Estrechando lazos entre investigación y formación en Matemática Educativa

Experiencias conjuntas de docentes y futuros docentes

Volumen II

Compiladoras

Gabriela Buendía | Verónica Molfino | Cristina Ochoviet

Consejo de Formación en Educación

Departamento de Matemática

Uruguay

Estrechando lazos
entre investigación y formación
en Matemática Educativa

Experiencias conjuntas de docentes y futuros docentes

Volumen II

Compiladoras

Gabriela Buendía | Verónica Molfino | Cristina Ochoviet

Consejo de Formación en Educación

Departamento de Matemática

Uruguay

1ª edición: diciembre de 2015

Diseño de portada: Santiago Raía Scialó

Edición: Verónica Molfino – Cristina Ochoviet

ISBN 978-9974-711-58-7

Departamento de Matemática

Asilo 3255

Montevideo, Uruguay

Por sugerencias o comentarios acerca del contenido de esta obra dirigirse a: depdematematica@gmail.com

ÍNDICE

PRESENTACIÓN

> Me dijeron que en el Reino del Revés
> nada el pájaro y vuela el pez,
> que los gatos no hacen miau y dicen *yes*
> porque estudian mucho inglés.
>
> *María Elena Walsh*

En el encantador Reino del Revés que nos regaló María Elena Walsh, lo imposible deja de serlo para volverse un hecho natural; y aunque no estemos en ese Reino, algo similar ha ocurrido con este proyecto que iniciamos en el año 2014. Cuando emprendimos esta tarea de compilar trabajos que, escritos por docentes y sus estudiantes, estuvieran relacionados con resultados de investigación en Matemática Educativa, teníamos confianza en lograr un primer volumen. Pero nos resultaba difícil imaginar que pudiéramos darle continuidad en tanto el desafío es inmenso en diversos sentidos.

Varios componentes inciden en la concreción del camino a transitar. Uno de ellos es la instauración en el aula de formación docente del hábito de analizar investigaciones en Matemática Educativa. Otro, la vinculación de los resultados de dichas investigaciones con la práctica docente de los estudiantes, tanto mediante el emprendimiento de micro diseños de investigación como mediante la reformulación crítica del discurso matemático escolar (que cristaliza en diseños para la enseñanza y en recursos didácticos novedosos). También se hace necesario desarrollar procesos de escritura de profesores y estudiantes en conjunto que finalmente posibiliten la divulgación de los trabajos a la comunidad de docentes de matemática, egresados y en formación.

Este logro es fruto de un proceso que tiene una forma particular de pensar la formación docente, una concepción que se sostiene en dos líneas de trabajo fundamentales. Por un lado, el esfuerzo explícito que se viene realizando por estrechar lazos entre la investigación y la práctica, pues es en la formación docente, inicial y continua, donde ese vínculo fermenta y tiene un efecto expansivo. Y, por otro, la apertura entre docentes y estudiantes que ha posibilitado el trabajo colaborativo real que genera aprendizajes en múltiples sentidos y para todos los involucrados.

Este volumen contiene siete trabajos; cinco de ellos escritos por profesores y estudiantes del Instituto de Profesores Artigas; uno es producto del trabajo conjunto de profesores y estudiantes del Profesorado Semipresencial y otro está escrito por docentes y estudiantes de posgrado del Diploma en Matemática (ANEP-UdelaR).

Dos de ellos son producto de la implementación de micro diseños de investigación. En *Derivadas sucesivas: una secuencia para apreciar su potencial* se reflexiona en torno a qué nos puede aportar para la enseñanza del Cálculo una secuencia que promueva el uso de las relaciones entre la función y sus derivadas; *Más allá de la concavidad: un estudio sobre el valor numérico de la derivada segunda* presenta un trabajo en el que se indagaron los conocimientos e impresiones que tienen los estudiantes de profesorado de matemática sobre las relaciones gráficas y numéricas en torno al valor numérico de la función derivada segunda.

Otros dos trabajos consisten en propuestas de diseños para la enseñanza: en *Periodicidad en el discurso matemático escolar uruguayo: una puesta a punto y una propuesta* se realiza un análisis crítico sobre la enseñanza del concepto de periodicidad y, a la luz de elementos provenientes de trabajos de investigación sobre este tema, se presenta una propuesta de abordaje de la periodicidad en libros de texto; en *Diseño de tareas de aprendizaje con el Modelo 3 UV* se analiza la potencialidad de actividades orientadas por un modelo proveniente de la investigación en Matemática Educativa para la enseñanza del álgebra.

Por último, presentamos tres trabajos que proponen recursos didácticos novedosos. En *Una aproximación a la evaluación: el diseño de tareas* se proponen nuevos sentidos para una tarea que el profesor realiza en forma habitual; *Los cuentos entran a la clase de matemática* trata sobre la potencialidad del uso de cuentos e historias en la clase de matemática, se expone la metodología para desarrollar este recurso y se ejemplifica; finalmente, en *Tareas enfocadas a similitudes y diferencias como motor para el aprendizaje de la matemática: nuevas categorías* se presentan y ejemplifican tres nuevas categorías en este tipo de tareas: tareas de particularizar y generalizar, tareas de proponer un objeto matemático y tareas de formular preguntas para identificar un objeto matemático.

Los invitamos, pues, a disfrutar de este libro que evidencia que es posible imaginar y concretar proyectos de esta naturaleza (sin estar en el Reino del Revés). Para que el proyecto cristalice solo hace falta que se divulgue y utilice con la apertura que caracteriza el proceso de producción intrínseca a los trabajos presentados.

Ahora sí, los saludamos y nos despedimos con el compromiso de volver a encontrarnos.

Diciembre de 2015

Gabriela Buendía, Verónica Molfino, Cristina Ochoviet

DERIVADAS SUCESIVAS: UNA SECUENCIA PARA APRECIAR SU POTENCIAL

EDWARD ARAP, ANTONELLA DELLAPIAZZA, FRANCO MARIANI, VERÓNICA MOLFINO

Resumen

Las relaciones entre los aspectos gráfico y numérico de la derivada primera son ampliamente estudiadas en educación media y nivel terciario, así como algunas relaciones entre las derivadas primera y segunda. Ahora, ¿cuánto puede aportarnos profundizar en el estudio de las relaciones de subida y bajada entre f, f' y f''? En este artículo proponemos reflexionar en torno a qué nos puede aportar para la enseñanza del cálculo una secuencia que promueve el uso de tales relaciones entre f, f' y f''. Algunas de ellas están presentes en el discurso matemático escolar tradicional y otras no tanto, al menos explícitamente.

Palabras clave: derivadas sucesivas, discurso matemático escolar, pensamiento y lenguaje variacional.

Abstract

Relations between graphical and numerical aspects of the first derivative are widely studied in secondary school and tertiary level, as well as some relations between the first and second derivatives. But, which are the contributions of the study of up and down relationships between f, f' and f''? In this paper we reflect about the contributions of teaching Calculus through a sequence that promotes the use of these kind of relationships between f, f' and f''. Some of them are widely present in the traditional school mathematical discourse and others not, at least explicitly.

Keywords: successive derivatives, school mathematical discourse, variational thought and language.

INTRODUCCIÓN

Nuestra motivación para ahondar en el tema de las derivadas sucesivas y el valor numérico de la derivada segunda viene dada por dos actividades propuestas en el curso de Análisis del Discurso Matemático Escolar; asignatura correspondiente al cuarto año del profesorado de matemática en el Instituto de Profesores Artigas (IPA). La primera está relacionada con las derivadas sucesivas y aparece en Cantoral y Farfán (1998), donde se pide hallar el signo de *f*, *f'*, *f''* y *f'''* conociendo la representación gráfica de *f*. La segunda fue propuesta en la tesis de Testa (2004) y buscaba que los estudiantes pudieran explicitar el significado del valor numérico de la derivada segunda, su relación con la representación gráfica y ahondar sobre las relaciones entre *f*, *f'* y *f''*.

Ante la lectura y análisis de dichos documentos, muchas fueron las interrogantes que nos surgieron. Desde que egresamos de educación secundaria conocemos la derivada segunda y la utilizamos con los fines que señala Testa (2004, 2006): como una herramienta que aporta información acerca de la concavidad de una función en concreto. Nos llamó mucho la atención, por un lado, que hasta ese momento nunca nos hubiésemos cuestionado sobre el significado del valor numérico, limitando su potencial al estudio del signo y, por otro, que el vínculo entre *f*, *f'* y *f''* se redujera a lo algebraico en las relaciones de bajada (relaciones en el sentido $f \rightarrow f' \rightarrow f''$, esto es, aumentando el orden de derivación) y a lo gráfico en las de subida (relaciones del tipo $f'' \rightarrow f$ o $f' \rightarrow$

f, es decir, que vinculan una derivada primera o segunda con la función original, mediante los constructos de crecimiento y concavidad).

Tal toma de conciencia despertó un interés muy grande en la propuesta, múltiples discusiones, razonamientos que iban y venían, argumentos y refutaciones al argumento inicial, que en varias situaciones provocaron contradicciones en todos nosotros. Algo que nos interesó investigar fue si era posible establecer otras relaciones entre la función y sus derivadas, en particular entre *f''* y *f*, pudiéndose considerar el pasaje por *f'* como paso intermedio, es decir, *f''* a *f'* y *f'* a *f*.

Nos propusimos así elaborar una secuencia de actividades relativa al concepto de derivada en torno a las derivadas sucesivas, considerando los documentos mencionados anteriormente. Ello con el objetivo de establecer y evidenciar nuevos vínculos entre una función y sus derivadas sucesivas; asimismo, pretendemos que dicha secuencia fortalezca las relaciones existentes, las enriquezca de manera que, por ejemplo, las relaciones de bajada no sean exclusivamente algebraicas, ni las de subida exclusivamente gráficas. Para alcanzar estos objetivos, diseñamos, aplicamos y analizamos los resultados de una secuencia de actividades a estudiantes avanzados de la carrera de profesorado de matemática del Instituto de Profesores Artigas.

MARCO TEÓRICO

Abordaremos nuestro análisis desde la perspectiva socioepistemológica, que se caracteriza por la problematización del conocimiento y considera las siguientes cuatro dimensiones fundamentales en su construcción como un sistema complejo: su naturaleza epistemológica (dimensión del saber); los planos de lo cognitivo (procesos de aprendizaje del estudiante); la dimensión didáctica (los modos de transmisión a través de la enseñanza) y su dimensión sociocultural (el contexto y las prácticas sociales).

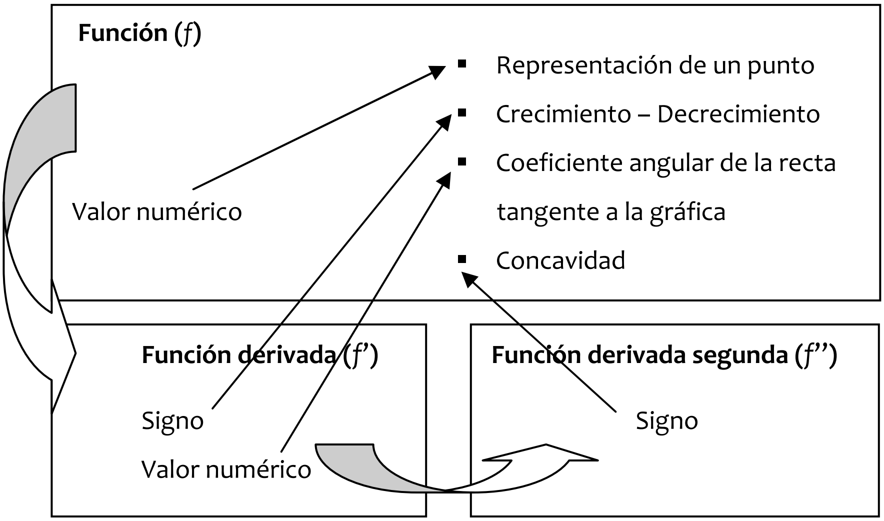
"La socioepistemología, o epistemología de las prácticas sociales relativas al saber, es una aproximación teórica de naturaleza sistémica que permite tratar con los fenómenos de producción y difusión del saber desde una perspectiva múltiple..." (Cantoral, 2004, p.1)

En este marco, vamos a considerar los aportes que nos brinda la línea de investigación del Pensamiento y Lenguaje Variacional (PLV). Como línea de investigación, Cantoral (2004) establece que el PLV se ocupa de estudiar los fenómenos de enseñanza, aprendizaje y comunicación de los saberes matemáticos en relación a la variación y el cambio, en el sistema educativo y social en que se encuentra.

Un punto importante a tener en cuenta al momento de analizar el PLV es si los estudiantes han construido un universo de formas gráficas, es decir, si consideran a la gráfica de una función como una gráfica en particular o como perteneciente a una familia de gráficas de funciones, ya sea polinómicas, racionales, etc.

Esto se vincula con lo reseñado por Testa (2006) en cuanto a las relaciones de subida y bajada que se establecen habitualmente, entre una función *f*, y sus funciones derivadas de orden 1 y 2, cuestión que resulta central en nuestro trabajo.

Según la autora, el discurso matemático escolar (dme) tradicional en torno al concepto de derivada fomenta un tratamiento meramente instrumental, y su principal objetivo es que la derivada sea una herramienta para poder representar funciones gráficamente. Como consecuencia, existe un abordaje del concepto que no fomenta otras perspectivas, salvo las mencionadas anteriormente. No se pone en juego el PLV del estudiante ni el valor numérico de la derivada segunda, tampoco se fomenta la interpretación gráfica de este valor. Testa (2006, p. 163) sintetiza en el siguiente esquema su estudio respecto al dme tradicional en Uruguay.



Según este estudio, en el dme tradicional se priorizan dos tipos de relaciones entre las funciones en cuestión: relaciones "de bajada", que se dan a través de las técnicas de derivación (f a f', f' a f'') o "de subida", que brindan información gráfica (f' a f y f'' a f).

Más en detalle, la autora indica que en el tratamiento de las derivadas sucesivas (de una función f) no se trabaja con derivadas de orden mayor a 2 y que las relaciones que aparecen entre las derivadas se dan en los siguientes sentidos: $f \rightarrow f' \rightarrow f''$, f' a f, f'' a f, y que no aparecen, por ejemplo, relaciones del tipo f'' a f' ni f a f''. Parte del proyecto de investigación planteado durante el curso consistió en una revisión de textos y programas para analizar si la situación reportada por Testa sobre el dme en Uruguay, diez años atrás, seguía vigente. La conclusión a la que arribamos fue que sí se mantiene un discurso centrado en el tipo de relaciones descripto, a pesar del cambio de programas y de la bibliografía en ellos sugerida.

Por otro lado, siguiendo la línea propuesta por Testa (2006), también tendremos en cuenta a nivel cognitivo, los aportes que realizan Tall y Vinner (1981) en cuanto a los términos *imagen* y *definición del concepto*.

Con respecto a la estructura cognitiva de un sujeto, los autores consideran la existencia de dos *celdas* diferentes, una para la definición del concepto y otra para la imagen del concepto, así como el proceso intelectual de los estudiantes frente a situaciones problema que el docente espera que realicen. Se distinguen cuatro casos que modelizan las distintas formas en que el sistema cognitivo podría actuar al dar respuesta a un problema:

Caso 1: Se consulta solo la celda de la definición (deducción puramente formal).

Caso 2: Se evoca en una primera instancia la imagen del concepto, luego se consulta su definición para, a partir de ahí, dar una respuesta (deducción siguiendo un pensamiento intuitivo).

Caso 3: Se recurre en una primera instancia a la definición del concepto, se interactúa con su imagen, pero la respuesta es dada a partir de su definición (interacción entre definición e imagen).

Sin embargo, en la práctica ocurre que los hábitos de pensamiento de la vida cotidiana prevalecen sobre los hábitos de pensamiento impuestos por los contextos técnicos, tal como se describe en el siguiente caso:

Caso 4: Se consulta solamente la celda de la imagen del concepto para dar una respuesta (respuesta intuitiva).

Testa (2006) considera un nuevo tipo de respuesta posible:

Caso 5: Se recurre en una primera instancia a la celda de la imagen del concepto, se realiza una interacción con la celda de la definición pero la respuesta es dada a partir de la celda de la imagen.

SECUENCIA DISEÑADA

Para el diseño de la secuencia intentamos, en primer lugar, vincular la función y sus derivadas de un modo distinto al que -según Testa (2006)- es habitual en los cursos de enseñanza secundaria. Procuramos que las relaciones de bajada entre f, f' y f'' no sean únicamente algebraicas, ni las de subida de f' a f y f'' a f, exclusivamente gráficas.

