado.

Investigador: *cuando Claudia para 24 x 24 dijo 24 x 10 + 24 x 10 + 24 x 4, ¿no está jugando algo parecido ahí? (Reunión 1, año II).*

Estos análisis e intercambios promueven en los maestros la necesidad de explorar en sus clases procedimientos aritméticos que sus alumnos producen a partir de ciertas actividades que van proponiendo. Estos insumos son nuevamente llevados al espacio de colaboración para su análisis.

De este modo aparece un hito en el equipo de UNIPE:

el análisis de estas producciones va dando lugar a la elaboración de nuevos asuntos matemáticos de enseñanza que a la vez plantean nuevas exigencias para el trabajo de los docentes. Es así como emerge la necesidad de promover en las aulas que los niños establezcan relaciones explícitas entre diferentes cálculos para que unos funcionen como punto de apoyo para la resolución de otros" (Sadovsky et al., 2015, p.14).

Considerar la importancia del análisis de las producciones de los niños como medio para transformar algunos asuntos de enseñanza fue un hito en el equipo de UNIPE pues a partir de esa identificación se pudieron producir nuevos conocimientos didácticos por parte de los maestros y el establecimiento de las relaciones de las cuestiones matemáticas en juego.

En el espacio de colaboración el análisis de las producciones[16] de los alumnos conlleva a estudiarlas desde varias perspectivas, como vía para:

- reelaborar la intención didáctica,
- concebir las relaciones entre cálculos como objeto de enseñanza,
- confrontar diferentes interpretaciones de una misma producción,
- considerar estrategias por parte de los docentes para ayudar a los alumnos.

16. Este análisis se profundiza en el punto 3.2 de este documento.

Independientemente del foco matemático de ambos equipos, tanto el trabajo con ángulos mediado por el uso del GeoGebra, como la consideración de las relaciones entre las estrategias de cálculo usadas por los niños con el fin de hacerlas avanzar, produjeron un nivel de incertidumbre en ambos espacios colaborativos. Nos referimos a nivel de incertidumbre porque ambos equipos no teníamos una respuesta a priori de cómo íbamos a llevar a cabo lo que se estaba decidiendo en los espacios de manera conjunta con los maestros. Durante los encuentros se generaron más preguntas que respuestas y éstas funcionaron como motores de búsqueda para cada uno de los casos estudiados en ambas orillas. Algunas de las preguntas que surgieron y se sostuvieron en ambos equipos como medio de problematización de la enseñanza fueron:

En el relación al equipo de CFE:

- ¿Cómo abordo el trabajo con ángulos con el GeoGebra?
- La puesta en común, ¿cómo la sostengo usando GeoGebra?
- Las intervenciones de los maestros en el espacio privado de los niños, ¿cómo se accionan con el uso del GeoGebra?
- ¿Qué tipo de explicaciones se pueden producir?
- ¿Volvemos al lápiz y papel para producir explicaciones?

En relación al equipo de UNIPE:

- ¿Qué hago con esto que producen los niños?
- A partir de lo producido, ¿cómo promuevo avances en esas producciones?
- ¿Qué configuraciones se pueden establecer a partir de las relaciones entre los cálculos como objeto de enseñanza?
- Las explicaciones en la clase, ¿las tomamos como objeto de enseñanza?

Los interrogantes anteriores y los debates dados en ambos equipos producen una problematización del conocimiento a enseñar en relación a las decisiones de enseñanza de los objetos matemáticos en juego. Los objetos matemáticos a enseñar no son los mismos desde el inicio porque las discusiones que se van dando hacen que emerjan ideas y relaciones diferentes a las iniciales y así las correspondientes consideraciones didácticas con el fin de llevar al aula esos objetos matemáticos.

En suma la problematización de los conocimientos de las relaciones entre los ángulos de adentro y de afuera en polígonos (CFE) y de las relaciones entre los cálculos (UNIPE) como objeto de enseñanza hace que se genere la necesidad de ir al aula a explorar esos asuntos.

3.2. Las producciones de los alumnos y su papel en el espacio colaborativo

Otro de los aspectos que acontecieron en ambos espacios es la presencia de producciones de los alumnos, que los docentes aportaron a los encuentros, por diferentes motivos.

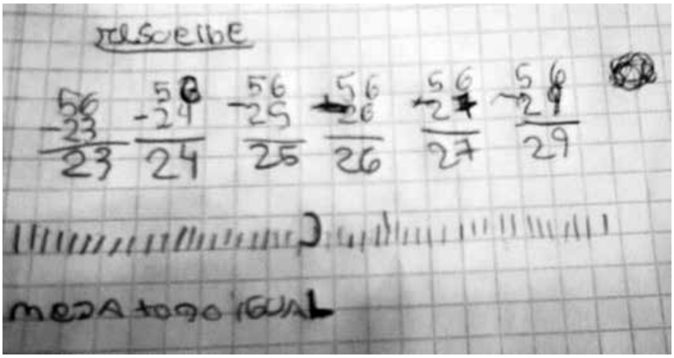
Desde el inicio, en el espacio de Uruguay, una de las docentes comparte una producción de sus alumnos, a partir de una tarea que les propuso –tarea que no había sido objeto de debate en el espacio, pero que sí tenía relación con una preocupación que rondaba en torno al trabajo con los ángulos de las figuras. La docente comenta –como ya hemos mencionado– que en las ideas de los alumnos "*falta perpendicularidad. Paralelismo lo nombran y... ninguna pregunta fue a la perpendicularidad. 90° fue lo más cercano. La idea de ángulo, nada...*"

Aporta estas producciones por considerarlas insuficientes, porque no la terminan de conformar –en relación con sus expectativas, según ella misma comenta. Y este es uno de los motivos por los cuáles arriban al espacio colaborativo para compartirlas. También podemos suponer que se trata de producciones frente a las cuáles se debe interactuar, y no es claro el modo de hacerlo.

Las investigadoras realizan un análisis y categorización de las producciones de los alumnos en un espacio propio, el espacio de la las investigadoras (EI) –como ellas mismas lo denominan–. Incertidumbres, también desde la investigación, comandan esta decisión, que posteriormente analizada en términos del trabajo colaborativo, supone un "distanciamiento" entre investigadores y docentes[17]. Es decir, se genera el interrogante acerca de los motivos por los cuáles dicho análisis se realiza por fuera del espacio colaborativo. Posteriormente, las investigadoras comparten en el espacio su análisis, sus interpretaciones de las producciones de los alumnos: *la relación de perpendicularidad aparece enunciada a través de los* ángulos rectos *y puesto en juego por los niños en esa caracterización* (Damisa, et al., 2017), y esto difiere de la interpretación que inicialmente hace la maestra, quien interpreta que los alumnos no disponen de la noción de perpendicularidad. Estas diferentes miradas e interpretaciones sobre las producciones de los alumnos, como ya ha sido mencionado, resultan ser un motor en el proceso de producción colaborativa.

En el espacio de Argentina, las producciones de los alumnos arriban a los encuentros también motorizadas por frustraciones, dudas, y en algunas oportunidades, por no ser comprendidas por los docentes que las aportan. En uno de los encuentros, una de las docentes aporta la siguiente elaboración:

17. A partir de este hecho, el resto del análisis de las producciones de los alumnos se realizó en el espacio de colaboración.



La intención de la actividad se relaciona con la posibilidad de establecer relaciones entre cálculos que preservan una cierta regularidad. Se trataba de indagar si los alumnos se apoyaban en unos cálculos para resolver los otros. Y se desarrolla el siguiente diálogo[18]:

D: *Y este no entiendo que razonamiento hizo*

M_1*: Hizo las rayitas, no le da 56, pero es como que hizo todas las rayitas y marcó acá las que tiene que restar.* (El alumno dibuja 46 rayitas –en lugar de 56– y marca hasta la 23, que son las que saca, y obtiene 23)

M_2*: Y se dio cuenta de una regularidad y por eso pone que son todas iguales*

D*: No, pero se da cuenta de una regularidad, no de la real.*

M_3*: No, de la real no, de una...*

D*: Están todas mal, la única que podría pensarse es esta (por la primera de 56 – 23 que hizo con los palitos). Pero no sé qué razonamiento hizo.*

M_1*: Bajó el número*

M_2*: Claro, se dio cuenta de eso, no hizo las otras cuentas, no las razonó*

D*: Ahhh, al ver que acá era el mismo número, puso en todas las otras el mismo número (refiriéndose al sustraendo, que el pibe repite).*

M_2*: Ahhh, claro, si el primero da lo mismo, pone que da lo mismo en todos los casos.*

M_1*: Hizo el primero, se confundió y le dio 23, y dijo que entonces el otro daba 24, 25...*

M_3*: Esto es minuendo y esto sustraendo, no? Como el resultado en el primero es el sustraendo, en todos hace lo mismo. ¡Qué bárbaro!!!!*

Este intercambio entre los docentes y la directora evidencia la presencia de interpretaciones bien diferentes acerca de lo que un alumno produce. Y precisa-

18. D: Directora. M: docentes.

mente es esa interpretación la que comandará, posteriormente, las interacciones que se generan en el aula entre el docente y el alumno. Incluso puede ocurrir que una interpretación que hace el docente sea muy diferente del sentido que quiso poner en juego el alumno, generando entonces un intercambio que parte de premisas muy distantes y, en consecuencia, se puede estar hablando de relaciones distintas: las que identifica el docente vs las que identifica el alumno.