En nuestra propuesta priorizamos, en la primera de las actividades, los aspectos gráficos de las relaciones entre *f*, *f’* y *f’’*, si bien las respuestas pueden involucrar además aspectos analíticos. En la segunda actividad, proponemos un inicio poco habitual pues el punto de partida se halla en la representación gráfica de la derivada segunda. A partir de esto se solicita en primera instancia elaborar posibles gráficas de *f’* relacionadas a ella. Luego se pregunta acerca de la posibilidad de construir una función *f*, con determinadas características, asociada a la *f’’* inicial. Nos parece que este cambio de perspectiva promueve la utilización de otros recursos, amplía estrategias y obliga a pensar distinto. En consecuencia hace que se tengan en cuenta otros vínculos entre las funciones que entran en juego y no solo la información que aportan las derivadas de orden 1 y 2 en cuanto a crecimiento y concavidad de la función original.

Con estas actividades procuramos que se establezcan relaciones entre las derivadas primera y segunda "independientes" de la función original, relaciones que, según el marco teórico en que nos basamos, refieren al desarrollo del PLV de los estudiantes.

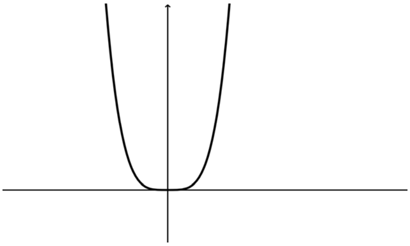
Actividad 1

A continuación se presentan las gráficas de cuatro funciones de dominio real (a, b, c, d), con los bosquejos correspondientes a sus derivadas primera (1, 2, 3, 4) y segunda (α, β, γ, δ).

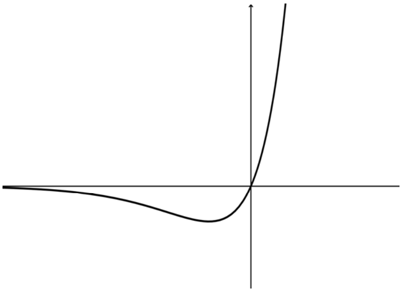
Asocia a cada gráfica a, b, c y d, las correspondientes gráficas de sus funciones derivadas primera y segunda, argumentando ampliamente tu respuesta.

Funciones

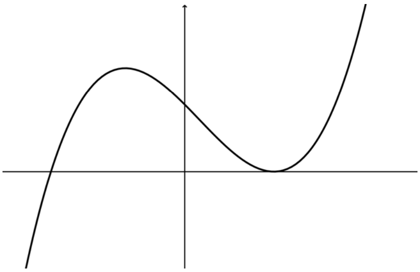
a.



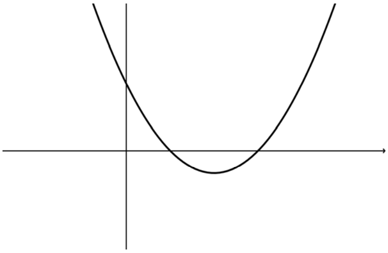
b.



c.

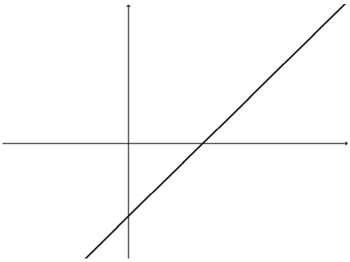


d.

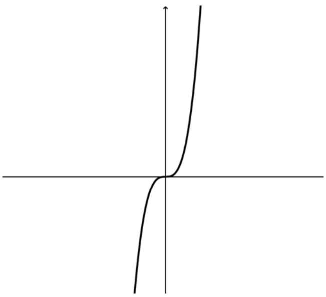


Derivadas primera

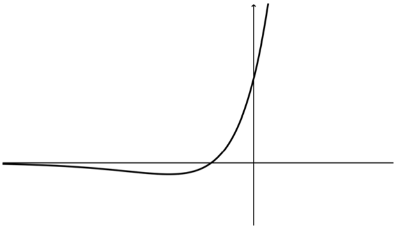
1.



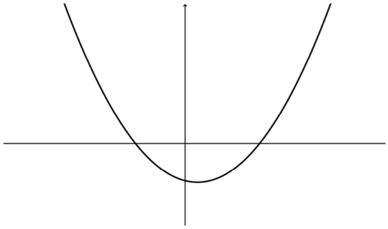
2.



3.

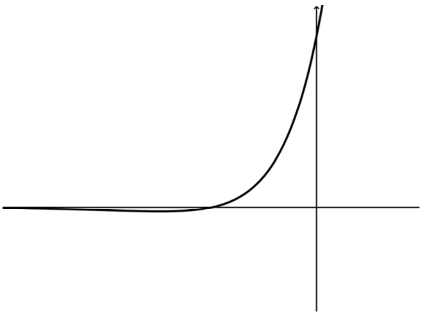


4.

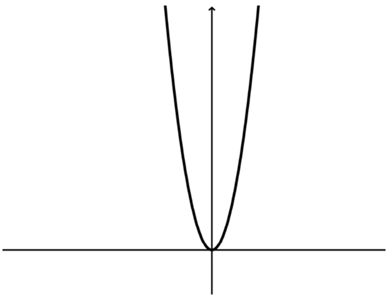


Derivadas segunda

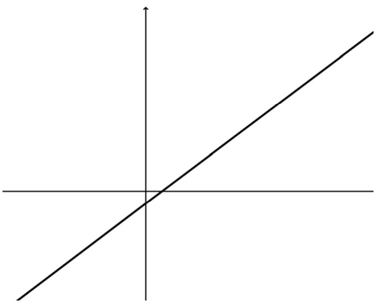
α.



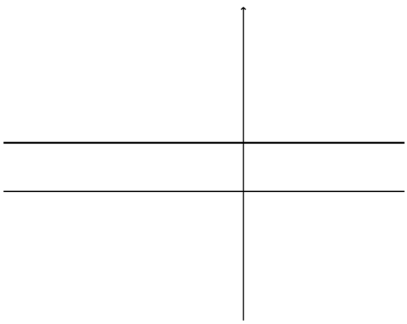
β.



γ.



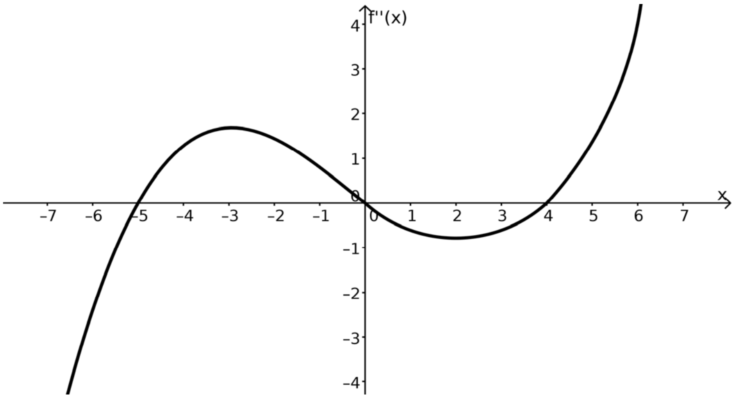
δ.



Actividad 2

a. Dada la gráfica de f'' (de dominio real), construye las posibles gráficas de f', explicitando las observaciones que te condujeron a elaborarlas.

b. ¿Existen gráficas de f y f', asociadas a la f'' dada, de modo que f sea decreciente para todo x real? Justifica tu respuesta.



Análisis a priori

En cuanto a lo que se espera encontrar, mucho depende del nivel educativo alcanzado por los estudiantes a los que apliquemos la secuencia. En relación a la actividad 1, creemos que puede ser respondida sin mayor dificultad por la mayoría de integrantes del universo de posibles participantes (estudiantes de profesorado de matemática que hayan cursado Análisis I, asignatura de segundo año de la carrera). Si bien hay distintos caminos para resolverla, la opción elegida dará cuenta del PLV y del grado de abstracción del estudiante.

Pensamos que al realizar la actividad 1, los estudiantes pueden optar principalmente entre dos caminos: el primero, que relaciona las gráficas de *f, f'* y *f''* con familias de funciones conocidas (polinómicas básicamente) y, el segundo, que vincula el signo de *f'* y *f''* con crecimiento, extremos relativos y concavidad de *f*.

Un posible error si se toma el primer camino puede tener lugar al asociar la función (a) de cuarto grado, con una polinómica de segundo grado, provocando que las relaciones establecidas entre *f, f'* y *f''* sean incorrectas.

En resumen, según el tipo de respuesta y la justificación efectuada, consideramos a priori que la primera actividad nos brindaría información sobre el tipo de relaciones de bajada y subida utilizadas, y sobre la imagen del concepto que poseen los participantes en cuanto a las derivadas primera y segunda. Es posible también que, dependiendo de la profundidad de la justificación, podamos observar qué relaciones establece el estudiante entre las funciones, si las concibe como familias, si intervienen aspectos analíticos, etc.

Por otra parte, la actividad 2 sería de utilidad para observar qué relaciones de subida alcanzan a establecer los estudiantes, qué vínculos encuentran entre *f''* y *f'*, cómo juegan las condiciones impuestas en la variación de las derivadas, etc.

Asimismo y tal como ocurre en la actividad 1, las características, profundidad y justificación de las respuestas, pondrán en evidencia el desarrollo del PLV de los estudiantes. En particular, atendiendo a lo que consideramos como posibles respuestas, una opción es presentar una única gráfica de *f'*; otra sería establecer varias gráficas de *f'* sin considerar las variantes dadas por sumar una constante; y una tercera opción puede ser similar al punto anterior incluyendo además la familia de funciones que difieren en una constante. Estos diferentes niveles de complejidad alcanzados en las respuestas podrían darnos pautas sobre tal desarrollo.

En cuanto a posibles errores que podemos encontrar, podría ocurrir que un estudiante responda que no existe tal función pero basándose en argumentos erróneos, como por ejemplo haber construido una única gráfica de *f'* que no es "compatible" con *f* decreciente. Otra respuesta incorrecta sería realizar la construcción de *f* y *f'*, relacionados a la *f''* dada, aceptando la idea de que es posible encontrar una *f'* tal que $f'(x) < 0$ para todo *x* real.

RESULTADOS DE LA PRIMERA INSTANCIA DE APLICACIÓN

La secuencia de actividades fue propuesta, en una primera instancia, a 27 estudiantes de profesorado de matemática en el Instituto de Profesores Artigas (IPA), para que la abordaran individualmente.

En lo que respecta a la actividad 1, observamos que los criterios más utilizados (por 17 estudiantes) para responder estaban relacionados con crecimiento, extremos relativos, concavidad y puntos de inflexión, lo cual implica que los estudiantes establecieron vínculos tanto entre *f* y *f'* como entre *f'* y *f''*, relacionando los extremos de una con las raíces de la otra. Por otra parte, 7 estudiantes consiguieron asociar la terna *f* - *f'* - *f''* relacionándolas con familias de funciones conocidas, por ejemplo, polinómicas.

En la actividad 2a, 19 estudiantes escriben el signo de la derivada segunda y lo relacionan con el crecimiento de *f'* y con la concavidad de *f*. Además, manifiestan también que los extremos relativos de una función son raíces de su derivada primera. A partir de estas observaciones logran construir algunas de las gráficas esperadas.

Lo señalado hasta aquí responde a las producciones realizadas por una amplia mayoría de los casos considerados para la investigación, reportamos también la presentación de algunos casos particulares donde el estudiante considera el signo de *f''*, a partir de él se construye la gráfica de *f* para luego construir una de *f'*.

En la parte b, 8 estudiantes responden correctamente explicitando la imposibilidad de construir las funciones solicitadas a partir de la información disponible; 4 estudiantes representan las gráficas de *f* y *f'* esperadas al elaborar la propuesta, mientras que el resto no logra graficar *f'* exponiendo argumentos erróneos o incompletos o directamente no responden esta parte.

ALGUNAS REFLEXIONES RELATIVAS A LA PRIMERA INSTANCIA DE APLICACIÓN

En lo que hace a relaciones de subida y bajada existentes entre *f*, *f'* y *f''*, la actividad 1 nos permitió registrar otras además de las reportadas en Testa (2004) y de las observadas en el análisis del dme tradicional. Por ejemplo, se observaron relaciones de bajada tanto gráficas como analíticas, lo cual en cierto sentido estaría ampliando y fortaleciendo el esquema reportado en Testa (2004).

Por otra parte, la actividad 2 apunta a evidenciar las relaciones de subida entre *f*, *f'* y *f''*. A este respecto constatamos varias dificultades a la hora de su resolución. Esto puede ser explicado por el hecho de que en el abordaje dado a esta temática en el dme tradicional, en general no se contemplan estas relaciones. De todos modos, vimos que un 70% de estudiantes resolvió correctamente la parte a de la actividad y de ellos menos de la mitad alcanzó a trabajar satisfactoriamente en la parte b. Esta observación permite conocer el desarrollo del PLV de los estudiantes.

Reportamos relaciones de subida, tanto gráficas como analíticas, entre *f''* y *f'*, que era uno de los objetivos de la actividad, ampliando, reforzando, fortaleciendo el esquema señalado en Testa (2004). A su vez, en algunos casos se observan estas relaciones teniendo en cuenta derivadas sucesivas, concibiendo *f'''* como derivada de *f''*.

En cuanto a las relaciones de bajada, se constatan relaciones gráficas de *f'* a *f''* al momento de responder a la pregunta planteada en la parte b, indicando por ejemplo que si existiera *f'* tal que $f'(x) < 0$ para todo x real, entonces deberían existir puntos de inflexión en *f'* que no se corresponden con la *f''* dada. Otro argumento a destacar en este sentido, consistió en observar que para que *f'* cumpla con la condición descrita debe existir una asíntota horizontal. Esto implicaría que las pendientes de las rectas tangentes a la gráfica de *f'* tiendan a cero cuando x tiende a infinito, y esto entra en contradicción con la gráfica de *f''* proporcionada.

Hasta aquí lo que hace al reporte y comentarios de la experiencia llevada a cabo con estudiantes de profesorado de matemática en el IPA, en una primera instancia. A modo de cierre, observamos que independientemente de que el abordaje tradicional no contempla las cuestiones señaladas en este trabajo, al realizar la secuencia muchos estudiantes pudieron establecer nuevos vínculos así como también reforzar los ya existentes. Esto nos da la pauta de que propuestas como esta podrían implementarse desde enseñanza secundaria promoviendo un mayor desarrollo del PLV de los estudiantes.

OTRAS INSTANCIAS DE APLICACIÓN DE LA SECUENCIA

Con la intención de divulgar esta experiencia, las actividades fueron propuestas en otros ámbitos con la participación de estudiantes de profesorado de matemática y de profesores titulados.

En esas ocasiones surgieron resoluciones que permitieron destacar la potencialidad de la actividad en cuanto al desarrollo del PLV.

Solo a modo de ejemplo señalaremos las siguientes. En la parte b de la actividad 2, hubo quienes justificaron la imposibilidad de construir las funciones solicitadas, considerando para ello el signo de la derivada tercera, deducido a partir de las tangentes de la gráfica de *f*''. Tanto para los valores de x mayores que 2 como para los menores que -3 el signo de *f*''' es positivo. Esto permite afirmar que la concavidad de *f*' en esos intervalos es positiva (*f*''' es la derivada segunda de *f*') y no presenta puntos de inflexión, requisito imprescindible para poder construir las *f* y *f'* solicitadas.

A partir de otras reflexiones complementarias, al resolver la parte a de la actividad 2, es posible afirmar que cualquiera sea la gráfica correcta que de *f'* se haya construido, su mínimo absoluto se presenta cuando su abscisa es -5.

Para ello se considera que $\int_{-5}^{4} f''(x)dx = f'(4) - f'(-5) > 0$ (es el área comprendida por la gráfica de *f''* entre -5 y 4), por lo que $f'(4) > f'(-5)$.

Al analizar las potencialidades que tienen este tipo de actividades en la construcción y el fortalecimiento del PLV de los estudiantes, reforzamos nuestra convicción de que es posible, pero además necesaria, la implementación de esta u otras propuestas similares tanto en nivel medio como terciario.

REFERENCIAS

Cantoral, R. (2004). Desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional, una mirada socioepistemológica. En L. Díaz Moreno (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (Vol. 17, pp. 1-9). Chile: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. Recuperado desde http://www.clame.org.mx/documentos/alme17.pdf el 22 de noviembre de 2015.

Cantoral, R. y Farfán, R. (1998). Pensamiento y lenguaje Variacional en la introducción al análisis. *Épsilon, Revista de S.A.E.M "Thales"*, 42, 353-369.

Tall, D. y Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics, 12 (7)*, 151-169.

Testa, Y. (2004). *Procesos de resignificación del valor numérico de la función derivada segunda: un estudio en el sistema escolar uruguayo*. Tesis de Maestría no publicada, CICATA, IPN. Recuperado desde http://www.matedu.cicata.ipn.mx/tesis/maestria/testa_2004.pdf el 22 de noviembre de 2015.

Testa, Y. (2006). Procesos de resignificación del valor numérico de la derivada segunda: un estudio en el sistema escolar uruguayo. En M. Dalcín, C. Ochoviet, M. Olave y Y. Testa (Comp.), *Didáctica de Matemática. Cuatro trabajos de investigación en el marco del sistema educativo uruguayo* (pp. 153-196). Montevideo: Ediciones Rocamadur.

LOS CUENTOS ENTRAN A LA CLASE DE MATEMÁTICA

ANDRÉS DE ACEVEDO, FIORELLA GIOVANNINI, CRISTINA OCHOVIET

Resumen

El uso de cuentos e historias como recurso para la enseñanza de la matemática es sugerido desde distintas voces. En este trabajo se recogen algunas de ellas, la fundamentación que esbozan y la forma en que entienden su inclusión en la enseñanza. Se presentan dos cuentos que surgieron en el desarrollo de los cursos de Didáctica III de la especialidad Matemática en 2014 y 2015, y el aprovechamiento didáctico que puede realizarse en el trabajo con estudiantes de enseñanza secundaria.

Palabras clave: cuentos como recurso didáctico, enseñanza de la matemática.

Abstract

Using tales and stories as a resource for teaching mathematics is suggested from different voices. This paper presents some of them, their theoretical basis and how they understand their inclusion in education. We present two stories that emerged in the development of the course of Didactics III of mathematics teaching in 2014 and 2015, and the educational use that can be made in working with secondary school students.

Keywords: stories as a teaching resource, teaching mathematics.

INTRODUCCIÓN

Eduardo Galeano dice:

> Y los días se echaron a caminar. Y ellos, los días, nos hicieron. Y así fuimos nacidos nosotros, los hijos de los días, los averiguadores, los buscadores de la vida. Y si nosotros somos hijos de los días, nada tiene de raro que de cada día brote una historia. Porque los

> científicos dicen que estamos hechos de átomos, pero a mí un pajarito me contó que estamos hechos de historias. Y ahora les voy a contar algunas de esas historias nacidas de los días. (Friera, 23 de abril de 2012)

Y ahora les vamos a contar dos historias que nacieron de los días de trabajo del curso de la asignatura Didáctica III de la especialidad Matemática, en los años 2014 y 2015.

La primera de las historias que presentamos fue narrada oralmente en clase a alumnos de primer año del ciclo básico y, a partir de ella, se plantearon preguntas con el objetivo de trabajar en ciertos asuntos matemáticos. La recepción de los estudiantes fue muy positiva, observamos que apenas se daban cuenta de que se había comenzado a contar una historia, la escucha se hacía presente de inmediato. Se captaba su atención como con ningún otro recurso de los que son habituales en la clase de matemática. Se observó también un involucramiento con la lógica interna de la historia que habilitó el razonamiento matemático en ese contexto y la resolución de situaciones.

Este artículo presenta distintas perspectivas teóricas que proponen el uso de cuentos o, más en general, el uso de historias como recurso para la enseñanza de la matemática. Este uso se fundamenta en un hecho que caracteriza el aprendizaje de todos los seres humanos: es únicamente a través de historias que damos sentido al mundo.

EN LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA LAS HISTORIAS SÍ CUENTAN

A continuación presentamos una revisión bibliográfica de artículos que proponen el uso de cuentos e historias como recurso para enseñar. Los documentos de Egan (1994, 2005) refieren al uso de historias en todas las asignaturas del currículo. Los restantes artículos que reportamos en esta sección, se enfocan, particularmente, al uso para la enseñanza de la matemática.

Egan (1994) afirma que la escucha habitual de cuentos puede estimular el desarrollo de destrezas cognitivas. Cuando los niños dan sentido a narraciones cada vez más complejas, necesitan elaborar un sentido cada vez más fino de las relaciones de causalidad. Señala que aprenden a resolver problemas y a formular y reformular hipótesis al recibir nueva información. A su vez, los niños toman conocimiento de un espectro amplio de emociones humanas y de formas de reaccionar ante ellas. Por eso, sostiene que una buena narración estimula la empatía y promueve la vida emocional. Egan, siguiendo a Ted Hughes (1977), dice que los cuentos funcionan como "pequeñas fábricas de comprensión" pues las nuevas revelaciones de sentido ensanchan continuamente las imágenes y los modelos.

En particular, sobre la enseñanza de la matemática plantea que la presentación de los conceptos matemáticos ha sido deshumanizada pues se ocultan los orígenes, las situaciones y los problemas que motivaron el surgimiento de ciertos cálculos matemáticos. Entonces, si a través de los cuentos mostramos a los estudiantes que un determinado cálculo, procedimiento o técnica "es una solución concreta a cierta esperanza, intención, temor o cualquier otra cosa de carácter humano, podrán incluir la técnica en cuestión en un contexto significativo" (Egan, 1994, pp. 105-106).

Egan (2005) señala que en las historias aparecen conflictos, por ejemplo, entre el bien y el mal, el valor y la cobardía, el miedo y la inseguridad. Los personajes y acontecimientos dan forma concreta a esos conflictos. Estos pares opuestos tienen dos características fundamentales: en primer lugar, son abstractos; y en segundo, son afectivos. Permiten entonces que los niños manejen conceptos abstractos a partir de situaciones concretas.

Este autor afirma que para hacer más atractivo y accesible el contenido, debemos organizarlo en función de conceptos abstractos opuestos. Esta afirmación de Egan se fundamenta en que el uso de opuestos en los cuentos de hadas es una característica que da cuenta de "la manera en que los niños ordenan su mundo [...] dividiendo todas las cosas en opuestos" (Bettelheim, 1976, p. 74, referido en Egan, 2005, p. 171).

Egan (2005) realiza una fantástica observación que pone en vilo el criterio para diseñar los documentos curriculares de las distintas asignaturas. Él dice:

> Evidentemente, no es la familiaridad con la experiencia cotidiana lo que hace atractivos para los niños los cuentos y su contenido. [...] la tesis de Jarolimek de que el curriculum se debe construir sobre lo que el niño conoce no toma nota de que el niño también «conoce» conceptos binarios como amor/odio, angustia/seguridad,

> coraje/cobardía; y que por esos conceptos profundos y afectivos cualquier contenido se vuelve asequible y hace correspondencia. La clave para que los niños puedan aprender no está en las simples asociaciones con lo que ya conocen. Observamos todos los días que bosques medievales, galaxias lejanas, brujas, gigantes, guerreros espaciales entran en una correspondencia inmediata y viva con los intereses de los niños porque encarnan unos conceptos afectivos abstractos. (pp. 173-174)

Schiro (2004) fundamenta la importancia de las historias desde dos puntos de vista: el cultural y el del individuo.

Desde una perspectiva cultural, el autor sostiene que las historias, tanto orales como escritas, son utilizadas por todas las sociedades para mostrar a sus integrantes la forma en que estas entienden el mundo. Citando a Smith (1990), Schiro afirma que las historias contadas en el marco de cierta cultura, enseñan a sus miembros las interpretaciones que son propias de esa cultura, por ejemplo, quiénes son los héroes o las heroínas. Las historias constituyen un medio para que las personas puedan explorar el mundo en que viven y conectarlo con sus propias historias que están enmarcadas en un determinado contexto social.

A nivel del individuo, Schiro señala, siguiendo a Wells (1986), que el contar historias no es una acción intencional o deliberada de nuestra mente sino que es la forma en que nuestra mente funciona pues es la manera en que damos significado a nuestras vidas y al mundo que nos rodea. Smith (1990, referido en Schiro, 2004) asegura que las historias que construimos son la única manera en que podemos dar sentido al mundo, a la literatura y al arte; constituyen la manera en que podemos percibir, concebir y crear, la forma en que la imaginación trabaja. No es necesario que nos indiquen que debemos construir una historia para comprender esto o aquello pues es lo que naturalmente las personas hacen.

En relación a la enseñanza de la matemática, Schiro (2004) dice que el uso de historias permite que los estudiantes se proyecten en ellas y hagan propios los problemas matemáticos a resolver. También habilitan a que los alumnos se vinculen afectivamente con los personajes y situaciones que aparecen. La narración oral de historias para enseñar matemática potencia el entendimiento y el desarrollo de la imaginación. Los personajes, sus características, los problemas que enfrentan y las acciones que realizan, ofrecen ejemplos específicos en los que los estudiantes pueden actuar directamente o visualizar a otros desarrollando acciones en procura de arribar a una resolución:

> En parte, esto significa que los niños son capaces de comprender mejor cuando, en el contexto de situaciones narrativas específicas (o historias) la matemática a ser aprendida está relacionada a acciones concretas de una persona identificable y a sus explicaciones sobre esas acciones. (p. 53)

Goral y Meyers (2006) afirman que la narración oral de cuentos actúa como catalizadora de los aprendizajes matemáticos. Señalan que es una herramienta versátil y que habilita oportunidades de escucha, de discusión grupal, de lectura y de escritura, que sumadas contribuyen a una comprensión más profunda de las ideas matemáticas. Agregan que cuando los niños escuchan historias, son capaces de crear imágenes mentales que conectan la matemática con experiencias personales significativas. Raines e Isbell (1994) (referido en Goral y Meyers, 2006) sostienen que la narración oral de cuentos es más personalizada que la lectura pues el narrador puede tener contacto visual con quienes lo están escuchando y puede, al mismo tiempo, realizar ajustes en su discurso e introducir aclaraciones, o los elementos que considere necesarios, para facilitar la comprensión por parte de la audiencia. Estas autoras implementaron un proyecto de trabajo que utilizaba la narración oral de cuentos como medio para enseñar la matemática en la escuela primaria. Concluyen que el uso de historias fue de ayuda para que los estudiantes profundizaran en su comprensión del sistema de numeración posicional, debido a que pudieron establecer vínculos entre la historia y sus experiencias personales. Agregan que la narración oral de cuentos es una técnica pedagógica que permite enriquecer el entendimiento de conceptos matemáticos abstractos.

Marín (2007) nos habla sobre el valor de los cuentos para la enseñanza de la matemática en el nivel infantil. Señala que los cuentos cautivan a los niños y que por su estructura secuencial-lineal pueden ser recordados fácilmente. Favorecen el desarrollo de habilidades intelectuales básicas como la abstracción, la intuición, la imaginación, la observación y la memorización con comprensión. Ella dice que los cuentos son herramientas para lograr el aprendizaje que nos permiten presentar los conocimientos matemáticos en contexto y habilitan un trabajo matemático que fomenta el desarrollo de las competencias matemáticas básicas: pensar y razonar, comunicar, modelar, resolver problemas, representar y utilizar el lenguaje formal y técnico de las operaciones.

Balakrishnan (2008) estudia de qué manera las historias pueden ser usadas para la enseñanza en el nivel secundario desde las perspectivas de Zazkis y Liljedahl (2005) y de Egan (1994, 1997, 2005). En su tesis demuestra que las historias comprometen a los estudiantes en el uso de su imaginación para estudiar conceptos matemáticos. Además, las historias se vinculan con las emociones de los alumnos y por ello encuentran un lugar significativo en el mundo de los estudiantes. Asegura que conceptos que son abstractos se hacen más accesibles cuando son presentados a través de narrativas y que, a su vez, estas incrementan las posibilidades de interacción entre docente y alumnos, facilitando asimismo la comunicación de ideas matemáticas por parte de los estudiantes. Agrega que se logra una mejor comprensión de los conceptos matemáticos, se avanza en los procesos de generalización y en la adopción de nuevas perspectivas para mirar un problema. El uso de historias por parte de los estudiantes permite que estos usen sus propias palabras para aportar explicaciones y avanzar luego hacia expresiones más formales del conocimiento.

Zazkis y Liljedahl (2009) afirman que ellos cuentan historias en la clase de matemática para lograr un entorno de imaginación, emoción y pensamiento. También para hacer que la matemática sea más disfrutable y que merezca ser recordada: “Contamos historias en la clase de matemática para comprometer a los estudiantes en una actividad matemática, para hacerlos pensar y explorar, y para ayudarlos a comprender conceptos e ideas.” (p. ix). Estos autores sostienen que las historias, tanto en enseñanza primaria como en el nivel secundario, pueden aportar el elemento humano a conceptos o ideas que son considerados áridos; aportan una perspectiva novedosa y un cambio a la forma usual en que se presenta el trabajo en la clase de matemática (breves explicaciones del profesor, seguidas de ejemplos y a continuación resolución de ejercicios similares a cargo de los alumnos). Las historias renuevan las propuestas de clase y fomentan una atmósfera creativa.

Albool (2012) realizó un estudio de metodología cuantitativa con dos grupos de estudiantes de cuarto año escolar. Comparó los resultados alcanzados en el aprendizaje de un grupo en el que se utilizó la narración de historias como metodología de enseñanza con otro grupo que fue utilizado como grupo testigo. Los resultados a los que arribó muestran que el recurso de utilizar historias como método de enseñanza incrementó la comprensión de conceptos relativos a fracciones. Los estudiantes mostraron mayores habilidades para la resolución de problemas matemáticos. Señala que estos resultados bien pueden ser atribuidos al hecho de que las historias promueven el desarrollo de la imaginación de los estudiantes. En consecuencia, recomienda el recurso de contar historias como medio para enseñar. Asimismo señala que este hallazgo debería ser tenido en cuenta para la elaboración de los documentos curriculares y el desarrollo de políticas educativas.

Cho y Hong (2015) describen prácticas de enseñanza, tanto a nivel de primaria como de enseñanza secundaria, basadas en la intuición matemática de los estudiantes, utilizando la narración de historias. Señalan que las historias aportan contextos del mundo real que permiten que los estudiantes utilicen su conocimiento intuitivo y sus experiencias personales para comprender conceptos matemáticos.

En síntesis, el uso de cuentos o de historias como recurso para la enseñanza es sugerido desde una diversidad de autores. Como se habrá apreciado, la mayoría de las experiencias provienen de la escuela primaria y en trabajos más recientes, como Balakrishnan (2008), Zazkis y Liljedahl (2009) y Cho y Hong (2015), se reflexiona sobre su uso en el nivel secundario también. Es a este nivel educativo al que queremos aportar en el presente trabajo.

ASPECTOS METODOLÓGICOS

Zazkis y Liljedahl (2009) proponen un marco metodológico de seis fases para la elaboración de un cuento o una historia para la enseñanza de la matemática. Lo exponemos a continuación:

(1) *Identificar el foco*. Esto refiere a lo que se desea enseñar: un concepto, un método, una unidad temática, aplicaciones de la matemática, etc.

(2) *Identificar el problema*. Esto significa pensar en la situación problemática que permitirá el abordaje de lo que se ha definido en (1). Y a su vez, pensar cómo ese problema puede ser presentado a través de un cuento o historia.

(3) *Identificar la historia*. Un elemento esencial a considerar es el contexto emotivo en el que se presenta la historia. Debe ser motivador, inolvidable y permitir el desarrollo de la imaginación del estudiante.

(4) *Organizar la forma en que se presentará el problema*. Debe tenerse en cuenta lo que puede motivar a los estudiantes a comprometerse con lo que se narra o lee. Los autores sugieren la formulación de preguntas a medida que se va desarrollando el cuento o iniciar frases que los estudiantes deban completar a medida que se avanza en la narración de la historia.

(5) *Extender o variar la situación problemática inicial*. Contar la historia no es suficiente, luego se debe dar paso a la resolución de problemas o de tareas que capitalicen el uso de la historia.

(6) *Conclusión, cierre*. Puede analizarse la relación entre lo que se ha estudiado y la historia o cuento que fue narrado. También puede proponerse a los estudiantes que escriban una nueva historia que dé continuación a la expuesta o que inventen nuevos problemas relacionados.

Complementamos estas fases con una técnica propuesta por Rodari (2013) que nos ha resultado muy útil para la construcción de historias y que confiamos puede ayudar a los docentes al desarrollo de las fases (2) y (3).

Gianni Rodari sugiere una técnica «ejecutiva» para elaborar historias con contenido matemático. Dice que, "si un personaje se llama «señor Alto», tiene en el nombre su destino, en su naturaleza tiene sus aventuras y sus desgracias". Agrega que el Sr. Alto:

> … representará una cierta unidad de medición, un punto de vista sobre el mundo, con sus ventajas y desventajas: lo verá todo desde más arriba que los demás, pero tendrá problemas para entrar en lugares bajitos... Se prestará a hacer de símbolo, como cualquier otro juguete, cualquier otro personaje. En el camino podrá perder sus orígenes matemáticos y adquirirá otros significados: y entonces será necesario seguirlo hasta donde llegue […]. (2013, pp. 132-133)

DOS EJEMPLOS

El cuento que presentamos a continuación fue escrito utilizando la técnica «ejecutiva» de Rodari (2013) expuesta en la sección anterior. Como foco matemático tiene el concepto de múltiplo, que ya había sido trabajado con los estudiantes, y posibilitar el surgimiento de múltiplo común y de algunos criterios de divisibilidad.