Si bien los modos en los cuáles se analizan las producciones de los alumnos son diferentes –al menos en una primera instancia–, en ambos países se intenta comprender las relaciones a las que recurren los alumnos para resolver del modo en que lo hacen. En numerosas oportunidades dichas producciones se encuentran bastante alejadas de las expectativas de los docentes.

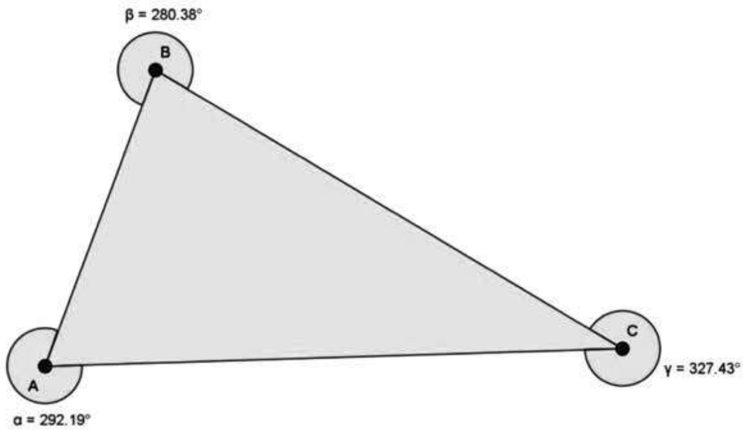
Entender un poco más lo que elabora un alumno e interactuar con dicha producción, asumiendo que la misma debería constituir parte del proyecto de enseñanza del docente, resulta entonces un desafío. La producción de un alumno es parte del sentido que el alumno le otorga al objeto matemático con el que está trabajando. Y ese sentido formará parte de la construcción de esa relación matemática ya que deberá concebirse un proceso de reflexión y transformación de esas ideas del alumno relacionadas con el conocimiento que se pretende transmitir.

El juego entre producciones personales y conocimientos "oficiales" también está presente en varios momentos de las reuniones de cada espacio. La construcción de "puentes" entre unos y otros conocimientos implica un trabajo de producción en términos de transformaciones de las relaciones, que no está realizado y cuya necesidad el espacio colaborativo deja ver, (Sadosvsky, et al., 2015a).

Al mismo tiempo, las producciones de los alumnos en una y otra orilla juegan papeles diferentes. En Argentina, en uno de los espacios, dichas producciones motorizan el debate en torno al papel que podría jugar el docente frente a ellas. En particular surge el interrogante acerca de qué aportes puede realizar el docente frente al trabajo desplegado por los alumnos. En este sentido, las producciones de los alumnos arriban al espacio sosteniendo el asunto de la gestión de la clase frente a ellas, los modos de propiciar avances, las relaciones que se podrían establecer entre diferentes producciones pero que se apoyan en relaciones aritméticas próximas, incluso se debate en torno al desarrollo de una puesta en común (Sadovsky et al., 2015b).

En tanto que en Uruguay, la elaboración de una secuencia de enseñanza sobre el tratamiento de los ángulos y recurriendo al GeoGebra –secuencia elaborada en el espacio colaborativo– pone de manifiesto que el análisis de las producciones de los alumnos se encauza más hacia el estudio de la potencialidad de dicha secuencia y del recurso.

Habíamos señalado en el ítem 2 que, en este espacio, las docentes estaban preocupadas por el trabajo en torno a la noción de ángulo. En consecuencia, se elabora una secuencia de enseñanza para abordar dicha noción con los alumnos. Se planificaron ciertas actividades; en una de ellas se trataba de que los alumnos establezcan relaciones entre los ángulos de un triángulo, apelando al GeoGebra, bajo ciertas condiciones (Damisa et al., 2017). En el mismo proceso de debate sobre los ángulos en los polígonos, se "topan" con una relación geométrica novedosa, que proviene del GeoGebra:



Y al mismo tiempo, el GeoGebra arroja el siguiente resultado:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^{o}$$

En el espacio se analiza que la versión del GeoGebra está considerando algo diferente, pero permite instalar la idea de "los ángulos de afuera". Esta relación es una de las que se incluyen en la secuencia de enseñanza y se trata de analizar, en la puesta en el aula, su potencialidad en el despliegue de un trabajo de tipo argumentativo. De esta manera, por ejemplo, se analizan en el espacio algunas producciones de los alumnos elaboradas posteriormente a haber identificado que siempre, la suma del ángulo "de adentro" más el ángulo "de afuera" era 360º, para cada ángulo de un triángulo. El siguiente extracto es uno de los tantos que se analizan:

A_4: *Encontramos que el ángulo de adentro nunca va a ser más grande que el de afuera. En los triángulos.*

A_5: *Si el de adentro mide más de 180 el de afuera es más chico*

A_4: *Si el de adentro no es más de 180 el de afuera no puede ser más chico.*

A_6: *Me interesa saber si en toda figura el ángulo de adentro es más chico que el de afuera.*

Es decir, la mirada está puesta en las producciones de los alumnos en torno a las relaciones que se propiciaban desplegar con el uso del recurso GeoGebra, a partir de la secuencia de enseñanza.

Al analizar el papel que juegan las producciones de los niños en uno y otro espacio colaborativo, se va ampliando el abanico de sentidos que adquieren dichas producciones y los motivos por los cuales arriban al espacio, aportadas por los docentes:

- Compartir un procedimiento erróneo de uno a varios alumnos e interrogar sobre el modo de interactuar con él.
- Comprender una procedimiento.
- Identificar las relaciones matemáticas que subyacen.
- Imaginar interacciones con los alumnos a raíz de sus producciones.
- Identificar posibles puentes entre los procedimientos de los alumnos y las expectativas del docente.
- Identificar la potencia de una cierta propuesta de enseñanza.
- Etc.

En síntesis, el análisis de las producciones de los niños emergió como una vía fértil para problematizar el conocimiento matemático (Sadovsky et al., 2016) así como para problematizar la enseñanza, en relación con esos conocimientos.

3.3. El largo plazo como intrínseco a la transformación de posiciones en el espacio colaborativo de todos sus integrantes

En este punto del documento nos proponemos compartir resultados en torno a la producción de transformaciones en los integrantes, tanto de carácter metodológico, como de perspectivas sobre la relación entre investigación y enseñanza; cambios vinculados a algunos aspectos de la enseñanza que se vieron favorecidos a partir de la reflexión sobre las interacciones que se fueron dando en los procesos de colaboración en los que estábamos inmersos.

Las transformaciones detectadas en ambos procesos fueron de diferente índole. En el equipo de UNIPE algunas de ellas fueron en relación con el problema de interacción con los alumnos en particular diferenciando la idea de *guía* con la de *ayuda*. En el equipo de equipo de CFE se observaron cambios en la posturas de los integrantes en relación al binomio *enseñanza –investigación* y frente al factor tiempo como incidente en el proceso de la colaboración. La transformación a destacar en este proceso es como los maestros en Uruguay se incorporan a la investigación como integrantes de la misma.

Son transformaciones de distinto tipo, transforman las ideas y posturas tanto de docentes como de investigadores: "*Pensaba una cosa y después pienso otra.*"

Al decir del equipo de investigación (Sadovsky, Itzcovich, Becerril, Quaranta y García (2018a), los distintos tipos de ayudas que se pueden ofrecer a los alumnos así como las reflexiones más generales que orientan su producción fueron temas traídos a la mesa de trabajo, siempre apoyados en los episodios de clase que las maestras aportaron. Los análisis también están atravesados en este caso por ese estado de transición al que con cierta frecuencia, sobre todo en los primeros intercambios, refieren las maestras: se duda acerca del momento en que se debe ayudar a un niño, se interroga sobre su modo, su pertinencia.

Presentamos a continuación las preocupaciones iniciales que traen al espacio las maestras en relación a cómo guiar a sus alumnos.

M1: *Yo quisiera abrir para guiar más.*

M1: *No encuentro el abanico para poder guiar a mis alumnos.*

M2*: ¿Cómo los guiamos para trasladarlo al papel?*

Según el equipo de la UNIPE el modo en que hace referencia a la acción de "guiar" parece sugerir que los alumnos con alguna dificultad estarían detenidos en algún punto del camino y la intervención docente aseguraría que continúen –solos o acompañados– para arribar a una meta prevista. Es decir, todo ocurre como si se supusiera un recorrido anticipado por las maestras y la guía permitiría ubicar al niño en esa senda e indicarle las acciones a realizar para llegar (Sadovsky et al., 2018a)

También observó que el tema de *ayudar* en el grupo de maestros no era homogéneo, ni siquiera para una misma maestra frente a diferentes situaciones que se dan el en aula. Como evidencia, a continuación describimos una situación que se dio en una reunión en donde una maestra da cuenta de cómo ayudó a diferentes grupos de alumnos, en un problema de carácter aditivo con números de dos cifras (45 y 17, panes y budines) en un tercer año.