El señor Múltiplo y la señorita Cinco[1]

Les voy a contar la historia de un señor que tenía un apellido rarísimo. Lo llamaban señor Múltiplo, ¡vaya apellido! Quizás ustedes no lo saben, pero a veces los apellidos terminan definiendo el destino de las personas. Yo conocí a un médico que era de apellido Vísceras. Y tuve una profesora de matemática de apellido Ocho. Y a este Sr. Múltiplo del que les hablaba, también lo condenó su apellido, porque tenía todo tipo de manías relacionadas con él.

[1] Escrito por Cristina Ochoviet.

Múltiplo vivía en la calle Arquímedes 1020, y como 1 + 0 + 2 + 0 = 3, resulta que toda su vida estaba condicionada por el número 3. Por ejemplo, solamente tomaba ómnibus cuyo número fuera un múltiplo de 3, y si ningún múltiplo de 3 lo llevaba a su destino, hacía tantos trasbordos como fuera necesario. Pero eso sí, ni un pie ponía en otro tipo de ómnibus. ¡Menudo problema tenía este señor!

Otro problema que se le presentaba era al momento de pagar una cuenta. Él pretendía que el monto a pagar fuera un múltiplo de 3 y si no lo era, como de menos nadie le quería cobrar, pagaba de más redondeando a un múltiplo de 3; pero eso sí, lo menos posible. ¡Qué loca era su vida!, ¿no? Los comerciantes que lo conocían estaban siempre encantados de recibirlo. ¡¿Cómo no iban a estarlo si casi siempre les pagaba de más?!

Más o menos, él iba llevando bien su vida con todas estas manías relacionadas al número 3, pero, como todo en la vida, a veces nos surge algún inconveniente que nos desestabiliza. Resulta que un día, mientras Sr. Múltiplo sacaba la cuenta de cuánto tenía que pagar por la cena en un restaurante, se distrajo cuando pasó, justo a su lado, una chica a la que se le cayó un pañuelo en el piso. El Sr. Múltiplo, a quien le gustaba ser multiplicadamente amable, recogió el pañuelo, se paró, hizo una reverencia a la señorita y le entregó su pañuelo.

Ella, luego de agradecerle, le preguntó: "¿Con quién tengo el gusto?", y él le respondió: "Sr. Múltiplo, para servirla". Ella le contestó: "Encantada, soy la Srta. Cinco".

Una cosquilla le recorrió todo el cuerpo porque ella era realmente hermosa y se apuró a preguntarle: "Señorita, ¿desea sentarse en esta mesa a tomar un café conmigo?"

Ella pensó unos segundos, titubeó, y muy despacito le preguntó al mozo que justo pasaba a su lado: "¿Qué número tiene la mesa de este señor?" "Quince", le contestó el mozo. Entonces ella le contestó a Sr. Múltiplo: "Acepto su invitación".

Hay una pregunta inmediata que surge: ¿por qué la señorita Cinco aceptó la invitación? Si bien hay explicaciones subjetivas que el alumno puede presentar, como por ejemplo, que 15 termina en 5, pensamos que la estructura previa de la historia, en la que la condición de múltiplo de 3 condiciona la vida del señor Múltiplo, permitirá, también, que los estudiantes recurran a la idea de que 15 es múltiplo de 5 para dar respuesta a la pregunta planteada. Así, 15 es múltiplo de 3 (allí estaba sentado el señor Múltiplo) y también es múltiplo de 5. El trabajo matemático al que da lugar este cuento es inmenso, algunas preguntas que pueden responderse desde la lógica interna de la situación planteada son: ¿Por qué el Sr. Múltiplo aceptó sentarse en la mesa número 15? Si el restaurante tiene 50 mesas, ¿en qué otras mesas se podrían haber sentado la Srta. Cinco y el Sr. Múltiplo? ¿Qué líneas de ómnibus podría tomar el Sr. Múltiplo? Si la Srta. Cinco y el Sr. Múltiplo quisieran viajar juntos, ¿qué líneas de ómnibus podrían tomar? Si la Srta. Cinco y el Sr. Múltiplo se fueran a vivir juntos, ¿te parece que la Srta. Cinco aceptaría mudarse a la casa del Sr. Múltiplo? ¿Por qué? Si quisieran mudarse a una nueva casa, ¿qué dirección podría tener? Presenta algunos ejemplos.

A su vez, esta historia puede dar lugar a la creación de otras por parte de los estudiantes, pensando en problemas que podría enfrentar esta peculiar pareja, o bien dando lugar al surgimiento de otras, con personajes condicionados por sus propiedades matemáticas.

A continuación presentamos otro cuento[2] cuyo foco matemático estuvo en el trabajo con inecuaciones, más específicamente, con la posibilidad de modelar una situación a través de una inecuación. Para la elaboración de la historia se siguieron algunas de las recomendaciones aportadas por Zazkis y Liljedahl (2009): se identificó el foco matemático, se creó un contexto que entendemos será de interés para los estudiantes por la presencia de un héroe que no solo salvó a su pueblo sino que va a emprender un viaje para salvar a su familia, se incluyó la presencia de imágenes que invitan a imaginar, hay presencia de conflictos y de emociones.

La familia Tsuka[3]

Hace muchos, muchos años atrás, en una lejana aldea al norte de Asia ubicada en la ladera de una montaña, vivía una familia muy numerosa y querida por todos los pobladores. Eran conocidos como los Tsuka, que era el nombre de uno de sus integrantes: un héroe de guerra que gracias a su valentía y sus excelentes estrategias de batalla, mantuvo a salvo a la aldea de los asedios de tribus enemigas, que después de muchas derrotas terminaron desistiendo de sus ataques. Una vez que la aldea estuvo segura, Tsuka volvió a dedicarse a la vida familiar.

[2] Inspirado en el cuento *El fruto maravilloso* de José Antonio Martín (2000).
[3] Escrito por Andrés de Acevedo.

Vivía en una choza junto a su esposa, sus cinco hijas y sus tres hijos. El mayor colaboraba con Tsuka en las tareas de caza, mientras que las hijas y los niños pequeños se dedicaban al cultivo y al cuidado de la casa.

Un día, una de las hijas contrajo una enfermedad al ser picada por un raro insecto. Rápidamente se contagiaron sus hermanos y su madre, pero no así Tsuka y su hijo mayor pues se habían alejado de la aldea por dos o tres días en busca de alimentos.

Al regresar, el chamán de la aldea los estaba esperando para darles la noticia de lo que había ocurrido. Les dijo que solo existía una baya capaz de curar a su familia y que era muy difícil de conseguir puesto que únicamente crecía en la cima de la montaña. Además, algunos de los miembros de las tribus enemigas que habían sido derrotados, se dispersaron y vagaban por la montaña. Esto agregaba un peligro más.

Sin dudarlo un momento, Tsuka y su hijo mayor se marcharon en busca de las bayas sanadoras. Tras largos y agotadores días de búsqueda, encontraron lo que tanto deseaban. Llenaron un saco con las bayas y emprendieron el viaje de regreso a la aldea.

En el camino fueron interceptados por dos guerreros de una tribu enemiga que al ver que portaban esas bayas tan valiosas, decidieron quedarse con parte del cargamento. Para evitar represalias posteriores, proponen a padre e hijo un trato: tomar la mitad de las bayas que llevaban en el saco a cambio de dejarlos pasar. Tsuka analizó la situación y con el único deseo de llegar lo antes posible a su *casa, aceptó el trato. De todas formas, le quedarían suficientes bayas para curar a su familia. La partición se realizó sin inconvenientes e inmediatamente continuaron el camino de vuelta a la aldea.*

Después de este incidente rogaron a los dioses que nadie más se cruzara en su camino y apuraron al máximo la marcha dentro de los límites que sus cuerpos cansados le imponían. Poco antes de llegar a la aldea, a Tsuka se le cayó el saco con bayas y, al recogerlas, no se dio cuenta de que había perdido seis.

Ya en casa, el chamán le dio una baya a cada miembro de la familia y todos pudieron finalmente curarse.

Hay una pregunta que puede plantearse de inmediato y que podría formularse de la siguiente forma: ¿Con cuántas bayas pudieron haber llenado el saco originalmente Tsuka y su hijo?

Podemos responder esta pregunta utilizando el *método de inversión* hindú que consiste en "desandar lo andado"; admite también un trabajo de modelización que da lugar al trabajo con inecuaciones.

Había ocho personas enfermas en la familia y todas se curaron. De forma que al menos, Tsuka y su hijo mayor, lograron salvar esa cantidad. Como en el camino se perdieron seis, ocho más seis son catorce y, como entregaron a los guerreros la mitad del cargamento, podemos inferir que el saco tenía como mínimo 28 bayas. Una carga superior sería solución del problema. Como presumimos que la cantidad de bayas era par dado que no hubo inconvenientes para realizar la partición, cualquier número par mayor o igual que 28 es una posible respuesta a la pregunta planteada.

Si se inicia con los estudiantes un proceso de matematización de la situación, surgen, al menos, dos formas distintas de realizarlo. En un caso podemos representar con una variable el número de bayas que llegaron a la casa de Tsuka y, en el otro, la variable puede representar el número de bayas que colocaron originalmente en el saco.

En el primer caso, si llamamos *b* al número de bayas que llegaron a la casa tenemos que:

Lenguaje coloquial	**Lenguaje simbólico**
b es mayor o igual a 8 que es la cantidad de familiares enfermos	$b \geq 8$
Se cayeron seis bayas antes de llegar a la aldea	$b + 6 \geq 8 + 6$ esto es $b + 6 \geq 14$
El doble de esta cantidad había originalmente en el saco	$2 \times (b + 6) \geq 2 \times 14$ esto es $2 \times (b + 6) \geq 28$

El número de bayas tomadas de la cima de la montaña fue una cantidad par, mayor o igual que 28. El proceso realizado es una generalización del razonamiento empleado al desandar lo andado.

Analicemos ahora el problema, si *b* representa la cantidad de bayas con las que llenaron el saco en la cima de la montaña.

Lenguaje coloquial	**Lenguaje simbólico**
Cantidad de bayas recogidas inicialmente	b
Cantidad de bayas luego de ser atacados	$\frac{b}{2}$
Cantidad de bayas luego de perder seis	$\frac{b}{2}-6$
Condición que debe cumplirse dado que se curaron todos los integrantes de la familia	$\frac{b}{2}-6 \geq 8$

Al resolver esta inecuación se concluye que la cantidad *b* de bayas tomadas de la cima de la montaña es cualquier número natural par mayor o igual a 28. Entendemos que la condición de número natural par de esa cantidad está presente en la historia pues se trata de bayas y se dice que no hubo obstáculos para realizar la partición.

Por supuesto que podría analizarse junto a los estudiantes cómo se hubiera realizado la partición si el número de bayas hubiera sido impar y se los podría invitar a elaborar conjeturas o agregar la resolución de ese conflicto a la historia.

Con este análisis los alumnos podrán tomar conciencia de que podemos elegir la variable de diferente forma para dar respuesta a una situación y apreciar las complejidades que supone una u otra elección. También está presente el tránsito entre lenguaje coloquial y lenguaje simbólico, aspecto ineludible en el aprendizaje del álgebra en este nivel.

La historia presentada permite al docente continuar trabajando con ella en situaciones matemáticas, por ejemplo, solicitando a los estudiantes que sugieran cambios en el trato que ofrecieron los guerreros a Tsuka, o cambiando la integración del número de miembros de la familia o el número de bayas que quedaron perdidas por el camino. Todas estas situaciones llevarán a nuevos procesos de matematización que involucran nuevas formulaciones y comprensiones sobre las acciones desarrolladas.

REFLEXIONES FINALES

Intentamos en este trabajo aportar a los docentes algunas ideas para emprender la experimentación de este recurso de enorme potencial para la enseñanza de la matemática. Estamos seguros de que será una forma muy gratificante de enseñar y de aprender, que motivará a profesores y a estudiantes por igual.

Nos despedimos con las hermosas palabras de Graciela Montes:

> Contar, volver a contar no es un gesto menor, afloja las soldaduras, introduce una cuña en lo establecido. Parte de lo que la escuela tendría que ofrecer hoy es la ocasión de contar. No pienso en grandes historias fantásticas, en relatos prestigiosos, no sólo en eso sino, mucho antes, en el relato mínimo. Una ocasión de contar. Una pequeña brecha. Que le den a uno la palabra y le insuflen confianza en poder contar. (24 de setiembre de 2003)

Y como ella dice, “Anímese: cuente una historia”.

REFERENCIAS

Albool, R. (2012). The Effect of Utilizing Storytelling Strategy in Teaching Mathematics on Grade Four Students' Achievement and Motivation towards Learning Mathematics. *Proceedings of the International Conference The Future of Education, 2nd Edition*. Recuperado desde http://conference.pixel-online.net/edu_future2012/common/download/Paper_pdf/354-ITL54-FP-Albool-FOE2012.pdf el 11 de octubre de 2015.

Balakrishnan, C. (2008). *Teaching Secondary School Mathematics Through Storytelling*. Tesis de Maestría no publicada. Simon Fraser University, Canadá. Recuperado desde http://www.peterliljedahl.com/wp-content/uploads/Thesis-Chandra-Balakrishnan.pdf el 11 de octubre de 2015.

Bettelheim, B. (1976). *The uses of enchantment*. Nueva York: Alfred A. Knopf.

Cho, Y. y Hong, S. (2015). Mathematical intuition and storytelling for meaningful learning. En K. Y.T. Lim (Ed.), *Disciplinary intuitions and the design of learning environments* (pp. 155–168). Singapore: Springer.

Egan, K. (1994). *Fantasía e imaginación: su poder en la enseñanza*. Madrid: Ediciones Morata.

Egan, K. (1997). *Educated mind: How cognitive tools shape our understanding*. Chicago: University of Chicago Press.

Egan, K. (2005). Narrativa y aprendizaje. Una travesía de inferencias. En H. McEwan y K. Egan (Comps.). *La narrativa en la enseñanza, el aprendizaje y la investigación* (pp. 169-180). Buenos Aires: Amorrortu.

Friera, S. (23 de abril de 2012). Estamos hechos de historias. *Página 12.* Recuperado desde http://www.pagina12.com.ar/diario/suplementos/espectaculos/2-24995-2012-04-23.html el 17 de diciembre de 2015.

Goral, M. y Meyers, C. (2006). Using storytelling to teach mathematics concepts. *Australian Primary Mathematics Classroom*, 11 (1), 4-8.

Hughes, T. (1977). Myth and Education. *Times Literacy Supplement*, 2 September, 11-13.

Marín, M. (2007). El valor matemático de un cuento. *Revista SIGMA*, 31, 11-26.

Martín, J. (2000). *Cuentos y matemáticas*. Canarias: Dirección General de Ordenación e Innovación Educativa de la Consejería de Educación, Cultura y Deportes del Gobierno de Canarias.

Montes, G. (24 de setiembre de 2003). Anímese: cuente una historia. *Clarín.* Recuperado desde http://edant.clarin.com/diario/2003/09/24/o-02701.htm el 11 de octubre de 2015.

Raines, S. C. e Isbell, R. T. (1994). *Stories: Children's Literature in Early Education*. Albany, NY: Delmar Publishers.

Rodari, G. (2013). *Gramática de la fantasía*: *introducción al arte de inventar historias*. Buenos Aires: Colihue.

Schiro, M. (2004). *Oral Storytelling & Teaching Mathematics. Pedagogical and Multicultural Perspectives*. USA: Sage Publications.

Smith, F. (1990). *To think*. New York: Teachers College Press.

Wells, G. (1986). *The meaning makers*. Portsmouth, NH: Heinemann.

Zazkis, R. y Liljedahl, P. (2005). *Teaching mathematics through storytelling.* Manuscrito no publicado.

Zazkis, R y Liljedahl, P. (2009). *Teaching Mathematics as Storytelling* Rotterdam: Sense Publishers.

PERIODICIDAD EN EL DISCURSO MATEMÁTICO ESCOLAR URUGUAYO: UNA PUESTA A PUNTO Y UNA PROPUESTA

MARCELO ASTORUCCI, GISELA DA CUNHA, ALEJANDRA HERGATACORZIAN,

VERÓNICA MOLFINO, MARÍA NOEL ZUNINO

Resumen

En este trabajo presentamos un análisis de algunos aspectos del discurso matemático escolar uruguayo relativo al tema *periodicidad*, en particular en el nivel medio. A partir de él, diseñamos una propuesta de un posible abordaje del tema pensada para un libro de texto de primer año de educación media superior o tecnológica. La misma atiende a los resultados de una investigación que presenta una socioepistemología del aspecto periódico de las funciones.

Palabras clave: periodicidad, discurso matemático escolar, predicción.

Abstract

This paper presents an analysis of some aspects of the uruguayan school mathematical discourse on the topic *periodicity*, particularly at the secondary level. We designed a proposal for a possible approach to the subject in a first year of high school education or technology textbook, based on that analysis. It heeds the results of a research that presents a socioepistemology of the periodic aspect of functions.

Keywords: periodicity, school mathematical discourse, prediction.

INTRODUCCIÓN

Este trabajo surge a partir de una actividad planteada en el marco de la asignatura Análisis del Discurso Matemático Escolar, de cuarto año de la carrera de profesorado de matemática en el Instituto de Profesores

Artigas. Una parte de la consigna de dicha actividad consistía en seleccionar un texto del nivel medio que abordara el tema *periodicidad de funciones*, analizar la sección correspondiente y presentar una reelaboración de la misma basada en lo expuesto en Buendía (2006). La selección de esta temática fue incentivada por la constatación de que en Uruguay ocurre lo mismo que lo denunciado por Buendía (2006) para otros contextos: el tema periodicidad es abordado en cursos de enseñanza media superior como una característica de las funciones angulares y no como un tema en sí mismo, independiente de aquellas. En este trabajo pretendemos brindar herramientas para un rediseño del discurso matemático escolar (dme), mediante la presentación de una alternativa para el abordaje del concepto de periodicidad en libros de texto.

PERIODICIDAD EN EL DISCURSO MATEMÁTICO ESCOLAR URUGUAYO

Buendía (2006) sostiene que el dme sobre el concepto de periodicidad ha sido tradicionalmente vinculado exclusivamente al estudio de las funciones angulares y la trigonometría. Ello hizo que nos cuestionemos sobre qué es lo que ocurre en el dme uruguayo. En concreto, pusimos atención a la manera en que se sugiere abordar el tema periodicidad desde los programas de educación secundaria y técnico profesional. Analizamos también dos libros de texto de uso difundido en el curso de primer año de bachillerato (15-16 años de edad) correspondiente al grado 4 de educación secundaria.

Programas

Los programas de matemática en los que encontramos el tema *periodicidad* o *función periódica* son el de primer año de educación media superior (EMS) de educación secundaria (ANEP, 2010) y varios correspondientes al primer año de educación media tecnológica (EMT) de diferentes orientaciones: turismo, administración, electroelectrónica, electromecánica, electromecánica automotriz, termodinámica (ANEP, 2004 a y b).

En el programa de primer año EMS (plan 2006), único de educación secundaria en el que aparece el tema, encontramos que la periodicidad se estudia como una característica de las funciones angulares (seno, coseno, tangente), en la unidad del mismo nombre.

Entre los programas de EMT, que corresponden al plan 2004, podemos hacer algunas distinciones:

- En la orientación agraria se encuentra como una característica a estudiar dentro de las funciones trigonométricas.
- En las orientaciones agrícola ganadero, turismo, administración, informática, electromecánica, electromecánica automotriz y termodinámica, la periodicidad se presenta como una propiedad de las funciones y sus gráficas y, como una competencia a desarrollar, la observación de la periodicidad de una función a partir de su gráfica. En la orientación electroelectrónica del mismo plan con actualización del 2006, se prescribe además de lo mencionado anteriormente para las otras orientaciones, la definición de funciones periódicas.

Podemos decir entonces que el tema periodicidad, en las orientaciones mayoritariamente elegidas por los estudiantes, aparece como un tema supeditado a funciones angulares (recordemos que la mayoría de los estudiantes de ese nivel optan por realizarlo en secundaria). Solo en los programas de algunas de las orientaciones de carácter tecnológico aparece el tema como característica o propiedad que puede cumplir una función real de cualquier tipo.

Libros de texto

Dado que los programas en los que encontramos el tema son correspondientes al primer año de EMS o EMT, decidimos analizar dos textos correspondientes a ese nivel. Uno de ellos es Mikrakys de cuarto año (primer año de EMS o EMT) (Gallo,Haniotis, Muñiz, Silvera, 2004).

El tema se presenta en el Capítulo 7 'Funciones angulares'. Estas se definen como aquellas funciones en las que existe una relación entre las medidas de los ángulos y los números reales.

Aquí se presenta el círculo trigonométrico y se incluye la notación de las funciones trigonométricas seno, coseno y tangente.

A continuación se aclara que dado un número real del conjunto imagen de una función angular, existen infinitos ángulos que se corresponden con él en el dominio de ella. A partir de esta observación y mediante la presentación de un diagrama se va introduciendo la idea de periodicidad.

Luego se desarrolla un planteo que termina concluyendo con la definición de función periódica, que se define de la siguiente manera:

Definición:
f es una función periódica de período *p* (*p* real positivo) si y solo si $f(x) = f(x+p)$ $(\forall x)$, $x \in D(f)$

A continuación de la definición, se aclara que las funciones angulares anteriormente definidas son funciones periódicas y se resaltan las expresiones de las funciones siendo *x* un ángulo en grados o radianes. Posteriormente se señala que las funciones angulares no son biyectivas; la no inyectividad ya fue mostrada. A lo largo del capítulo se realizan pruebas que confirman la no sobreyectividad (considerando R como codominio). Vemos que aquí no aparecen ejemplos y no ejemplos, sin ser los mencionados de las funciones angulares. Lo que hacen los autores es definir directamente y mostrar con el círculo trigonométrico que la definición se verifica en funciones angulares, pero no se ejemplifica con otro tipo de funciones periódicas. Después de lo planteado estudian las funciones trigonométricas y fundamentan mediante argumentos gráficos, su periodicidad. Ello solamente para las funciones seno, coseno y tangente.

El otro texto analizado es Matemática 4 de Ochoviet y Olave (2011). En él también observamos que el tema *función periódica* queda supeditado a su carácter de propiedad de las funciones angulares. El texto presenta el tema funciones angulares, comienza con la función seno mostrando su representación gráfica y sus principales características, recorrido, máximos, mínimos y que los valores de la función se repiten cada 360º, muestra su forma algebraica y menciona que las funciones que cumplen esa última característica se llaman periódicas. La misma presentación se realiza para la función coseno y tangente. No presenta no ejemplos del concepto de periodicidad ni algún tipo de fenómeno extramatemático que presente un comportamiento periódico.

La definición de periodicidad no figura en forma explícita, sino que define periodicidad en el caso particular de la función seno: "como los valores de la función se repiten cada 360° cíclicamente, se cumple que: $sen(x+360)=sen(x)$, por esto la función seno se denomina periódica y su período es 360°" (Ochoviet y Olave, 2011, p.110).

En síntesis, en ambos textos no se le da al concepto de periodicidad un estatus de objeto matemático a aprender o institucionalizar, sino que se presenta como una característica que surge a partir del estudio de las funciones trigonométricas. Dadas las recomendaciones del programa de primer año de EMS, era esperable esta presentación en los textos.

ASPECTOS TEÓRICOS: SOCIOEPISTEMOLOGÍA DE LO PERIÓDICO

En Buendía (2006) se presenta una investigación sobre el aspecto periódico de las funciones, enmarcada en la Socioepistemología como perspectiva teórica. En ese marco, una epistemología de prácticas (o socioepistemología) es considerada la descripción del desarrollo de un concepto a partir de las prácticas que le dieron origen y favorecieron su construcción social, atendiendo a aspectos cognitivos, culturales, históricos e institucionales. En particular, la socioepistemología de lo periódico es una descripción epistemológica de cómo se origina y desarrolla el saber *periodicidad* pero atendiendo a la práctica social que interviene en ese desarrollo: la predicción.

El interés del hombre por los fenómenos naturales periódicos, como el comportamiento repetitivo de los cuerpos celestes, ha contribuido al desarrollo de la ciencia y, en particular, estos fenómenos “han sido el puente entre la práctica empírica y la teoría de la predicción.” (Buendía, 2006, p. 234). Este interés estuvo presente incluso desde las primeras civilizaciones, como la babilónica o la egipcia, pero es recién en el siglo XVIII que se hace relevante la característica periódica de las funciones trigonométricas.

Según la autora, esta relevancia se puso de manifiesto mediante el interés por la descripción analítica de movimientos. Euler, quien establece formalmente la periodicidad como una característica de la función seno, centró su estudio en la descripción de un movimiento que ocurría a través del tiempo (movimientos osciladores armónicos), en particular, la predicción de la posición para un tiempo determinado.

Vemos entonces que la construcción del conocimiento parece ser el resultado del tránsito continuo entre disciplinas, reconociendo prácticas involucradas en ellas y dotando de un contexto significativo a la construcción del conocimiento matemático (Buendía, 2006). En particular, la práctica que la autora detecta como generadora y normativa de la construcción del concepto de periodicidad es la predicción.

En relación a los aspectos cognitivos, Buendía (2006) pone atención a dos elementos vinculados al reconocimiento de lo periódico por parte de los estudiantes: la dualidad proceso-objeto y la dualidad local-global.

Shama (1998) reporta que estudiantes de nivel medio reconocen a lo periódico como un proceso y no como un objeto. Esto los conduce a reconocer fenómenos como periódicos que en realidad no lo son, transfiriendo propiedades del proceso al producto. Esto es, identificar cualquier patrón o repetición como periódico, surgiendo el término "cuasi" período atendiendo solo a la repetición que se presenta en la variable independiente. Plantea que resulta importante entonces, para determinar el carácter periódico de una función que modela el comportamiento de determinado fenómeno, observar el comportamiento de ambas variables (dependiente e independiente).

Dreyfus y Eisenberg (1983), investigando cómo estudiantes universitarios manejaban ciertas características de las funciones, entre ellas la periodicidad, dan cuenta de la necesidad de mostrar una visualización global de la información geométrica para determinar -a partir de la representación gráfica de una función- si esta es o no periódica. Por otra parte, Cordero y Martínez (2002) advierten que para predecir es necesario tanto identificar el estado inicial de una función (caracterización local) como su comportamiento (caracterización global); "la periodicidad es una representación integral que está caracterizada por lo local y lo global en una relación dialéctica" (Buendía, 2006, p. 238).

A partir de estos insumos teóricos proponemos una alternativa a los abordajes tradicionales de la periodicidad en los libros de texto.

UNA PROPUESTA ALTERNATIVA: ¿QUÉ NOS APORTAN ESTAS ACTIVIDADES?

Proponemos una secuencia de actividades diseñada para incluir en un libro de texto del mismo nivel que los analizados, esto es, primer año de EMS o EMT.

Reconociendo que la práctica social que genera el concepto de periodicidad es la predicción, proponemos una alternativa para abordar el concepto en sí mismo y no como característica de cierto tipo de funciones solamente.

Un poco de historia…

> *El hombre, a lo largo de la historia, ha sentido la necesidad de predecir, por ejemplo, dentro de cuánto tiempo saldrá el sol nuevamente en determinado lugar a una hora determinada, o cuántos latidos realiza el corazón en un tiempo prefijado. Así fue descubriendo cómo el universo está lleno de ondas y vibraciones, tanto al mirar a lo lejos a las galaxias, como al explorar lo muy cercano, el interior de los átomos, la luz, el sentido, la electricidad, el electromagnetismo, los rayos X. Estos descubrimientos son utilizados en artefactos de nuestra actualidad como la radio, el radar, el microscopio, la resonancia magnética, los celulares, entre otros.*

Proponemos comenzar con el texto anterior para ofrecer una breve reseña histórica (teniendo en cuenta que es un texto pensado para estudiantes de entre 15 y 16 años) sobre la necesidad del hombre de predecir determinados fenómenos y la importancia que tuvo esta práctica en la evolución de artefactos tecnológicos. Si bien es un abordaje simple, buscamos, por un lado, poner en evidencia el vínculo entre la predicción y la periodicidad contemplando los aspectos culturales e históricos relacionados con el concepto de función periódica. Por otro lado, consideramos que esta reseña favorece una ruptura con la concepción de la periodicidad como una propiedad exclusiva de las funciones angulares que vive en el dme uruguayo.

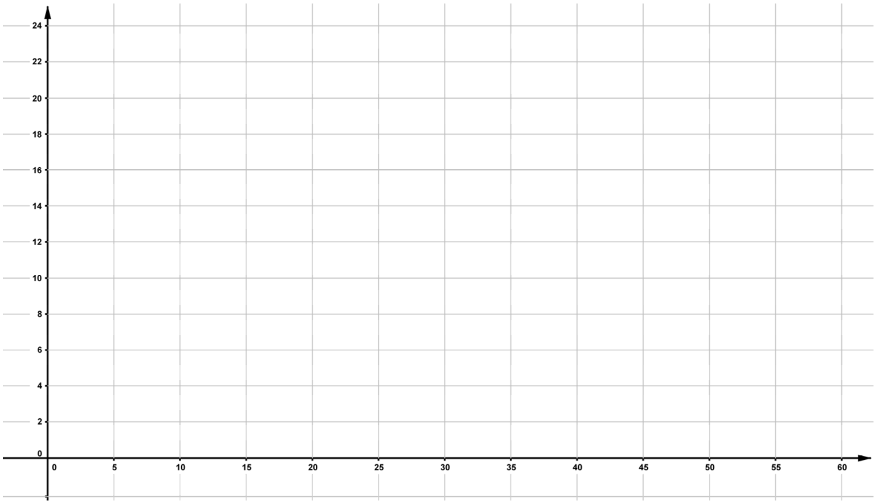
Actividad 1

Consideremos la hora entre las 0 y las 24. Si ahora son las 2 horas, dentro de 24 horas, ¿qué hora será? ¿Y dentro de 34? Si llamamos h a la función "qué hora es", tendríamos que h(0) = 2.

Completa:

- *Dentro de 24 horas serán las _____ por lo que h(24) es igual a ____.*
- *Dentro de 34 horas serán las _____ por lo que h(34) es igual a ____.*

Representa gráficamente la función "qué hora es" (h) en un intervalo de tiempo de 60 horas, tomando como valor inicial la hora 2.



Luego de realizar la gráfica: ¿Puedes determinar qué hora será dentro de 59 horas y 15 minutos? Completa:

h(____)= _____

Aún solo teniendo la representación gráfica en un período acotado, ¿podrías predecir la hora que será dentro de 7852 horas?

¿Cada cuántas horas la función repite su comportamiento? ¿Cómo llamarías a ese lapso de tiempo? ¿Cómo le llamarías a este tipo de funciones?

Esta actividad propone comenzar el tema en un contexto extramatemático, a través de la función "qué hora es", generando la necesidad de precisar el comportamiento de cada variable (tiempo - distancia) en el marco de la práctica de predicción como generadora del conocimiento de la periodicidad.

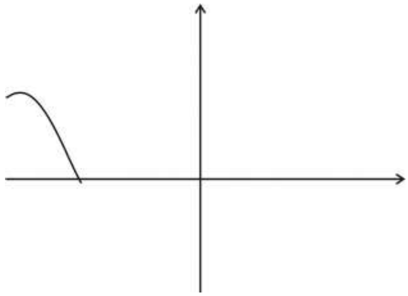
Actividad 2

PARTE I

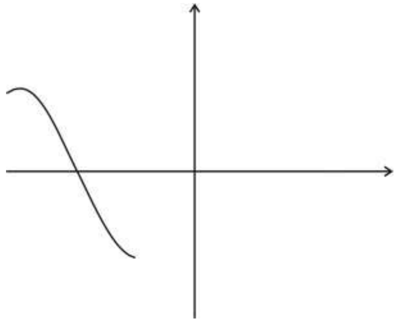
a. Dada las siguientes gráficas correspondientes a funciones de dominio R, continúa, si es posible, su trazo.

b. Observa tus respuestas y compáralas desde la gráfica 1 a la 4.

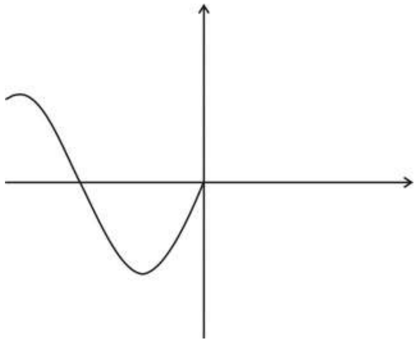
1.



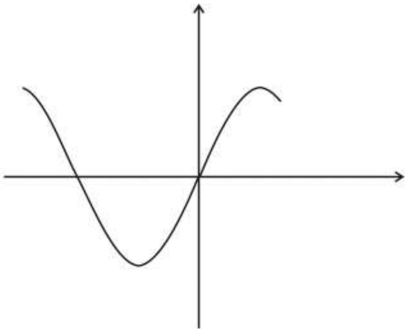
2.



3.

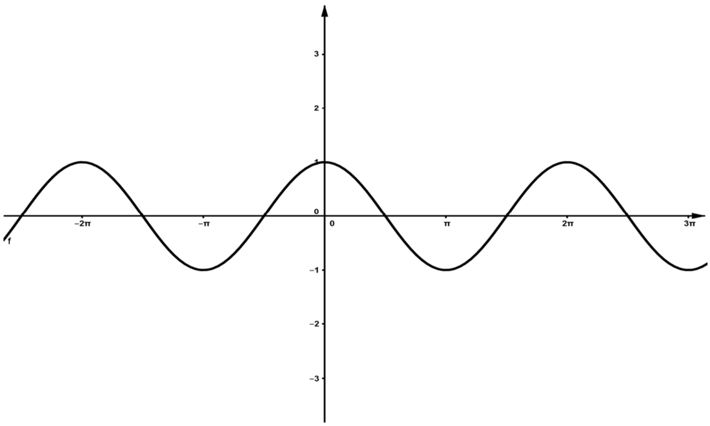


4.