En una producción de un niño que escribe el 4 (de 45) corrido hacia la izquierda respecto del 1 (de 17), la maestra, probablemente pensando en el algoritmo convencional, le plantea al alumno si acaso hay 400 panes. Parecería que le está atribuyendo al niño un intento vinculado al algoritmo convencional y desde esa interpretación, lo estaría **guiando** para que corrija la posición del número 4 y lo ubique en la "columna" de las decenas – aunque no había registro en el trabajo del alumno que permitiera inferir que él esté pensando en un procedimiento basado en el valor posicional–.

Otro episodio referido al mismo problema, en donde la maestra relata al equipo: yo escuchaba que una de las nenas decía a sus compañeros de grupito *"mirá, si yo me paro en el 45 y voy para allá"* [refiriéndose a la tira de números que está colgada en el pizarrón] entonces empezaron a contar para atrás. Después les pregunté *"¿qué son los 45?, ¿por qué corriste para allá?"*. Y me contesta *"estos (45) son los panes y éstos* [los que cuentan para atrás] *son los que se vendieron"*. Y por ahí escucho que en el grupito dicen *"aah..."* (Sadovsky et al., 2018a).

El último episodio que plantea es: un grupito de alumnos sumó y yo les dije, "a ver, si yo tengo panes y los vendo, voy a tener más o voy a tener menos?". Y entonces una nena le dijo a la otra, *"¿viste que teníamos que restar?"*, (Sadovsky et al.,2018a).

El equipo de investigadores de UNIPE analizó las tres intervenciones, en la primera acuerdan que frente a la disposición de la "cuenta" que hace el alumno, la maestra parece interpretar que el niño se sitúa en el algoritmo convencional, no lo verifica y lo guía para que corrija. En el segundo procedimiento en el que la alumna usa la tira numérica y conteo, concluyen que tal vez con la intención de trabajar elementos relativos al sentido de las operaciones, en una resolución "correcta", la maestra apunta a que esa niña desarrolle sus ideas al pedirle que de razones de su procedimiento. La docente registra y comparte en el espacio colaborativo, que esta intervención facilitó cierta comprensión en el grupito de niños, lo cual contribuye a poner en la mesa de trabajo lo que las explicaciones aportan a la comprensión ya sea cuando las resoluciones son correctas o no. La tercera intervención, sostienen, está orientada a que los alumnos revisen la operación que eligieron para resolver el problema y se basa en criterios más externos (si el resultado tiene que ser menor, no tiene sentido sumar) y no apunta a explicitar las razones de porqué los niños optaron por sumar cuando debían restar (Sadovsky et al., 2018a).

Se puede interpretar que el espacio colaborativo habilita de algún modo a que esta maestra comparta su trabajo y que al confrontarlo con otros va tomando conciencia del cambio en relación a la ayuda al alumno. Hay dos momentos a destacar, uno en el primer episodio, la maestra guía al niño a realizar correctamente un algoritmo que carece de sentido para él, es como "un deber" de la maestra que el niño "aprenda" el algoritmo convencional. En este sentido podemos decir que guía al alumno. En cambio en los episodios siguientes, hay frase como "*la niña desarrolla sus ideas al pedirle que explicite sus razones", "esta intervención irradió cierta comprensión en el grupito de niños";* comienza a deslumbrarse un cambio de postura en la maestra, tiene en cuenta los procesos de los chicos, pide que den razones de lo que hacen y observa que la intervención que ella hace, es una ayuda no solo para ese niño sino para todos.

En los encuentros siguientes en el espacio de colaboración las discusiones estuvieron centradas en hacer explicita la necesidad que los docentes reconocen en apuntar al desarrollo de las ideas en las resoluciones de los niños, sean estas correctas o erróneas, como condición para interactuar con ellos. En el desarrollo de las reuniones se van planteando diferentes estrategias de ayuda: se les pide a los niños que dibujen, que hagan esquemas, que subrayen los datos, entre otras. Se reconoce también lo dificil que es realizar intervenciones, a veces son productivas y a veces no. En palabras de una docente: *Sí, es complicado, la verdad es que todavía no tengo claramente el panorama...Pero hay días que sí y hay días que no, hay días que los billetes no ayudan",* refiriéndose al uso de billetes como apoyo para algunos niños, ante problemas aditivos que ella plantea en su aula. (Sadovsky et al., 2018a).

A partir de las escenas anteriores el equipo de investigación de UNIPE interpreta la aparición de un proceso dialéctico entre el análisis de las producciones de los alumnos y las intervenciones del maestro. Esas intervenciones pueden llegar a hacer comprensible lo que los niños expresan, ubicándolos en un lugar que posibilita la producción de explicaciones a partir de la intervención docente. Por otro lado en esa ida y vuelta, durante el proceso de "análisis–intervención" se pueden convertir en "ayudas" las intervenciones porque éstas funcionan como mediadoras entre los conocimientos que poseen los niños y los que a partir de la intervención docente se pueden elaborar, modificar, transformar, generalizar, etc.

Es así que el equipo de UNIPE identifica que sostener la discusión sobre "las ayudas" a lo largo del tiempo, problematizarlas, hizo posible que el espacio de trabajo quedara más cerca de concebirlas como favorecedoras del desarrollo de las ideas de los alumnos, como base para la interacción con ellos que de entenderlas como guías para la acción.

En relación a los cambios sucedidos en el equipo de Uruguay (equipo de CFE), como se dijo al principio son de otra índole. En Uruguay los maestros pasaron de un primer momento de mirar de afuera a apropiarse del espacio de colaboración y del proyecto de investigación, esto fue acompañado por cambios en la postura de los investigadores. En el equipo de la UNIPE, las transformaciones estuvierom pegadas a la posición de los maestros frente a las producciones de los niños y al cómo intervenir. No está analizado aun cuáles fueron las transformaciones que vivieron los investigadores. Un punto a aclarar es el relativo a los tiempos de cada una de las investigaciones. En Uruguay, fue un tiempo de trabajo acotado de 5 meses y en Argentina fue de 2 años y continúa. Esto incide en los tipos de cambios producidos en cada uno de ellas.

En el equipo de CFE, un tema que estuvo presente a lo largo de la investigación, en todos los miembros, tanto maestros como investigadores, fue la relación entre enseñanza e investigación. Se concibe que el trabajo en el espacio colaborativo supone una ruptura tanto con el lugar de práctico que el docente tiene otorgado en la cultura, como con la posición de prestigio y autoridad que se suele atribuir a los investigadores. De todas formas, fue un desafío para todos lograr esa ruptura. Los profesionales llegamos al espacio con una concepción de enseñanza y de investigación teñida por esta cultura en que estamos inmersos. Sensevy (2011), citado por Damisa et al., 2017, aporta la idea:

> ...para instalar la colaboración, es necesario construir una simetría que se basa en la elaboración compartida de razones en el marco de los trabajos que se realicen, antes que en la negación de las diferencias. En este sentido sería, según el autor, un modo de superar una división de trabajo basado en los dilemas teoría-práctica, fines-medios: la teoría y los fines para los investigadores, la práctica y los medios para los docentes. (p.19)

Se llegó al espacio con diferentes experiencias, diferentes concepciones sobre qué es investigar, es por ello que creemos que uno de los productos del trabajo colaborativo fue el cambio de conciencia en relación al binomio enseñanza–investigación por parte de las maestras y por una mejor comprensión desde las investigadoras. Estas transformaciones son productos de ciertas variables, como ser por ejemplo la sistemacidad de encuentros, el sostenimiento de temas de debate, la creación de un clima de confianza.

Las interrogantes que tenían las maestras sobre la investigación así como las reflexiones más generales sobre la misma fueron temas traídos a la mesa de trabajo desde un comienzo, siempre apoyados en las lecturas de la propuesta del proyecto y en la experiencia que las maestras aportaron. Existía cierto temor si la investigación iba a afectar a la enseñanza, para las maestras el tema principal era la enseñanza, en este caso, de la geometría, de alguna manera tenían que asegurarse que eso sucediera.

Presentamos a continuación esas preocupaciones iniciales que traen al espacio las maestras en relación a la investigación.

> *M3: Yo quiero saber si la investigación de ustedes va pensada a si la herramienta informática ¿es de verdad un facilitador para aprender geometría o si por el contrario es otra herramienta más de la enseñanza o si la potencia pasa por otro lado?* (Reunión II).
>
> M3: *"(...) me parece que en torno a este objetivo la problemática que se le puede presentar al maestro es: desconozco el programa, las máquinas no andan, se me tranca el programa..."* (Reunión II).

Esta mirada puede estar permeada por sus experiencias anteriores en relación a investigaciones que se realizaron en esa escuela, investigaciones externas, en donde el producto era informar algún aspecto sobre la práctica, pero que dejaba a los maestros fuera del proceso. "*Yo quiero saber si la investigación de ustedes*" da pauta del sentir de los maestros, ellos se sienten por fuera de la investigación y ven ajena su incorporación. Se observa que además de las dudas sobre la potencialidad del recurso (GeoGebra), estaba la preocupación sobre si se iba a indagar cosas puntuales en referencia a si las computadoras funcionan, si los maestros saben usarlas, si las usan, y cómo las usan. Se agrega además y se cuestiona sobre si el GeoGebra es un facilitador para aprender Geometría o es una herramienta más para la enseñanza.

En este sentido podemos establecer un corte en estos argumentos por un lado el asunto sobre el uso del programa GeoGebra y en qué vamos a enfocarnos en la investigación (aún ajena para los maestros) y por otro si es o no un buen recurso para la enseñanza. Las maestras se centran en el uso del recurso para enseñar pero no se ven dentro de los procesos que conllevan pensar en enseñar con GeoGebra y los problemas que se pueden tener con él. Se habla de un "docente" en el cual los propios docentes no se incluyen.

Otro aspecto que aparece en los planteos iniciales del equipo de maestros es en relación a cómo se llevaría a cabo la investigación. En ese sentido M1 plantea:

> M1: *"cuando analizamos propuestas de acá (refiriéndose al libro de GeoGebra editorial Espartaco de Firotti y otros) (...), nosotras analizamos propuestas de acá... claro era pensar en eso si la investigación puntual venía si GeoGebra potencia los aprendizajes, si fuera así deberíamos tener un grupo testigo para que haga esas mismas propuestas con un grupo sin usar GeoGebra o entonces en lo de M2 se haga todo con XO y en mi clase con lápiz y papel las mismas propuestas".* (Reunión I).

Analizando la postura de M1 vemos que hay cierta duda de cómo se va a llevar a cabo la investigación. Estas dudas aparecen en términos de si es necesario tener un grupo testigo o no, con el fin de valorar si se avanza en los aprendizajes cuando se usa GeoGebra o si los resultados son iguales o de menor nivel. Se pone en discusión cómo valorar los avances de los niños, la preocupación es por la enseñanza de los niños y su responsabilidad sobre ello. Este es un elemento que se sostiene durante un tiempo, la preocupación sobre la enseñanza. El equipo de investigadoras habilita a que los maestros compartan sus preocupaciones generando un espacio diferente en relación a otras investigaciones en esa escuela. Las maestras desde un comienzo e independientemente de la investigación sostienen que en sus aulas debería haber enseñanza. Se sigue viendo separadas la enseñanza de la investigación como dos caras disjuntas y no como asuntos que se pueden complementar en este tipo de investigación.

Desde el primer encuentro en la escuela 14 se grabaron en audio todas las sesiones, se fotografiaron pizarrones, se realizaron capturas de pantallas, se recogieron y analizaron producciones de los niños. Además, se llevaron bitácoras de campo en donde tanto las maestras participantes, las practicantes y las investigadoras realizamos anotaciones con el fin de triangular luego la información. Se filmaron clases con los niños en algunas de las actividades realizadas.

Los insumos obtenidos a partir de las desgrabaciones de audio de todas las sesiones se tomaron para revisar las acciones, reflexionar sobre ellas y volver al territorio con cierta interpretación fundada de los sucesos (Damisa, et al., 2017). De esta manera se volcaban estos insumos en el espacio de colaboración con las maestras y a partir de allí continuábamos avanzando. Este proceso se daba por un lado en la determinación del contenido matemático a ser enseñado (mediado por el GeoGebra), por otro en diseñar una secuencia de actividades en relación a la producción del conocimiento matemático que se determinó en colaboración con las docentes.

Esta forma de trabajo caracterizó desde un principio el espacio donde el equipo de maestros junto con el equipo de investigación construyó ciertas normas para funcionar de manera colaborativa. Hubo tensiones, discrepancias, idas y vueltas.

En cada una de las sesiones de trabajo se fue negociando y se co– construye el objeto de investigación. En ese sentido se tornó posible que el equipo docente conjuntamente con el de investigadoras se transforme en un equipo de producción de conocimiento. Es decir, de poder objetivar cierto conocimiento para atraparlo y realizar un diseño plausible de actividades con el fin de que ese conocimiento sea enseñado.

El planteo de los maestros sobre la preocupación por la enseñanza, se ve reflejada en las siguientes intervenciones:

> M2: *mi bichito es ¿cómo gestiono una puesta en común con esto[19]?...¿Cómo gestiono yo el espacio privado del alumno? ¿Mi mirada es cómo hago después, si esto permite construir conocimientos?* (Reunión II).
>
> *M2: Me preocupa que hay determinados ensayos de argumentaciones que el niño necesita usar el mousse para hacer, y que una intervención del maestro también pasa por ahí... ¿cómo hago que eso circule, que todos estén mirando eso...? ... y las intervenciones en el espacio privado también es un gran interrogante: pueden ir dirigidas a la herramienta o a lo matemática.* (Reunión II).
>
> *I_u: tenemos ese desafío...ver si lo podemos usar para enseñar(...).Otra decisión puede ser, ya que detectamos que los gurises en esta situación (mayoría de escuela), no han trabajado con GeoGebra, lo han usado para dibujar y lo queremos usar con un fin de enseñanza geométrico, hacemos un acercamiento al uso de la herramienta con*

19. Se refiere al programa GeoGebra.

una secuencia de enseñanza, a partir de una situación geométrica. Dibujar triángulos rectángulos isósceles. (Reunión II).

A través de estas citas podemos atrapar asuntos sobre la enseñanza, hay un cambio de lógica de M2 como reflejo de los discutido en el espacio de colaboración, se van asumiendo las cuestiones de enseñanza desde otra perspectiva: "*con nosotros dentro: investigadores y maestros*". Sostener las discusiones sobre la enseñanza y la enseñanza con el GeoGebra, a lo largo del tiempo favoreció el involucramiento de los maestros en la investigación.

Las acciones que se desarrollan en el espacio de colaboración tienen como sustento todas estas cuestiones que plantean los docentes y además existe una apertura al otro, una escucha atenta, y de valoración de posiciones diferentes. En ese sentido se comienza a transitar un desarrollo del trabajo con el GeoGebra y con el contenido de ángulos que transforman esas dudas en leves certezas, o al menos, favorecen procesos de acercamiento entre enseñanza e investigación. Esto coopera a ir cambiando levemente la mirada sobre que la enseñanza va por un carril y la investigación por otro.

Esta evolución se puede evidenciar en el siguiente párrafo:

M3: Esto suma a nuestro proyecto porque la herramienta ya no es un accesorio, no es algo que permita hacer algo que yo no pueda, sino que en realidad la herramienta se transforma en una manera distinta de aprender y ahí sí pongo en juego conocimientos matemáticos. (Reunión V).

Observamos que con el trabajo realizado y sostenido en el tiempo para conformar un espacio colaborativo, el equipo docente se ha apoderado de la investigación, en su discurso M3 usa la idea *"nuestro proyecto"* y destaca que en su búsqueda sobre el uso del recurso GeoGebra para la enseñanza, descubre que la herramienta se transforma en una manera distinta de aprender. En ese sentido M3 se posiciona dentro de la investigación haciéndose preguntas sobre la enseñanza.

Otro elemento en el que evidenciamos el involucramiento de los maestros en la investigación, fue la conformación de un tercer espacio[20] que las investigadoras no habíamos previsto. Este espacio se generó entre una semana y otra, es decir entre sesiones. Las docentes participantes de la investigación comenzaron a reunirse, a pensar en los asuntos que se discutían en el espacio de colaboración de igual manera que las investigadoras en su espacio. Es así que se conforma un nuevo espacio no previsto: el de las maestras y practicantes entre las sesiones de trabajo. Creemos que este hecho es una forma más de apropiación de la investi-

20. Existían dos espacios, el de las investigadoras (EI) y el espacio común investigadoras y maestros (EC).

gación. En consecuencia, podría funcionar como respuesta vivida de las primeras interrogantes que plantearon las maestras.

Los aportes de las maestras al finalizar la investigación dan cuenta de que el espacio de colaboración construido ha logrado transformar la idea sobre el binomio enseñanza –investigación a partir de un cambio de conciencia. Una evidencia de ello son los dichos de las maestras.

> M3: *El clima de confianza y bajo riesgo, pero también de rigurosidad, seriedad y respeto, creo que favoreció la gestación de un espacio que deseábamos compartir y disfrutábamos cada semana*. (Relatos)
>
> M1: *Una vez que se conoce y se vive una forma de trabajo así, no se puede más que aspirar a ello.* (Relatos)

Maestras e investigadores hemos tomado conciencia en todo el proceso que la investigación (desde esta perspectiva) y la enseñanza están profundamente amalgamadas, que una necesita a la otra y que juntas favorecen una mejor comprensión y calidad de enseñanza y a su vez las miradas no son ajenas a la investigación por parte del equipo docente.

La voz de M1 en la presentación de los avances preliminares a la Sala de Didáctica de los Institutos Normales de Montevideo, refleja en conjunto con la cita anterior que esta forma de abordar la enseñanza y la investigación desde la colaboración de los actores "es *solo un camino de ida esto de meternos en la investigación, y que los asuntos de la enseñanza son parte de la investigación y la investigación parte de los asuntos de enseñanza*".(Octubre, 2016)

Creemos que, en esta escuela, con el equipo que conformamos: maestras, practicantes e investigadores, se comenzó a cambiar la idea de que la investigación y la práctica no se relacionan, intentando romper ese vínculo como opuestos entre teoría y práctica e investigadores y maestros.