PARTE II

Observando la gráfica correspondiente a una función de dominio R, indica si es posible un valor aproximado de la imagen de x = 13 y x = 95.

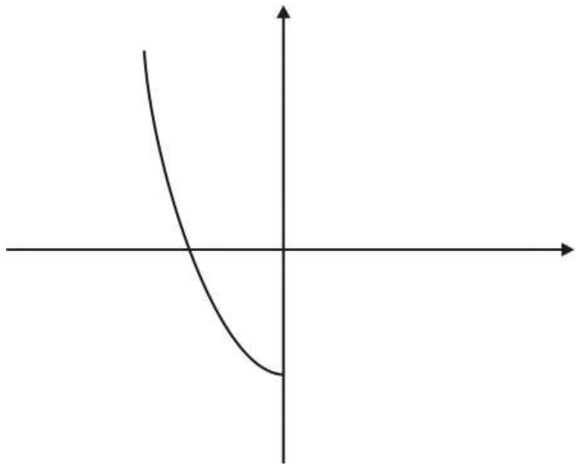


PARTE III

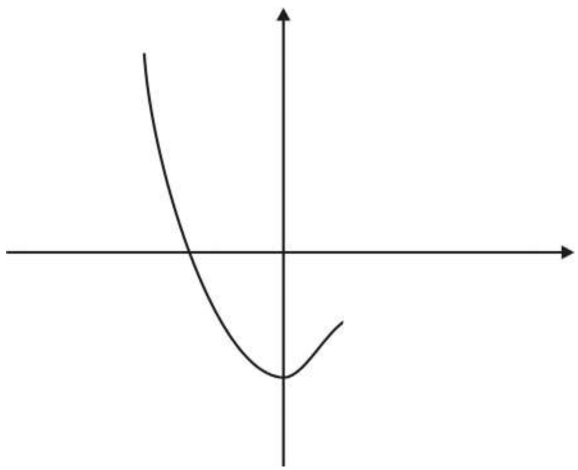
a. Dadas las siguientes gráficas, continúa, si es posible, su trazo.

b. Observa tus respuestas y compáralas desde la gráfica 1 a la 3.

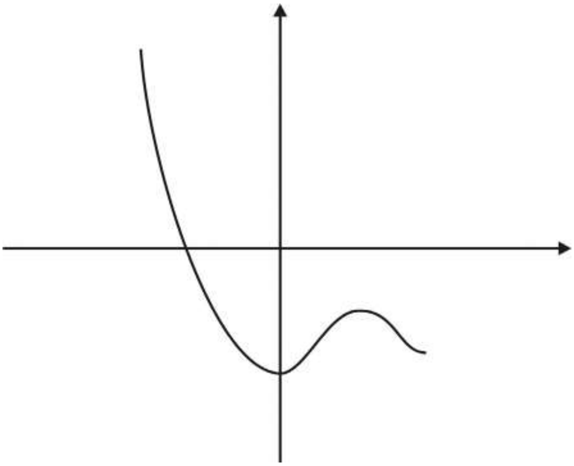
1.



2.

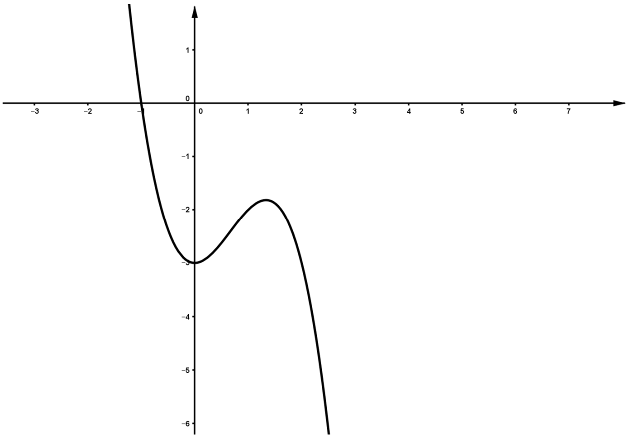


3.



PARTE IV

Observando la gráfica correspondiente a una función de dominio R, indica si es posible un valor aproximado de la imagen de x = 13.



PARTE V

a. Considerando las partes II y IV, ¿en cuál crees que fueron más precisas tus predicciones? ¿Por qué?

b. ¿Qué relación tiene lo observado en esta actividad con lo analizado en la actividad 1 sobre la función "qué hora es"?

En la actividad 2 se pretende trabajar con distintas funciones reales, reconociendo que la dualidad local-global nos permite predecir el comportamiento de una función si esta es periódica. Dadas diferentes gráficas, el estudiante debe continuar, de considerarlo posible, su trazo, y observar y comparar los resultados. En aquellas en las que no cuenta con los suficientes datos globales sobre el comportamiento de la función, aunque sí cuenta con datos locales en una parte, verá más difícil la tarea que en las restantes. Se pretende entonces que en la parte I, al contar gradualmente con más información del comportamiento global (y tratarse de una función periódica), el estudiante pueda continuar con una gráfica que se vaya aproximando a la deseada, lo cual no es posible en la parte III (dado que el comportamiento de la función no es periódico).

Por otra parte, la intención en las partes II y IV es que el estudiante intente predecir cuál será la imagen para determinados valores de *x*, según una función, desde su registro gráfico. Al apreciar que esa predicción es posible en la parte II pero no en la IV, la predicción operaría como generadora del concepto de *periodicidad.* En la parte V se pretende apreciar que cuando sabemos que la función es periódica, tenemos más datos y por tanto podemos predecir cuál será la imagen de un elemento del dominio en esas funciones, aún cuando dicho elemento no figura en la vista gráfica. Esto no sucede cuando la función no es periódica.

Actividad 3

a. Completa:

Denominamos función periódica a una función que cumple ______________________________   *Denominamos período a*   ____________________________________

Si volvemos sobre la actividad 1, tenemos que…

- *¿Es h una función periódica?*

Sí, pues $h(1) = h(25) =$ ____ $= 3$. Análogamente para cualquier valor de x.

- *¿Cuál es el período p de h?*

$p = 24$ horas pues $h(x) = h(x+24)$.

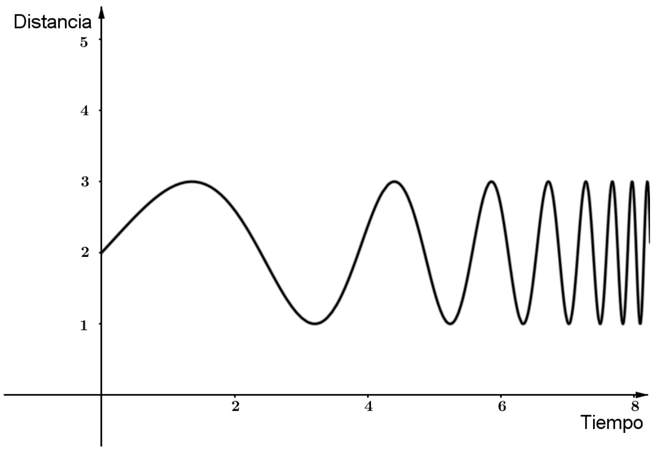
b. Indica cuál(es) de las funciones de la actividad 2 es (son) periódica(s) y justifica. En caso de que lo sean, indica el período.

La actividad 3 opera como una instancia de institucionalización del conocimiento. En la parte a el docente a cargo tiene la oportunidad de generar un debate que conduzca a que el grupo consensúe un significado para el concepto de periodicidad. Dependerá del grupo y del docente la forma en que se exprese la definición y el o los registros (verbal, simbólico, gráfico) que se empleen. En la parte b se propone utilizar el consenso al que se ha arribado para determinar si las funciones vistas en las actividades anteriores son o no periódicas.

Actividad 4

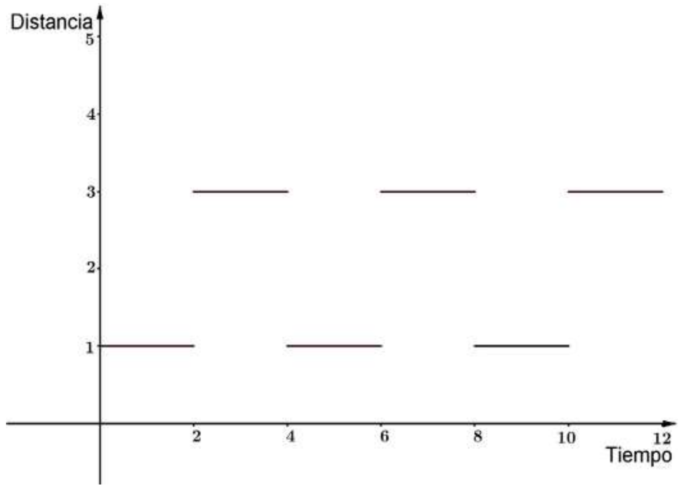
A continuación se presentan algunas funciones dadas por su representación gráfica y otras por su expresión analítica. Determina para cada caso si se trata de una función periódica o no periódica. Justifica tu respuesta. En caso de ser periódica, indica su período[1]*.*

a.

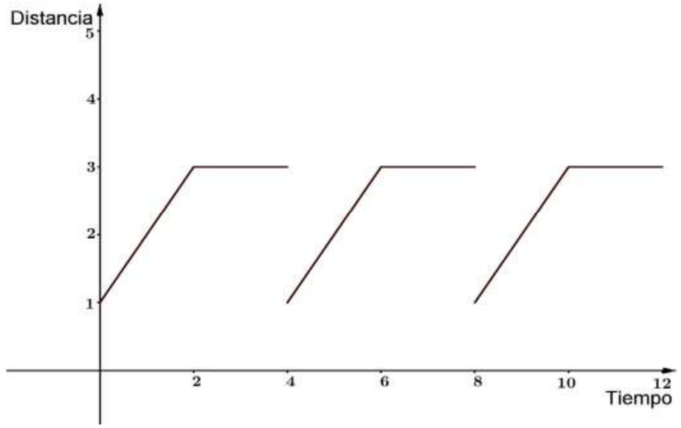


[1] Las gráficas de esta actividad son algunas de las que se presentan en el anexo de Buendía (2006).

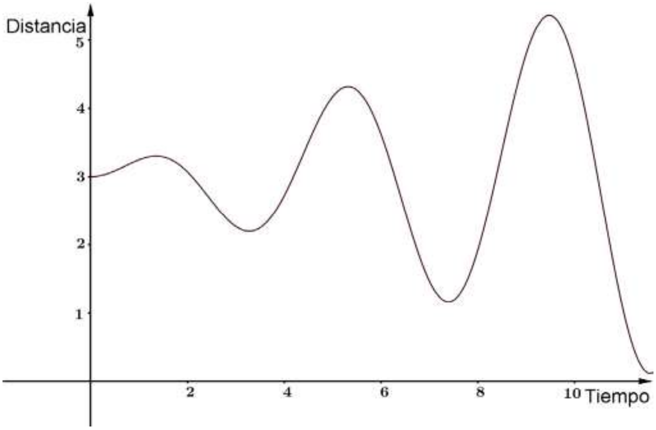
b.


Distancia
5
4
3
2
1
2
4
6
8
10
12
Tiempo

c.


Distancia
5
4
3
2
1
2
4
6
8
10
12
Tiempo

d.



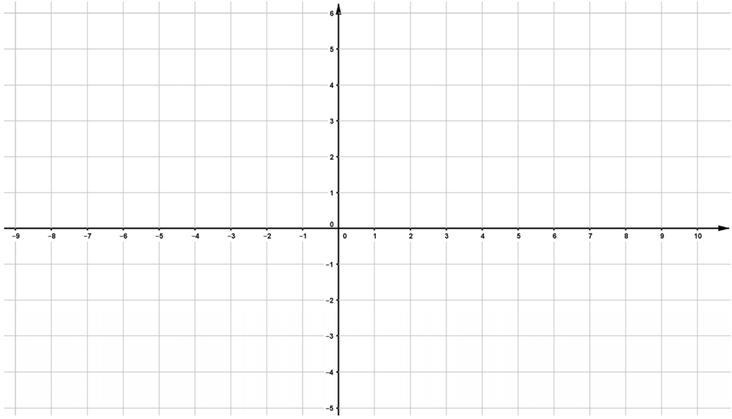
e. $e : R \to R / e(x) = 6$

f. $f : R \to R / f(x) = (2x)^2 + 1$

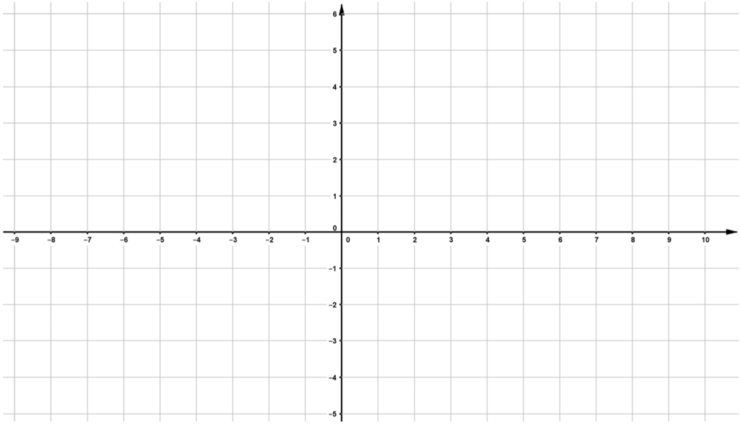
g. $$g : [-4,14) \to R / g(x) = \begin{cases} -2x+1 \ si \ -4 \le x < 2 \\ 2x+3 \ si \ 2 \le x < 8 \\ 2x+25 \ si \ 8 \le x < 14 \end{cases}$$

Actividad 5

a. Esboza la gráfica de una función periódica.



b. Esboza la gráfica de una función de período 4 cuyas imágenes pertenezcan al intervalo [-6,6].



Las actividades 4 y 5 están diseñadas para que el estudiante desarrolle la capacidad de visualizar a la periodicidad como un objeto y no solo como un proceso. Por ejemplo, la función representada en la parte 4a puede ser vista como periódica "porque tiene un comportamiento repetitivo", por un estudiante que está considerando a la periodicidad solamente como un proceso dinámico de "repetición". Sin embargo, si se tiene en cuenta la definición consensuada se constatará que no es periódica.

Asimismo, en la actividad 5 el docente puede evaluar si el estudiante pone en juego la condición de objeto en la construcción de una función periódica o si solo la ve como una función que debe tener un comportamiento dinámico "repetitivo", esto es, como un proceso.

En síntesis, consideramos que este ejercicio de análisis de la periodicidad en el dme y reelaboración de un texto para abordarlo como tema explícito puede aportar a una reflexión de la comunidad escolar sobre el tema. Por un lado, porque ponemos en evidencia que la periodicidad es una característica interesante a atender en cualquier función, no solamente en las angulares. El reconocimiento de fenómenos periódicos es importante para el desarrollo de la ciencia: si un fenómeno se modela mediante una función periódica, será más fácil predecir su comportamiento en el futuro.

Por otro lado, consideramos importante, ya sea en el estudio de las funciones angulares como en el estudio de otras funciones periódicas, que los diversos actores involucrados en la enseñanza de la matemática reconozcan la importancia de identificar a la periodicidad como un objeto y no solo como un proceso, así como aprovechar la dualidad local-global para el diseño de actividades y para comprender las producciones de los estudiantes.

REFERENCIAS

Administración Nacional de Educación Pública (2010). *Programa de Matemática de primer año de Educación Media Superior*. Plan 2006, Reformulación 2010. Consejo de Educación Secundaria.

Administración Nacional de Educación Pública (2004a). *Programa de Matemática de primer año de Educación Media Tecnológica. Orientaciones Electroelectrónica, Electromecánica, Electromecánica Automotriz y Termodinámica.* Consejo de Educación Técnico Profesional.

Administración Nacional de Educación Pública (2004b). *Programa de Matemática de primer año de Educación Media Tecnológica. Orientaciones Administración y Turismo.* Consejo de Educación Técnico Profesional.

Buendía, G. (2006). Una socioepistemología del aspecto periódico de las funciones. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *9(2)*, 227–251.

Cordero, F. y Martínez, J. (2002). El comportamiento periódico de una función como un argumento contextual. La manifestación del movimiento fuera del instante. En C. Crespo (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (Vol. 14, pp. 422-431). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Dreyfus, T. y Eisenberg, T. (1983). The function concept in college students: linearity, smoothness and periodicity. *Focus on Leaning Problems in Mathematics*, 5 (3-4), 119-132.