En ambos equipos, las transformaciones operadas nos permiten interpretarlas en términos de inclusión: la inclusión de los docentes (con sus producciones, el GeoGebra, sus aulas y sus alumnos) en una investigación (en el caso del CFE) y la inclusión de las producciones de los alumnos en los proyectos de enseñanza (en el caso de la Unipe). En ambos equipos, en el de la las transformaciones acaecidas se pueden considerar como ***productos*** del trabajo colaborativo.

3.4. Las puestas en común como asunto del que ocuparse

En las dos orillas identificamos como asunto del que ocuparse, la problemática de la puesta en común. En el caso uruguayo fuertemente asociada a un nuevo recurso dentro del aula, el GeoGebra, y en el caso argentino vinculada a la consideración de las producciones de los alumnos, los debates que se podrían propiciar, las relaciones que se podrían identificar, etc. En ambos equipos estas ideas que se discuten alrededor del espacio colectivo en las aulas sobre la base de las producciones de los alumnos (puesta en común) generan incertidumbres y temores por parte de las maestras.

En ese sentido, la experiencia de trabajo colaborativo con maestros permitió a ambos equipos de investigación comprender más profundamente la complejidad que implica para un docente sostener un trabajo en el que su enseñanza se entrame con los aportes de los alumnos, ya sea a partir de la entrada al aula del GeoGebra o no. Un momento en el que se hace visible el modo en que este entramado se despliega es la puesta en común de una actividad.

a) La evolución del sentido de la puesta en común

Identificamos, en el caso argentino, que las producciones de los niños con relación a cálculos aritméticos, como fuente para discutir problemas de enseñanza, fueron con el tiempo cobrando relevancia. Esto se dio a dos niveles. El primero vinculado al análisis de las relaciones matemáticas de las que daban cuenta los procedimientos infantiles, la segunda en relación al tratamiento de esas producciones por parte del maestro en las instancias grupales en sala de clase.

Sin embargo, el modo de tratamiento de las mismas en las puestas en común, no fue una zona de coincidencia entre investigadores y maestros. Interpretamos que para los maestros, la puesta en común era un momento de difusión de las diferentes estrategias, oportunidad para corregir o revisarlas mientras que para los investigadores, tomarlas como objeto de análisis y comparación podía abonar el enriquecimiento de las relaciones matemáticas que se reconocen y circulan en el aula, (Sadovsky et al., 2017).

Para que se tomen las producciones de los niños como objeto de análisis es necesario intervenciones docentes que problematicen las relaciones entre los problemas que se resuelven, los cálculos presentados por los niños para abordar dichos problemas y las comparaciones entre dichos procedimientos como fuente para validar las diferentes estrategias y hacer explícitas para todos los niños las relaciones que las sustentan. De este modo todos los niños podrían acceder a un conocimiento nuevo, producto de una reelaboración colectiva de razones anclado en sus producciones personales.

En el caso uruguayo, las puestas en común como espacio de confrontación de ideas donde se trata de hacer explícitas las relaciones matemáticas que están presentes y de establecer relaciones entre las diferentes producciones fue una problemática compartida de hecho entre maestros e investigadores. La tensión estuvo dada por el uso de GeoGebra en el aula y que éste estuviera presente en la puesta en común porque era el recurso que los alumnos estaban usando en las actividades diseñadas.

Por un lado, el equipo de investigación de UNIPE propone en el espacio de colaboración analizar las producciones de los alumnos para organizar una posible puesta en común a partir de ellas. Se constató que los maestros se notaban cada vez más finos en el análisis de las producciones pero no veían la relación intrínseca con la puesta en común a partir de este análisis. En ese momento el equipo argentino interpretó:

> que no existe hoy por hoy en las prácticas escolares una diferenciación clara, en términos de conocimiento matemático, entre lo que los niños hacen cuando despliegan sus procedimientos personales y lo que el docente puede explicar sobre esos procedimientos. En otros términos, ¿cuál es su aporte específico, además de alentar la difusión de las estrategias en sala de clase? Pensábamos,(...)que esa diferenciación podría construirse si se revisaran dichas producciones para encontrar elementos genéricos que podrían constituir justamente el respaldo de enseñanza que el maestro necesita para promover en su clase inscripciones más generales a partir de lo que los alumnos proponen. (Sadovsky, Quaranta, García, Becerril e Itzcovich, 2017, p.3)

En este sentido, en el espacio uruguayo, el análisis de las producciones de los alumnos, no solamente se tomaba en cuenta como insumo para la organización de la puesta en común, sino que además abonaba y transformaba la secuencia de actividades que se había construido. Es decir lo que se analizaba, a partir de las producciones de los niños, reconfiguraba no solo la puesta en común correspondiente a esa actividad sino que condicionaba la actividad siguiente modificándola cuando era necesario en relación con la secuencia que se venía implementando.

El equipo de investigadores argentinos reconoció en ese momento un problema intrínseco al funcionamiento colaborativo del espacio que requiere el compartir interpretaciones (Dubet, 2011, citado por Berdnaz, 2017[21]) para que el problema de enseñanza que emerge –la gestión de los diferentes procedimientos de los niños en la puesta en común– pueda ser desarrollado con la con-

21. Bednarz, N. (2017). Conferencia en el marco de EDIMAT. Neuquén 2017.

tribución de saberes, necesidades, restricciones, perspectivas de ambos grupos profesionales.

Esto dio lugar a que la puesta en común se transforme en el diálogo de perspectivas que permite la reformulación de las razones que orientan la acción docente. La Didáctica de la Matemática señala como problema desde hace tiempo la consideración de las puestas en común como espacios de relatos y socialización sin una necesaria articulación entre ellos, por lo que la apertura a pensarlo juntos desde un punto de vista propositivo constituye un aporte central del trabajo colaborativo. Para el caso uruguayo, dado que se compartía el marco de la Teoría de las situaciones Didácticas (TSD), interpretamos que, como producto de recorridos más próximos entre investigadores y maestros, el proceso vinculado a las puestas en común se centró más en su anticipación, en el estudio a priori y luego de la implementación de cada actividad en la discusión sobre qué conocimientos habían circulado y cómo elegir las producciones para confrontarlas.

El equipo de la UNIPE registró los cambios de posición de una maestra de segundo año ($M_{ar)}$ quien al comienzo se resiste a retomar los procedimientos de sus alumnos para hacer una puesta en común, pero su propia experiencia le "revela" que para los niños volver al mismo problema no es "hacer lo mismo", sino que "pasan cosas diferentes". Como un producto del trabajo en el espacio colaborativo, los docentes empiezan a concebir la posibilidad de abordar colectivamente lo que "algunos" alumnos en particular hacían y convertirlo en una oportunidad de aprendizaje para todos.

La introducción de la comparación de procedimientos se muestra como un criterio posible pensando en una renovada consideración de la puesta en común como una "socialización enriquecida". Desde ese cambio de posición empieza a tomar sentido el análisis respecto de cuáles de los procedimientos de resolución de una actividad vale la pena poner a consideración de los alumnos. Se empiezan a elaborar ideas que van dotando de nuevas razones –más allá de la difusión– a las decisiones que se toman para organizar las puestas en común para lograr avances en los aprendizajes.

En el equipo del CFE el proceso de incorporar el GeoGebra a la práctica docente y la gestión didáctica del mismo, tomando en cuenta las exigencias y limitaciones que impone una puesta en común con este recurso tecnológico, fue desde los inicios una preocupación que instaló la maestra del grupo de quinto año.

> *Planteaba "¿qué vamos hacer en la puesta en común?", ¿de qué manera la vamos a implementar?, ¿vamos a usar cañón?, ¿será confrontación de resoluciones o...?*
>
> M_u: *mi bichito es ¿cómo gestiono una puesta en común con esto? Una vez que determiné el contenido a enseñar, que hice el recorte, que elegí la actividad, que bloqueé tal herramienta, que creo que el resto de los recursos limita procedimientos*

y esta potencia. ¿Cómo genero yo la puesta en común? ¿Cómo gestiono yo el espacio privado del alumno? ¿Mi mirada es cómo hago después, si esto permite construir conocimientos? (Reunión II)

Esta preocupación también estaba instalada en el equipo de investigación, por lo que esta zona común de preocupación sobre la enseñanza, concretó una condición fundamental en el espacio colaborativo como lugar donde se construirán nuevas alternativas frente a preguntas comunes que se abordan.

Se instalan preguntas estrechamente vinculadas: ¿cómo hacer una puesta en común con el GeoGebra?, ¿en qué nos cambia la entrada de ese recurso al aula en términos de organización?, así como también en las consideraciones de las relaciones matemáticas que empiezan a circular y cómo vincularlas con el tipo de trabajo que se propone a los alumnos y a las producciones de éstos en relación a la puesta en común.

Otro aspecto en el equipo uruguayo que debió ser atendido en relación a la puesta en común fue la necesidad de guardar y recuperar las producciones de los niños realizadas en GeoGebra. En este sentido el lugar de las producciones como punto para anclar la puesta en común era un acuerdo de hecho entre los integrantes del espacio colaborativo como ya mencionamos y que fue sostenida durante toda la investigación.