Gallo, E., Haniotis, S., Muñiz, J.L., Silvera, J. (1994). *Mikrakys. Funciones. Espacio*. Montevideo: Fin de Siglo.

Ochoviet, C. y Olave, M. (2011). *Matemática 4.* Montevideo: Santillana.

Shama, G. (1998). Understanding periodicity as a process with a gestalt structure. *Educational Studies in Mathematics*, 35 (3), 255-281.

TAREAS ENFOCADAS A SIMILITUDES Y DIFERENCIAS COMO MOTOR PARA EL APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA: NUEVAS CATEGORÍAS

ANA MALDONADO, LETICIA MEDINA, VICTORIA MESA, VERÓNICA MOLFINO, CRISTINA OCHOVIET, DANIELA PAGÉS, FLORENCIA RIVERO

Resumen
Las tareas que requieren considerar similitudes y diferencias entre objetos matemáticos u otras entidades tienen un enorme potencial para el aprendizaje de la matemática. Presentamos y ejemplificamos tres nuevas categorías en este tipo de tareas: tareas de particularizar y generalizar, tareas de proponer un objeto matemático y tareas de formular preguntas para identificar un objeto matemático.
Palabras clave: diseño de tareas, similitudes y diferencias, tareas de final abierto.

Abstract
Tasks that require considering similarities and differences between mathematical objects or other entities have a great potential for the learning of mathematics. We present and exemplify three new categories of this kind of tasks: tasks that require particularizing and generalizing, tasks that require proposing a mathematical object and tasks that require formulating questions in order to identify a mathematical object.
Keywords: task design, similarities and differences, open ended tasks.

INTRODUCCIÓN

Este trabajo surge en el marco del curso de la asignatura Aportes metodológicos para la enseñanza de la matemática en la formación de profesores, correspondiente al tercer semestre del Diploma en

Matemática que desarrollan en conjunto la ANEP y la UdelaR. En esta asignatura se abordaron diversos trabajos de investigación que reportan los diferentes factores que inciden en el desempeño de los docentes de matemática en el aula y la estrecha relación con los ambientes de aprendizaje del período de formación. A partir de esa información se propusieron trabajos de diseño o rediseño de situaciones de enseñanza para la formación de profesores que atendieran a los resultados provenientes de la investigación. De uno de los trabajos realizados en este curso, y su posterior discusión colectiva, surge la propuesta que presentamos en este artículo.

Nos abocaremos al diseño de tareas para la clase de matemática, desde la óptica de Zaslavsky (2008). Esta autora propone tareas enfocadas en similitudes y diferencias entre objetos u otras entidades matemáticas como actividades centrales para el desarrollo del pensamiento matemático. En este tipo de tareas distingue tres categorías: tareas de clasificación, tareas de considerar alternativas y tareas de comparar y contrastar. Nosotros sugeriremos tres nuevas categorías: tareas de particularizar y generalizar, tareas de proponer un objeto matemático y tareas de formular preguntas para identificar un objeto matemático.

LA IMPORTANCIA DE LAS TAREAS

La planificación de una clase de matemática supone la elección de los ejercicios, problemas o tareas que luego se propondrán a los estudiantes para favorecer el aprendizaje de un concepto o procedimiento.

Hiebert y Wearne (1997), siguiendo a Doyle (1983, 1988), dicen que “lo que los estudiantes aprenden está en gran parte definido por las tareas que se les ofrecen” (p. 395). De aquí la relevancia de situarse en el diseño de las tareas -o de su transformación a partir de tareas tomadas de libros de texto, de manuales o de otras fuentes- para lograr el mayor aprovechamiento de ellas.

Las tareas que se proponen a los estudiantes no generan por sí solas aprendizaje sino que inciden las condiciones en que se las plantea, la forma en que se abordan, el contexto en que se desarrollan, las interacciones que están previstas, los recursos y materiales, etc. (Watson y Mason, 2007; Liljedahl, Chernoff y Zazkis, 2007). Por ello, “La elección de las tareas matemáticas para la clase por parte de los docentes y la manera en que se pide a los estudiantes que se aproximen a ellas, determinan la calidad de la matemática en la clase” (Guberman y Leikin, 2013, p. 36).

CONSIDERACIONES TEÓRICAS

Zaslavsky (2008) sostiene que la atención a las similitudes y las diferencias es un principio fundamental a tener en cuenta en el diseño de tareas. Las tareas que recomienda esta autora fomentan el establecer conexiones y comparaciones en un ámbito de trabajo colaborativo en pequeños grupos. Propone tareas que requieren, fundamentalmente, clasificar y comparar, son de final abierto en el sentido de Zaslavsky (1995), permiten que los alumnos tomen decisiones en base a criterios personales y disponibles, son poco directivas en el sentido de que el docente no impone una forma de abordarlas ni existe un resultado predeterminado al que arribar. Son tareas cuyo análisis tomará diferentes direcciones dependiendo de las decisiones de los estudiantes.

Zaslavsky (2008) plantea tres tipos de tareas enfocadas a similitudes y diferencias: (1) tareas de clasificación; (2) tareas de considerar alternativas; (3) tareas de comparar y contrastar.

En referencia a las tareas del tipo (1), Zaslavsky afirma que la actividad cognitiva de clasificar es una capacidad natural que ayuda a estructurar y clarificar lo que percibimos, a realizar distinciones y reducir la cantidad de memoria necesaria para tratar mera información. Agrega que la actividad de clasificar tiene un rol vital en el pensamiento humano.

Las tareas que la autora denomina "de clasificación" consisten en una propuesta en la que se entregan 20 o 30 tarjetas, cada una con un objeto o entidad matemática dada en alguno de sus registros de representación (pueden ser todas impresas en una hoja o recortadas como tarjetas independientes) y los estudiantes deben clasificarlas de todas las formas posibles de acuerdo a los criterios que ellos deseen. Se les solicita que hagan explícito el criterio y que detallen las categorías que surgen a partir de este. Los estudiantes deben registrar las distintas clasificaciones que surgen de acuerdo a cada criterio. Este trabajo se realiza en pequeños grupos y luego se trabaja en una puesta en común con todo el grupo.

Según la autora se pueden clasificar: objetos matemáticos (funciones, ecuaciones e inecuaciones, figuras geométricas, entre otros) y también problemas matemáticos.

Desde el punto de vista didáctico, Zaslavsky (2008) destaca que lo importante de este tipo de tareas es que no hay una respuesta correcta y que no importa llegar a una sola respuesta. Por este motivo, este tipo de tareas promueve una visión más subjetiva de la matemática.

Las tareas del tipo (2) requieren comparar una serie de alternativas. Por ejemplo: comparar posibles soluciones a un problema, comparar enunciados que describen un concepto, comparar pruebas de una proposición. Las proposiciones matemáticas pueden ser comparadas en términos de su validez, equivalencia, etc. Las pruebas de una proposición considerando si son correctas, incorrectas o de acuerdo a preferencias personales.

Zaslavsky (2008) observa que la matemática es mirada frecuentemente como una disciplina en la que hay una sola respuesta correcta para todo problema que sea resoluble y que no tiene espacio para visiones subjetivas. Este tipo de actividades que ella sugiere son de final abierto y pueden ayudar a construir una visión más humanista de la matemática pues las tareas dan lugar a las preferencias personales y no solo a cuestiones relacionadas a lo correcto. Además, por la forma de trabajo en la clase que sugiere, los resultados son socialmente construidos o rechazados.

En las tareas del tipo (3) se presentan dos o más objetos y se pregunta: ¿En qué son similares? ¿En qué son diferentes? Se solicita hacer una lista con similitudes y diferencias, tantas como se pueda, discutirlas y reflexionar sobre ellas. El diseño requiere que tengan características comunes y otras diferentes. Este tipo de tarea anima a los estudiantes a examinar los objetos con libertad sin predisponerlos a un tipo de mirada o dirigirlos a un lugar en particular. Mientras analizan similitudes y diferencias con el objetivo de comparar, los estudiantes podrán realizar cálculos, por ejemplo, pero estos estarán al servicio de la indagación, serán utilizados como herramientas y no serán usados porque el profesor lo demanda sino que surgen como elementos útiles para explorar una situación. Estas tareas son abiertas en el sentido de que es posible abordarlas entrando por diferentes lugares y desde las estrategias que cada alumno decida desplegar. Además, señala Zaslavsky, privilegian el desarrollo de la comprensión por sobre la obtención de resultados o productos.

NUEVAS CATEGORÍAS EN LAS TAREAS ENFOCADAS A SIMILITUDES Y DIFERENCIAS

En el curso de posgrado para profesores de matemática en el que surgió este trabajo, una de las actividades consistió en crear o identificar en la literatura de matemática o matemática educativa categorías de tareas que cumplieran el principio general de atender a similitudes y diferencias según Zaslavsky (2008) pero diferentes a las propuestas en ese artículo. En esa instancia, la propuesta de crear nuevas categorías surgió por una doble motivación. Por un lado, las docentes del curso de posgrado entendieron que una forma de evaluar la comprensión del marco podía consistir en la creación de nuevas categorías. Por otro, esta consigna funcionó a manera experimental para testear si la lista propuesta por Zaslavsky era exhaustiva o si, en efecto, se trataba de un listado de ejemplos posibles. La práctica de la enseñanza en este curso de posgrado, nos permitió comprobar lo segundo y, a partir de ello, abrir la búsqueda hacia nuevas categorías. Esto tiene un enorme potencial en tanto estas actividades son de gran ayuda para el aprendizaje de la matemática y, además, posibilitan el desarrollo de la creatividad de los docentes, abriendo una puerta hacia la imaginación de nuevas categorías posibles. A partir de las actividades creadas en el marco del curso de posgrado y de su posterior discusión en el grupo surgieron las siguientes categorías.

Tareas de generalizar y particularizar

Proponemos una nueva categoría para las actividades enfocadas a similitudes y diferencias que denominaremos *tareas de generalizar y particularizar*. Esta fue identificada en un texto de geometría para formación de profesores de matemática (Dalcín y Molfino, 2014) y enriquecida a partir del análisis grupal bajo el marco de Zaslavsky (2008).

Las tareas de generalizar invitan a atender propiedades de uno o más objetos matemáticos particulares y proponer que los alumnos investiguen si conjuntos de objetos, que incluyen al particular, conservan la o las propiedades originales. Asimismo, se pretende que el estudiante investigue si el argumento utilizado para validar una cierta propiedad se puede mantener al considerar un conjunto de objetos más amplio.

En las tareas de particularizar, partiendo de una situación o problema se recurre a un caso particular para realizar ciertas conjeturas y brindar argumentos para la misma. Asimismo, se analiza si los argumentos dados para el caso particular son válidos en el contexto original, que abarca familias de objetos más amplias. Este tipo de tarea puede resultar especialmente útil para la resolución de un problema: cuando se hace difícil abordar el problema para una familia dada de objetos, puede pensarse en su particularización a una familia más reducida que cumple propiedades particulares (Polya, 1965). En una segunda instancia se debe analizar si la manera en que se resuelve el problema para la familia particular de objetos matemáticos es adecuada para la familia que la contiene.

Las tareas de generalizar y particularizar favorecen el aprendizaje de los estudiantes pues estimulan su razonamiento, permiten trabajar de manera fluida conceptos y propiedades, desarrollan el vínculo entre distintos conocimientos matemáticos, promueven la elaboración de conjeturas, fomentan la búsqueda de argumentos para validarlas, invitan -mediante el trabajo colaborativo- a la construcción del conocimiento matemático en el aula y, finalmente, fortalecen el razonamiento inductivo así como el deductivo.

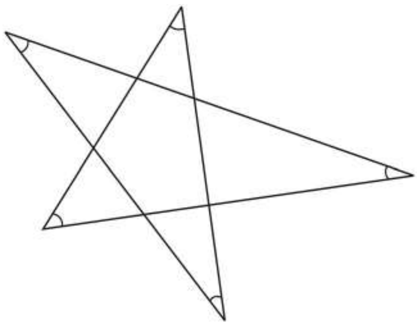
Esta nueva categoría de tareas se enmarca en las tareas de atención a similitudes y diferencias reportadas en Zaslavsky (2008) pues demandan la comparación entre dos o más familias de situaciones u objetos matemáticos, el análisis de sus propiedades y la formulación de conjeturas que relacionen las propiedades comunes a ambas familias de objetos. Además, son tareas de final abierto en tanto dan lugar a que los estudiantes formulen distintas conjeturas. En consecuencia, distintas respuestas son posibles, así como diferentes formas de ingresar a la situación dada y de proceder al momento de generalizar o particularizar.

Las tareas de generalizar y particularizar no están contempladas en las tres categorías propuestas en Zaslavsky (2008) pues requieren que el estudiante, partiendo de ciertas propiedades y una determinada familia de objetos matemáticos, construya otras familias de objetos que las verifiquen. El proceso de búsqueda de similitudes y diferencias se desprende del proceso de resolución del estudiante en la construcción de esas familias de objetos matemáticos, mientras que en las tareas de clasificar, comparar y contrastar o de considerar alternativas, los objetos matemáticos en los cuales el estudiante trabaja ya están dados en la consigna.

Para llevar a la clase este tipo de tareas proponemos el trabajo en pequeños grupos con posterior puesta en común. De esta forma las actividades adquieren un mayor potencial en lo que refiere al surgimiento de diferentes caminos para su resolución. Además, la validación de conjeturas requerirá de consensos que son propios de una clase de matemática entendida como comunidad de trabajo colaborativo. El rol del docente será el de guía y organizador del trabajo.

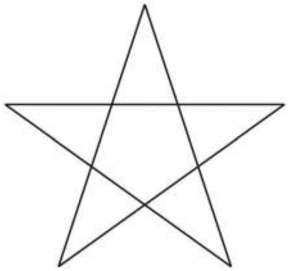
A continuación se expone una tarea de generalizar y particularizar. El objetivo consiste en desarrollar conjeturas sobre la suma de ángulos de un polígono estrellado. Está basada en una actividad tomada de Dalcín y Molfino (2014), material de referencia para el curso de geometría de primer año del profesorado de matemática.

1. *¿Es constante la suma de los ángulos marcados para cualquier estrella de cinco puntas?*



En caso afirmativo, ¿cuánto vale dicha suma? ¿Por qué?

Te sugerimos pensar en el caso particular en que la figura es un pentágono regular estrellado (pentalfa).



La respuesta que encontraste para este caso, ¿es válida como respuesta a la pregunta original? ¿Y el argumento que utilizaste para explicarlo?

2. ¿Cómo podrías generalizar el resultado al que llegaste en la parte 1 a otros polígonos?

Analizando el proceso de resolución de la actividad, creemos que la misma se enmarca dentro de las tareas de atención a similitudes y diferencias. Una posible estrategia de trabajo a llevar a cabo por parte de los estudiantes para dar respuesta a la parte 1 de la actividad es la de particularizar, explicitado en la sugerencia. En esta instancia podrán identificar ciertas regularidades, realizando un trabajo de búsqueda de diferencias y similitudes, para así poder elaborar un argumento que permita responder la primera pregunta. En la parte 2 de la actividad se pretende, nuevamente a través de un proceso de búsqueda de diferencias y similitudes, investigar y conjeturar qué sucede con la suma de los ángulos de otros polígonos. La actividad invita a los estudiantes a pensar en diferentes polígonos que verifiquen la propiedad de la parte anterior, sean estrellados o no. Se pretende explorar diferencias y similitudes tanto en lo que refiere a la solución del problema como al razonamiento empleado para la argumentación de esta en cada uno de los conjuntos de objetos.

Tareas de proponer objetos matemáticos

La segunda categoría que proponemos agregar a las tareas enfocadas a similitudes y diferencias son las *tareas de proponer objetos matemáticos*. Surgió como idea original del subgrupo de trabajo conformado para la realización de la actividad del curso de posgrado. Bajo este título se presentan tareas de final abierto en las que los alumnos son invitados a proponer un objeto matemático que mantenga similitudes y diferencias con otro dado. Su resolución promueve la atención a ciertas características de los objetos matemáticos que el docente ha decidido involucrar y que están establecidas en la consigna de la tarea. Su diseño requiere prestar especial atención a que sea posible la creación de múltiples objetos matemáticos que cumplan con las condiciones establecidas (de similitudes y diferencias respecto a un objeto dado); este requisito es importante para asegurar la existencia de múltiples respuestas correctas y mantener la característica de problema de final abierto propuesto por Zaslavsky (1995). Las tareas de proponer objetos matemáticos promueven la actividad cognitiva de clasificar, pues requieren que el estudiante diferencie entre los objetos que cumplen ciertas condiciones y los que no las cumplen, ayudando a estructurar el conocimiento construido. Además, promueven la resignificación de los objetos matemáticos en base a la atención a sus características o propiedades, favoreciendo la construcción de la noción de familias de objetos.