Volviendo al caso argentino, entendemos que fue decisivo para un cambio de posición por parte de las maestras la fortaleza que les otorgaba interpretar en profundidad los procedimientos como resultado de las discusiones en el espacio colaborativo. Poder "tocar" la matemática implicada en las estrategias de los alumnos habilitó un cambio de sentido en la acción docente vinculada a la puesta en común.

Otro aspecto que se evidenció como parte de este movimiento fue pensar en qué medida los maestros al interpretar las producciones de los alumnos en relación a los avances vinculados al cálculo, podían "extender este análisis situado" estableciendo cierto nivel de jerarquía entre esas producciones y delinear criterios para la elección de las mismas. Una maestra plantea que ponerlas en un orden jerárquico juega en contra, promoviendo la discusión de criterios para seleccionar procedimientos a comparar que se basan en las relaciones que comandan las producciones de los niños. Si las relaciones que se pueden establecer entre los procedimientos de los niños son próximas es más fácil de ponerlos en debate en la comparación. Si son muy distantes tal vez abonen a la confusión y no promuevan un avance en la conceptualización.

El rol de la categoría "jerarquización" (Charles Pezard, 2012) emergente del espacio de colaboración pudo ser un elemento nuevo de referencia para una decisión, que tensionó la relación con otra categoría "la proximidad" considerando como eje a las relaciones matemáticas que están en juego en cada producción. La elaboración de razones con estos criterios para la elección de algunos procedimientos a confrontar en la puesta en común busca que los niños evidencien las equivalencias entre las resoluciones, zanjando para el maestro su preocupación inicial referida a lo confuso que podía resultar para los alumnos comparar casos más distantes o diferentes.

La potencialidad de los procedimientos elegidos está más centrada en su posibilidad de explicitación de relaciones intra e inter producciones que pueden lograr el involucramiento de todos los niños del grupo y posibilitar la aparición de pistas para avanzar en sus resoluciones personales.

Como parte de las transformaciones, se termina discutiendo que hay que analizar también las escrituras de los niños como representantes de las relaciones y procedimientos que usaron, generando criterios para seleccionar producciones de los niños: que se entienda, su posibilidad de visibilizar las relaciones matemáticas usadas, su potencial comunicativo. "Si se entiende un procedimiento es candidato a ser compartido/confrontado en la instancia de puesta en común." De esta manera lo personal de cada alumno y lo contextual se transforma por intervención del docente en general y descontextualizado, promoviendo las posibilidades de avances conceptuales y la posibilidad de reutilización de la herramienta matemática.

Esta discusión también se evidenció en el equipo de investigación del CFE en términos de que poner a discusión, cómo confrontarlos, más allá del GeoGebra. La posibilidad de generalización ha sido también un norte, que se destaca en la investigación uruguaya, como criterio de acción didáctico para analizar qué aspectos se recogen de las producciones de los niños y se problematizan en consecuencia durante la puesta en común. Este mecanismo de producción de conocimiento que funciona en la Matemática, también tiene su correlato en la producción de saber didáctico para orientar la acción del docente, pudiendo algunas veces configurar un nuevo marco conceptual para la toma de decisiones. Un marco que permite abordar variados asuntos matemáticos que se asoman en esta comparación.

Las posibilidades que da un trabajo colaborativo acogen y enriquecen la toma de consciencia sobre la acción, lo que da oportunidades al docente para preguntarse por qué razones eligió una acción en vez de otra o para analizar las transformaciones que sufre una decisión tomada inicialmente desde un cierto marco, por ejemplo tomar en cuenta las producciones de los niños, para ser enriquecida por la toma en consideración de criterios que va elaborando, cómo los va vinculando según la potencialidad comunicativa y/o generalizable de ellos como para ser "elegibles" para la confrontación en una puesta en común.

Retomando lo resaltado por Bednarz (2015), que aunque una investigación colaborativa no tenga como su objetivo principal el desarrollo profesional docente– tal como son los casos que estamos comparando en este trabajo– igual varios estudios han demostrado que este espacio reflexivo logra un desarrollo profesional que puede tomar diferentes formas: una explicación, una mejor comprensión de sus prácticas profesionales por parte del profesional, una afirmación de esta práctica o incluso una reestructuración, o incluso un cambio en esta práctica. (p.177)

Durante los primeros encuentros en el espacio colaborativo en el equipo del CFE, existía una tensión fuerte sobre las intervenciones docentes vinculadas a la gestión de la clase en el momento de la puesta en común con el GeoGebra. Interpretamos que fuertemente asociada a la incertidumbre que caracteriza la práctica docente y que ahora en particular es provocada por el ingreso de un nuevo recurso y a las producciones que los alumnos desplegarían con el mismo. Esta tensión fue cambiando al ir discutiendo las interacciones que tienen lugar en la clase en paralelo a la implementación de la secuencia y al ir elaborando conjuntamente estrategias de intervención, reconociendo las relaciones matemáticas que están involucradas en las producciones de los niños y especialmente en la elaboración de fundamentos que anclan en el análisis de casos particulares pero tienen una posibilidad de ser extendidos a otras situaciones. Destacando el papel que cumple la implementación en el aula de las actividades como fuente para recolectar insumos que permite analizar los problemas de enseñanza que se van tratando en los espacios de colaboración. La exploración entonces se instala como necesaria para tratar con la incertidumbre que generan esas nuevas interrogantes que van apareciendo y que la misma contribuye a disminuir.

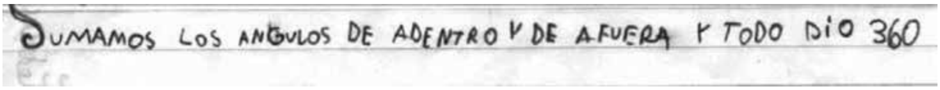
b) El ajuste de hipótesis de la puesta en común a partir de momentos "doblemente" exploratorios

En el caso uruguayo, los insumos que provienen de la exploración en el aula fueron un elemento fundamental para: analizar las anticipaciones realizadas sobre cómo iba a funcionar una actividad que era nueva para todos, actualizarlas y atemperar la incertidumbre que provocaba la introducción de la herramienta GeoGebra.

El problema 4 de la secuencia desarrollada durante el 2016 es un ejemplo ilustrador de los problemas de enseñanza tratados en el espacio maestros/investigadores uruguayos. La consigna del mismo constaba de dos partes, una primera en donde los alumnos tienen que indagar en los triángulos qué relaciones existen entre: un ángulo interior (de "adentro") y el de "afuera", entre todos los de afuera, entre todos los de afuera y los de adentro. La segunda parte en donde tienen que escribir las conclusiones a las que llegaron para luego presentárselas al resto de los compañeros y dar una explicación de las mismas.

Previamente se tomaron decisiones en el espacio de colaboración, en relación, entre otros focos, a la puesta en común y se decide diferir la puesta en común para otra clase con el fin de analizar las producciones de los grupos para poder elegir qué producciones confrontar y en qué orden. Se acuerda comenzar tratando la producción del grupo (G1) cuya producción involucra una relación entre los ángulos de adentro y de afuera. Se buscaba que cada grupo, como resultado de la discusión colectiva, pudiera relacionar la producción que se discutía en la puesta en común con la suya con el fin de enriquecerla.

La relación que G1 estableció fue que *"la suma de un ángulo de adentro más el de afuera en un triángulo es 360 grados"*.



En su explicación plantean que, en varios triángulos, midieron los ángulos "de adentro" del triángulo y los "de afuera" y les daba cada suma siempre 360 grados. Asimismo, observaron que el ángulo de afuera más el de adentro da un "*círculo*" (ángulo completo). La validez de esta propiedad para ellos, venía dada por el hecho de haberlo hecho muchas veces y en diferentes tipos de triángulos.

A1: *Si sumas un ángulo de afuera con uno de adentro siempre va a dar 360°*. Frente al establecimiento de una relación constante de dependencia entre estos dos ángulos, otros niños intervienen afirmando que eso es verdad si los ángulos son en *el mismo vértice* poniendo ejemplos que combinan ángulos de diferentes vértices y que no suman 360º.

Esto evidencia que a partir de la confrontación los niños complejizan las relaciones matemáticas que van tratando, al ir estableciendo condiciones de validez, "*siempre, si es el mismo vértice*", apelando a contraejemplos para sostener su argumento. Surgen por lo tanto nuevas cuestiones que no son hipótesis previstas en el espacio de colaboración y que hacen a la incertidumbre propia del trabajo docente. En el mismo sentido otro alumno expresa que si a lo establecido por el G1 se le agrega que todos los ángulos del triángulo sean iguales no sería necesario decir que es en el mismo vértice. Esta discusión entre alumnos a partir de casos particulares pero con un abordaje genérico permite entrar en otra cuestión que amplía para los alumnos la regularidad encontrada: el dominio de validez de una proposición. (Damisa, et al., 2017).

Otra cuestión que surge es que si un ángulo se mueve en el triángulo, todos los ángulos también varían, explicitando otro aspecto de la relación del ángulo de adentro y su correspondiente de afuera.

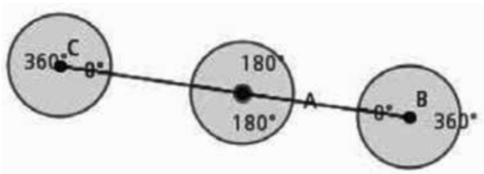
A1: *s*i afectas el de adentro va a afectar el de afuera.

Dando cuenta una vez más, según Sadovsky (2005) hay momentos en los que las cuestiones nuevas que los alumnos enfrentan dan lugar a incertidumbres tales que la interacción con los pares legitima nuevas preguntas que inauguran otros posibles para el trabajo matemático. (p.61)

El uso del GeoGebra hace posible que los alumnos se (re)cuestionen además la existencia de un triángulo a partir de esta relación de dependencia y variación de ángulos anclada en una situación extrema, cuando un ángulo es de 180° y los otros son de 0°, ¿será un triángulo?

A2: *la condición que sea un triángulo es que tiene que tener tres ángulos,*

A3: ¿pero un ángulo de cero grados, sigue siendo un ángulo?



Como parte de sus conjeturas luego de las exploraciones, retomamos el diálogo entre ellos:

A6: Encontramos que el ángulo de adentro nunca va a ser más grande que el de afuera. En los triángulos.

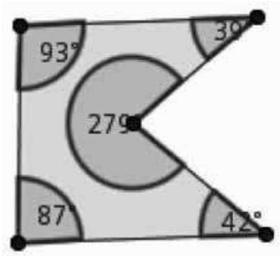
A1: Si el de adentro mide más de 180 el de afuera es más chico.

A2: Si el de adentro no es más de 180 el de afuera no puede ser más chico.

Lo que nuevamente da evidencias de un impulso generalizador por parte de los niños, al considerar nuevas preguntas para las mismas relaciones que están tratando o ampliar la relación para los mismos objetos, pero en figuras nuevas. De esta última cuestión da cuenta la curiosidad del niño A7 al plantear que: *"Me interesa saber si en toda figura el ángulo de adentro es más chico que el de afuera."* (Damisa, et al., 2017)

La puesta en común en este grupo va dando lugar a nuevas cuestiones matemáticas, algunas de las cuales la maestra decide en ese momento sostener, interpretamos que debido a su potencialidad globalizadora o generalizadora de las relaciones que quiere instalar en la clase.

Un ejemplo de ellos es la cuestión que plantea A6 que está alineada con lo planteado anteriormente por A7 sobre si no habrá figuras en las que sí suceda que el ángulo de adentro es más grande que el de afuera. Interpretamos que esta intervención docente busca alentar una nueva exploración ampliando a otros polígonos, objetivo de otra actividad ya planificada en la secuencia. De este modo se alienta una nueva exploración para todo el grupo, lo que para la sorpresa de todos los maestros e investigadores, es respondida inmediatamente por un grupo que presenta la siguiente producción para argumentar que ellos sí habían encontrado una:



Esto muestra un contraejemplo de la proposición *"siempre los de afuera son más grandes que los de adentro"* e introduce una ampliación de la problemática original al incluir ahora polígonos diferentes a los triángulos. También pone en evidencia los tipos de imprevistos que tiene que considerar un docente en su gestión con un recurso dinámico como el GeoGebra que permite a los niños realizar múltiples exploraciones y dejarlas registradas en una misma "hoja" a la que pueden acceder con gran facilidad.

Esta posibilidad complejiza mucho, para un docente que generalmente gestiona solo, el poder estar al tanto de los procesos que hacen los niños y en consecuencia tomar decisiones en pocos minutos durante la gestión. Es decir que a pesar de que se hayan analizado las producciones de los alumnos y organizado una posible puesta en común, durante la misma surgen nuevas preguntas que no siempre se cierran en ese momento porque abren otros aspectos diferentes a los que se inicialmente se había planificado tematizar y que configuran los intersticios inevitables de incertidumbre del accionar docente. Brousseau (2007) explica que la función de la institucionalización es la de establecer y dar un estatus oficial al conocimiento que ha circulado durante una actividad, particularmente es el docente el que tiene la función de relacionar las producciones de los niños durante su trabajo individual o grupal con el problema que les han planteado y el saber científico de referencia. La institucionalización representa un momento de síntesis o generalización de las producciones de los alumnos y sus acciones, estableciendo así para los alumnos, los objetos "oficiales" del saber en un momento determinado, bajo ciertas condiciones.

En ambas orillas del Plata aparecen tensiones en el momento de la puesta en común, dándose características diferentes en el equipo uruguayo por el uso del GeoGebra y de acuerdos en cómo considerar la puesta en común entre investigadoras y maestras. Sin embargo se detectaron en ambos equipos tensiones en el espacio de colaboración que permiten la reconfiguración de algunos asuntos en relación a la puesta en común atendiendo a:

- ¿Qué criterios para la acción aparecen vinculados a la gestión de una puesta en común?
- ¿Cómo sistematizar los intercambios que se dan en clase?
- ¿Qué asuntos potencia la anticipación de ideas que pueden producir los niños antes de la implementación en el aula de una actividad, reconociendo las ideas matemáticas y las dificultades, los modos de validación que pueden poner en juego los niños, así como también la manera de que representan sus producciones.
- Al tener las producciones reales, ¿qué criterios atender para diseñar un orden específico para la presentación de las producciones de los alumnos que configure un anclaje "reconocible" para la mayoría de los alumnos cuando se analicen y que a su vez apunte a considerar en la puesta en común ideas matemáticas sustantivas.
- Reconocer asuntos potentes pero que no serán en esta oportunidad desarrollados, dando cuenta de una continuidad del proceso y de una necesidad de "repensar" el tratamiento de esos aspectos no analizados previamente en el espacio de colaboración o sobre los cuales existe más incertidumbre. Dando lugar a nuevas preguntas en el espacio colaborativo: ¿cómo seguir con esto?, ¿qué tomar?, ¿qué dejar para más adelante?
- Repensar la función y condiciones de una puesta en común al introducirse un nuevo recurso, el GeoGebra.

4. Conclusiones

Varios aspectos son los que nos interesan destacar de esta investigación en concordancia con los objetivos de la misma. En primer lugar hemos realizado un análisis comparativo entre los proyectos de los equipos de Uruguay (CFE) y de Argentina (UNIPE) para pensar problemas de enseñanza que emergieron desde un marco de trabajo colaborativo, teniendo en cuenta la inclusión del GeoGebra en el caso de Uruguay.

Se han identificado las ideas en categorías que fuimos detallando en el desarrollo de este informe de investigación:

- La **relación problematización - hito, espacio de colaboración**, relaciones construidas entre la problematización de conocimientos, el espacio de colaboración, la incertidumbre y la viabilidad de la exploración de ideas en ambos equipos.
- **La exploración** en función de los problemas de enseñanza que emergieron y la potencialidad del GeoGebra.
- La **transformación** en términos de procesos inclusivos y de producción intelectual.

En relación a los vínculos **problematización - espacio de colaboración**, identificamos que las condiciones generadas en el espacio de colaboración permitieron que emergieran ciertas problemáticas y a su vez esta identificación de ideas fue afianzando el espacio de colaboración. Algunas de las problematizaciones se transforman en **hitos**. De este modo la relación hito - espacio de colaboración se convierte en una relación dialéctica. No todas las problemáticas identificadas lograron un estatus de hito. Las que se transformaron en hito son aquellas en las que todos los integrantes no teníamos respuesta a priori para las mismas. Esto generó un nivel de incertidumbre en ambos equipos lo que demandó realizar exploraciones para encontrar algunas posibles respuestas a dichas problemáticas. En particular para el equipo de Argentina un hito fue que las maestras integraran las producciones de los alumnos como relaciones matemáticas relevantes a la hora de considerar la enseñanza de las operaciones aritméticas. Estas producciones se convirtieron en dinamizadores para nuevos asuntos de enseñanza. Por otro lado, un hito en el equipo de Uruguay, es generado por la entrada en acto del uso de GeoGebra al espacio de colaboración y con él algunas de las consideraciones sobre la enseñanza de los ángulos con GeoGebra.

Como mencionamos, la generación de incertidumbre posibilitó la viabilidad de **exploraciones** con el fin de encontrar algunas respuestas a los hitos identificados. En el equipo argentino, trabajar con las producciones de los niños como insumo permitió identificar y entender lo que los niños elaboran en términos de conocimientos. Por tanto, lograr cambios de posición del docente en relación a la importancia de la consideración de las producciones de los alumnos como parte del proyecto de enseñanza fue una de las producciones en el espacio de colaboración.

En el equipo de Uruguay, el GeoGebra como recurso, posibilitó la exploración en el trabajo con ángulos en polígonos, permitiendo la producción de conocimientos tanto didácticos como matemáticos. Se identificaron nuevas relaciones referidas a las sumas de todos los ángulos: de adentro, los de afuera y los de adentro– afuera.

Las exploraciones realizadas en el espacio de colaboración habilitaron pensar nuevas ideas sobre los ángulos. En palabras de M3 en Damisa et al., (2017):

> Así como uno habla de la suma de los ángulos interiores se podría hablar de la suma de los (exteriores) de afuera... Y entonces eso que veíamos el otro día como un obstáculo didáctico que siempre que nosotras enseñamos ángulos, siempre vemos el de adentro y nunca el de afuera. (p.58).

Identificamos dos niveles de exploraciones: una a nivel del espacio de colaboración y otra en el aula. Ambas exploraciones funcionan en términos dialécticos. La exploración dentro del equipo viabiliza la exploración en el aula y a su vez la exploración en el aula habilita nuevas exploraciones en el espacio de colaboración y de este modo se continua produciendo conocimiento.

Otro aspecto que nos resulta interesante destacar, y que lo planteamos en términos hipotéticos, refiere a las transformaciones de las **relaciones entre docentes, investigación, alumnos e inclusión educativa.**

Por un lado, tal como se planteara en ambos proyectos, uno de los objetivos implicaba poner en debate los marcos interpretativos de todos los integrantes de cada equipo colaborativo, analizando las transformaciones que se van produciendo. Entre otras cuestiones, avanzar en las interpretaciones de las producciones de los alumnos –de un lado del Río–, lo que demandaba ampliar dichos marcos; y del otro lado revisitar las relaciones geométricas, ahora en el marco del trabajo con el GeoGebra, y su potencialidad en el proceso de enseñanza.

Ambas cuestiones obligaron a todos los integrantes a involucrarse en un proceso exploratorio, tal como hemos relatado, cuya modalidad incluía la elaboración de hipótesis de trabajo, ensayos en las aulas y el estudio de lo acontecido.

En Argentina, el análisis de los conocimientos matemáticos a enseñar, la interpretación de las relaciones matemáticas involucradas en los conocimientos que desplegaban los niños se debatían en simultáneo con las intervenciones docentes que las consideraban y permitirían promover avances. En este sentido, subyacía la hipótesis de que estas cuestiones estaban asociadas con la inclusión educativa y el supuesto de partida sobre las posibilidades de aprendizaje de los alumnos (Sadovsky et al., 2016, 2018b).

En tanto que en Uruguay, desde el inicio del trabajo "latía" la sospecha sobre "la investigación" por parte de los docentes. La historia misma de ciertos proyectos de investigación alojados en las Instituciones Educativas no siempre han permitido a los docentes involucrarse en ellos y, en algunas oportunidades, tampoco les han realizado una devolución del trabajo desarrollado. En el mismo sentido, no resultaban del todo claro las relaciones entre "esta" investigación y los problemas de enseñanza.

Con el desarrollo del trabajo, se fue haciendo evidente para todos el complejo entramado entre enseñanza e investigación: "Personalmente es algo nuevo y me genera un desafío, no es algo que se diga ah mirá yo lo trabajé así...y me parece que desde la investigación aporta, que es algo nuevo porque no hay material al respecto" (Damisa, et al., 2017, p.60).

Las dudas y tensiones iniciales fueron dejando paso al compromiso asumido por todos los docentes de la Institución, como ya hemos relatado. El juego entre las relaciones geométricas que se intentan incluir en el proyecto de enseñanza –y que en general la escuela no enseña–, las dudas que provoca tratarlas en las clases con el GeoGebra, las anticipaciones necesarias sobre el trabajo en el aula con los niños, la necesidad de buscar razones de manera conjunta para analizar lo que sucedía en el aula y con el uso de la computadora, promovió que los docentes se sintieran incluidos en el proyecto de investigación. Se fue rompiendo esa división del trabajo asumida tradicionalmente, por un lado, los maestros desde la práctica y las investigadoras desde la teoría. (Damisa et al., 2017).

Es por todo lo expresado recientemente que, en ambos equipos, las transformaciones operadas nos animan a interpretarlas en términos de *inclusión*: la inclusión de los docentes (con sus producciones, el GeoGebra, sus aulas y sus alumnos) en una investigación (en el caso del CFE) y la inclusión de los docentes en la reflexión y producción sobre su propio trabajo, como posibilidad de considerar las producciones de los alumnos en los proyectos de enseñanza (en el caso de la Unipe). En ambos equipos, estas transformaciones podemos considerarlas como *productos* del trabajo colaborativo.

5. Bibliografía

Bednarz, N. (2013). *Regarder ensemble autrement: ancrage et développement des rechreches collaboratives* en éducation au Québec. En N. Bednarz, Recherche collaborative et pratique enseignante. Regarder ensemble autrement (págs. 13–29). Paris: L'Harmattan.

Bednarz, N. (2015). La Recherche collaborative. Carrefours de l'éducation (39), 171-184.

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*. Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Charles Pézard, M.; Butlen, D.; Masselot, P. (2012): *Professeurs des* écoles *débutants en ZEP Quelles pratiques? Quelle formation?.* Recherche et formation. Grenoble: la Pensée sauvage.

Damisa, C; Dodino, L; Piedra Cueva, I. (2017). *Geometría en el aula con GeoGebra. Una experiencia de trabajo colaborativo en la escuela.* CFE. Adminitración Nacional de Educación Pública. Grupo Magro Editores. Montevideo.

Proulx, J. (2013). *Réflexions* épistémologiques *sur la recherche collaborative en didactique: possibilités et excès.* En N. Bednarz, Recherche collaborative t pratique enseignante. Regarder ensemble autrement (págs. 327-349). Paris: L'Harmattan.

Sadovsky, P. (2005) *Enseñar Matemática hoy. Miradas, sentidos y desafíos*. Libros del Zorzal. Buenos Aires

Sadovsky, Quaranta, Itzcovich, Becerril, García. (2015a). Producción matemático–didáctica: una experiencia de planificación colaborativa entre maestros e investigadores. En A. Pereyra, & D. Fridman, Práctias Pedagógicas y Políticas Educativas. Investigaciones en el terrirtorio Bonaerense (pp. 221-250). Buenos Aires, Argentina: Gonnet: Unipe: Editorial Universitaria.

Sadovsky, P., Quaranta, M.E.; Itzcovich, H.; Becerril, M.M.; García, P. (2015 b). *La noción de relaciones entre cálculos y la producción de explicaciones en la clase de matemática como objetos de enseñanza. Su configuración en el marco de un trabajo colaborativo entre investigadores y docentes.* Educación Matemática, 27(1), 7-36.

Sadovsky, P.; Itzcovich, H.; Quaranta, M., Becerril, M.; García, P. (2016). *Tensiones y desafíos en la construcción de un trabajo colaborativo entre docentes e investiga-*

dores en didáctica de la matemática. (A. Avila Storer, Ed.) Educación Matemática, 28(3), 9-29.

Sadovsky, P; Quaranta, M.; García, P.; Becerril, M.; Itzcovich, H. (2017). *Los análisis de las intervenciones docentes en el marco del trabajo colaborativo entre investigadores y docentes como puente hacia la inclusión educativa.* IV Coloquio Internacional de Inclusión Educativa. Los desafíos de la Educación Inclusiva (pág. En prensa). Buenos Aires: Unipe-Unsam-Université de Reims-Cinde-OEI.

Sadovsky, P; Itzcovich, H.; Becerril, M.; Quaranta, M; García, P. (2018a). *La reconfiguración de un marco conceptual para la enseñanza. Resultados de un trabajo de colaboración entre docentes e investigadores en didáctica de la matemática.* (En prensa)

Sadovsky, P.; Quaranta, M. E.; García, P.; Becerril, M. M.; Itzcovich, H. (2018 b) *Procedimientos personales de los alumnos y acción didáctica. Contribuciones de un trabajo colaborativo entre docentes e investigadores en didáctica de la matemática* (En prensa)

Sensevy, G. (2011). *Le sens du savoir*. Bruselas: De Broeck.

Trouche, L. y Gueudet, G. (2009*). Towards new documentation systems for teachers?* Educational Studies in Mathematics, 71(3), 199–218. Doi: 10.1007/s10649-008-9159-8.

Este trabajo es el resultado del desarrollo de un proyecto que se propuso comparar el funcionamiento de dos espacios de trabajo colaborativo (Bednarz, 2013; Proulx, 2013; Sensevy, 2011), cada uno de ellos constituido por docentes e investigadores en el área de la Didáctica de la Matemática. Entendíamos, y eso motorizó la formulación de un proyecto conjunto, que el análisis comparativo de la producción matemático didáctica en dos espacios colaborativos que se sitúan en realidades diferentes puede contribuir a conocer mejor la potencialidad y el alcance de esta modalidad para construir en los docentes una posición autónoma y crítica con relación a la elaboración de sus propios proyectos de enseñanza al tiempo que puede ayudar a precisar las restricciones que impone el funcionamiento de la enseñanza para introducir cambios que suponen rupturas respecto de la tradiciones heredadas de la escuela moderna . Asumimos que el posicionamiento autónomo de los docentes poco a poco va haciendo posible comprender la enseñanza en términos de hipótesis a explorar mucho más que como pasos a seguir y que radica acá una condición de posibilidad para promover en las aulas una actitud de búsqueda y exploración por parte de los alumnos.

ISBN: 978-9974-8691-1-0
ISBN en línea: 978-9974-8691-2-7