Para la resolución de este tipo de tareas el estudiante deberá observar cuáles son las características del objeto que se deben mantener para vincularlas con un conjunto de parámetros que él puede manejar sobre el objeto, extrayendo conjeturas y posteriormente relaciones entre ellos.

Asimismo, al decir de Zaslavsky (2008), estas actividades son consideradas de "bajo riesgo" ya que diferentes alumnos pueden comenzar a trabajar desde diversas perspectivas y realizar aportes legítimos utilizando sus conocimientos y habilidades.

Este tipo de tareas se diferencian de las de clasificación o comparación pues en estas los objetos vienen dados, los estudiantes deben percibir las propiedades de cada uno y clasificar los objetos en función de ellas. En cambio, en las tareas de proponer objetos matemáticos se presenta un objeto a los estudiantes y se les pide otro que sea similar en algunas características y diferente en otras. Esto orienta el pensamiento del estudiante hacia la estructura de la característica a considerar, para buscar un objeto que tenga o no esa propiedad. La ausencia del objeto cambia el foco de la tarea, en relación a las de clasificación o comparación.

A continuación proponemos una tarea de proponer objetos matemáticos para ejemplificar el criterio presentado.

Trabajemos con la función f de R en R definida por $f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x-1.$

1. Presenta una función g que tenga igual cantidad de puntos con tangente horizontal que f pero más de tres raíces. Anota tus observaciones y conclusiones.

2. Presenta una función h que coincida con f en el signo de sus derivadas primera y segunda. ¿Es posible que h esté acotada? Anota tus observaciones y conclusiones.

3. Presenta una función p cuyas tangentes paralelas a la recta $y = 3x + 1$ contengan estrictamente a las de f. Anota tus observaciones y conclusiones.

La tarea propuesta es un problema de final abierto en el sentido de Zaslavsky (1995) pues existen infinitas funciones que cumplen lo pedido. Además, es posible responder a lo solicitado utilizando distintos registros de representación, por ejemplo, gráfico y analítico. Es basada en observar ciertas propiedades de un objeto matemático (tangente horizontal, derivada primera nula, raíces, acotación, signo de su función derivada, rectas tangentes, pendiente de una recta, pendiente de la recta tangente) y modificarlo para que presente ciertas similitudes y ciertas diferencias con el objeto dado, por lo que consideramos que sigue el principio fundamental de atención a similitudes y diferencias.

Asimismo, esta tarea promueve la elaboración de conjeturas, la búsqueda de propiedades que sirvan como argumentos para justificarlas, la resignificación e interconexión de saberes, relacionando por ejemplo los ceros de una función polinómica con su derivada (parte 1). La parte 2 conduce a reflexionar sobre la relación entre el signo de las derivadas (primera y segunda) de una función y la acotación de la misma.

El diseño de la tarea promueve la necesidad de replantearse las hipótesis consideradas para dar solución al problema, rompiendo con prácticas comunes como asumir la continuidad de la función si este no es un dato dado en el problema.

Por ser una tarea de final abierto que se planteará en una dinámica de pequeños grupos con una posterior puesta en común, se promoverá el desarrollo de las habilidades argumentativas de los estudiantes, de trabajo colaborativo y de validación social de las producciones.

Tareas de formular preguntas para identificar un objeto matemático

Por último, presentamos otra categoría de actividades que también se basan en el principio general de atender a similitudes y diferencias. Esta categoría fue presentada en un taller dictado por la Dra. Ochoviet al que asistieron algunas de las profesoras cursillistas, quienes la retomaron para compartir en la discusión grupal generada a partir de la actividad propuesta en el curso de posgrado.

Este tipo de tareas consiste en descubrir un objeto matemático por medio de preguntas que sean respondidas con sí o no. Promueven la visualización matemática en el sentido de Zimmermann y Cunningham (1991), esto es, el proceso de formar imágenes (mentales o con lápiz y papel o con la ayuda de la tecnología) y usar esas imágenes para el descubrimiento y entendimiento matemático. Estas tareas también fomentan el análisis de las propiedades de los objetos matemáticos y su uso, con el objetivo de identificar un objeto matemático dado a través de alguna de sus representaciones (por ejemplo, está dado mediante una figura pero no podemos verla) pero que no es directamente accesible para quien lo tiene que descubrir. Estas tareas permiten profundizar el conocimiento de las propiedades y su rol en la matemática, pues es a través de ellas que se devela el objeto. Para ello, es necesario asociar conceptos con categorías, aspecto que según Zaslavsky (2008) está en el "corazón del aprendizaje" (p. 1). Llevar adelante esta asociación en forma eficaz, requiere identificar similitudes y diferencias entre diferentes objetos según distintos criterios, para poder ir reuniendo un conjunto de propiedades que permitan caracterizar un objeto o bien permitan descartarlo para comenzar a pensar en otro posible. Este tipo de tareas no está considerado en las tareas propuestas por Zaslavsky (2008), por lo que entendemos contribuye a ampliar la categorización de tareas de atención a las similitudes y diferencias propuesta por la autora.

A continuación presentamos un ejemplo de una tarea que requiere formular preguntas para identificar un objeto.

Esta tarea es presentada a través de un juego. Cada estudiante del grupo recibe la representación de una figura geométrica que es colocada en su espalda de forma tal que él desconozca qué figura tiene. El objetivo del juego es que cada estudiante descubra qué figura geométrica tiene pegada en la espalda. Para lograrlo los estudiantes deberán recorrer el salón caminando (que se ha despejado de mesas y sillas) e interactuar con sus compañeros (que sí pueden ver la figura que los otros compañeros llevan en su espalda) formulándoles preguntas con la consigna de que solo pueden ser respondidas con sí o no. Es importante que pregunten a distintos compañeros pues no todos son capaces de ver lo mismo (esto depende del conocimiento y criterio de cada uno), de aquí que ante la misma pregunta, dos compañeros puedan responder distinto.

Esto puede llevar a confusiones por momentos, pero también desafiará al alumno para que este trate de afinar sus preguntas con el objetivo de develar la mayor información fidedigna que le sea posible sobre la figura que tiene pegada en su espalda. Se estipula además en la consigna que cada alumno llevará un registro de las preguntas realizadas y sus respuestas y que se contabilizará la cantidad de preguntas formuladas para descubrir su figura geométrica; esto tiene por objetivo fomentar que las preguntas sean formuladas inteligentemente, esto es, que se considere alguna estrategia para minimizar la cantidad de preguntas y se profundice el conocimiento de las propiedades de la figura geométrica en cuestión. Luego de que todos los alumnos han descubierto su figura, se realiza una puesta en común donde cada alumno debe explicar cuál figura cree que tiene en la espalda y por qué. Esta instancia es sumamente rica para todo el grupo y para el docente porque permite apreciar cómo estos alumnos pusieron en juego su conocimiento de las propiedades y los criterios a los que apelaron para tomar decisiones.

Una variante de esta tarea para ser realizada en equipos consiste en que el docente elige una figura geométrica, aporta alguna información sobre ella que acote la búsqueda (por ejemplo que es un cuadrilátero) e indica a los estudiantes que organizados en equipos de 4 o 5 elaboren una serie de preguntas -que puedan ser respondidas con verdadero o falso- con el propósito de identificar qué figura geométrica seleccionó el docente. En este caso las preguntas no serán respondidas una a una, sino que cada equipo debe planificar toda una serie de preguntas, lo cual promueve que se consideren todas las alternativas posibles en cuanto a qué cuadrilátero se podría haber elegido. Finalmente, se realiza una puesta en común, donde se podrán comparar estrategias y discutir cuáles son las ventajas de una u otra.

Si bien la tarea propuesta no es de final abierto (Zaslavsky, 2005) pues el objeto a develar es dado, hay un punto muy interesante que deseamos plantear y es que lo que es abierto son los conjuntos de preguntas que los alumnos pueden utilizar para descubrir un mismo objeto. Por ejemplo, un estudiante podría diseñar un conjunto de preguntas basado en el paralelismo de los lados opuestos de un cuadrilátero mientras que otro estudiante podría elaborar un conjunto de preguntas basado en las amplitudes de los ángulos opuestos, es decir, series distintas de preguntas. Todas ellas llevan a dar una solución al problema, por lo que son todas ellas conjuntos de preguntas apropiadas para resolver la tarea.

A MANERA DE CIERRE

En este trabajo compartimos tres nuevas categorías, diferentes a las presentadas por Zaslavsky (2008), que surgieron en el contexto de una actividad propuesta en un curso de posgrado y en su posterior discusión grupal. Son tareas enfocadas a considerar similitudes y diferencias entre objetos u otras entidades matemáticas y que Zaslavsky considera fundamentales para promover aprendizajes.

Los ejemplos brindados aportan materiales para repensar nuestras clases de matemática y asimismo plantean la invitación a los docentes y estudiantes de formación docente a emprender el camino creativo que conduzca a nuevas categorías que, en este marco, contribuyan al aprendizaje de nuestros alumnos.

REFERENCIAS

Dalcín, M. y Molfino, V. (2014). *Geometría Euclidiana en la formación de profesores. Exploración inicial del plano.* Montevideo: Ediciones Palíndromo.

Doyle, W. (1983). Academic work. *Review of Educational Research*, 53, 159-199.

Doyle, W. (1988). Work in mathematics classes: The context of students' thinking during instruction. *Educational Psychologist*, 23, 167-180.

Guberman, R. y Leikin, R. (2013). Interesting and difficult mathematical problems: changing teachers' views by employing multiple-solution tasks. *Mathematics Teacher Education*, 16, 33-56.

Hiebert, J. y Wearne, D. (1997). Instructional tasks, classroom discourse and student learning in second grade arithmetic. *American Educational Research Journal, 30*(2), 393–425.

Liljedahl, P., Chernoff. E. y Zazkis, R. (2007). Interweaving mathematics and pedagogy in task design: A tale of one task. *Journal of Mathematics Teacher Education,* 10 (4-6), 239-249.

Polya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas.

Sullivan, P., Clarke, D. y Clarke, B. (2009). Converting mathematics tasks to learning opportunities: An important aspect of knowledge for mathematics teaching. *Mathematics Education Research Journal*, 21 (1), 85-105.

Watson, A. y Mason, J. (2007). Taken-as-shared: a review of common assumptions about mathematical tasks in teacher education. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 10, 205-215.

Zaslavsky, O. (1995). Open-ended tasks as a trigger for mathematics teachers' professional development. *For the Learning of Mathematics*, 15(3), 15-20.

Zaslavsky, O. (2008). Attention to similarities and differences: A fundamental principle for task design and implementation in mathematics education. *Invited presentation at the Topic Study Group (TSG34) on Research and Development on Task Design and Analysis, the 11th International Congress on Mathematics Education* (ICME-11), Monterrey, Mexico. Recuperado desde http://tsg.icme11.org/document/get/290 el 26 de octubre de 2015.

Zimmermann, W. y Cunningham, S. (1991). Editor’s introduction: What is mathematical visualization. En W. Zimmermann y S. Cunningham (Eds.), *Visualization in Teaching and Learning Mathematics* (pp. 1-8). Washington, DC: Mathematical Association of America.

UNA APROXIMACIÓN A LA EVALUACIÓN: EL DISEÑO DE TAREAS

JUAN PABLO ÁLVAREZ, LAURA AYALA, NANCY BARBOZA, SILVANA CAFASSO, ADRIÁN CARREROU, KARINNA CELERY, MARÍA JOSÉ DÍAZ, MICAELA FERAHIAN-OGLI, DANIELA PAGÉS, ELIZABETH SCHEGGIATI, MARÍA CLARA TEIJEIRO, MARÍA NOELIA VILLALBA

Resumen

La evaluación es esencial en la actividad profesional del docente pues le proporciona información acerca de los procesos de enseñanza y de aprendizaje, tanto sobre cada estudiante como en lo colectivo y le permite volver sobre el proceso y eventualmente realizar cambios. En la práctica de evaluación, el diseño de las tareas constituye una parte fundamental, ya que estas evidencian qué aspectos del trabajo de la clase son más valorados por el docente. Presentamos algunos ejemplos de tareas diseñadas para evaluaciones que pretenden mover el foco desde el señalamiento de aciertos y errores hacia una interacción de diálogo con los estudiantes.

Palabras clave: tareas de evaluación, información, aprendizaje.

Abstract

Assessment is essential in teaching profession because it provides information about the teaching and learning processes, about each student and about the group, it also allows teachers to go back to those processes and eventually make changes. Within the practice of assessment, tasks design is a key part as it shows which aspects of class work are more valued by the teacher. We present some examples of assessment tasks that pretend to move the focus from the marking of successes and failures toward a dialogic interaction with students.

Keywords: assessment tasks, information, learning.

INTRODUCCIÓN

Este artículo surge de un trabajo realizado con estudiantes del curso de Didáctica III de la especialidad matemática del Profesorado Semipresencial. Plantea el diseño de tareas de evaluación como escenario para el estudio de la evaluación, ya iniciado en los años anteriores.

Con este foco se planteó a los estudiantes, a partir de la lectura de algunos documentos (Burkhardt, 2007; PROCIENCIA, 1986; Schoenfeld, 2007), el diseño de tareas de evaluación para un tema que estuvieran trabajando en su clase de práctica y su posterior implementación en clase.

A continuación se describen los conceptos principales de los documentos analizados, para situarnos en el marco en el que se diseñaron las tareas de evaluación.

ALGUNOS ELEMENTOS A TENER EN CUENTA EN EL DISEÑO DE TAREAS DE EVALUACIÓN

Los documentos analizados (Burkhardt, 2007; PROCIENCIA, 1986; Schoenfeld, 2007) coinciden en que la evaluación no consiste solo en aplicar pruebas y calificarlas de acuerdo a un puntaje, como se entiende habitualmente. La evaluación, como todo proceso educativo, está impregnada de los intereses y puntos de vista de los diferentes actores involucrados en ella. Por ejemplo, si consideramos las evaluaciones que un docente realiza en su clase, la información y la interpretación de sus resultados no es la misma para el profesor que para los estudiantes o la dirección del liceo.

De los múltiples puntos de vista, aquí tomaremos en cuenta el del docente y el de los estudiantes. En relación a los docentes, tanto Schoenfeld (2007) como Burkhardt (2007) plantean que la evaluación debería ayudar a los profesores a comprender lo que los estudiantes saben, y a planificar nuevas estrategias para que superen las dificultades detectadas. En relación a los estudiantes, establecen que las evaluaciones deberían servirles para determinar lo que saben y lo que no saben, y que las mismas deberían ser y ser sentidas justas por parte de los alumnos.

Burkhardt (2007) plantea que el tipo de evaluación viene delimitado por la consideración de ciertas cuestiones, y la respuesta que se dé a cada una. Entre ellas se encuentran:

- cuál es el objetivo de la evaluación;
- qué actores toman información de ella;
- cuáles aspectos del aprendizaje se valoran más, y por tanto se evalúan;
- cuándo y con qué frecuencia se realiza la evaluación;
- qué consecuencias trae para las diferentes personas involucradas.

En PROCIENCIA (1986) se realiza un análisis similar, y además encontramos una clasificación de los tipos de evaluación, basada en la clase de información que se busca con ella. Así, la evaluación puede ser:

- Diagnóstica: se busca información acerca del nivel inicial de los alumnos. Se propone antes de iniciar el trabajo con un tema, o con el curso, y sus resultados permiten orientar la tarea en cuanto a sus objetivos y forma de trabajo.

- Formativa: se realiza para verificar la marcha del proceso didáctico y poder realizar cambios a la planificación. Se propone durante todo el desarrollo del curso.

- De síntesis: tiene la función de asignar una calificación totalizadora a cada alumno que represente la proporción de los objetivos logrados. Se propone al final de una unidad, de un conjunto de actividades o de un curso. Permite decidir la aprobación del curso o parte considerada del mismo.

Para los autores de PROCIENCIA (1986) la evaluación también puede tener una función motivadora, así como debería resultar una experiencia de aprendizaje, característica que también señalan Burkhardt (2007) y Schoenfeld (2007).

En lo que sigue nos centraremos principalmente en el tipo de tareas que proponen algunos autores, basándose en ciertos principios que entienden debe cumplir la evaluación. Para esto, describiremos el marco que se presenta en Burkhardt (2007), desarrollado por *The Mathematics Assessment Resource Service*, llamado *Framework for Balance*. Este marco amplía, según Burkhardt, lo que se tiene en cuenta al diseñar un test, ya que incluye la dimensión *fases de resolución de problemas*, así como la dimensión *tipos de tareas.* Usualmente solo se procura un balance en la dimensión de contenidos, mientras que el formato suele ser de ejercicios cortos que solo requieren transformación y manipulación. Se trivializa la habilidad para formular un problema y no se evalúan la interpretación, la evaluación crítica y la comunicación de resultados.

Si bien las apreciaciones de este autor se refieren a la educación matemática en Estados Unidos y el Reino Unido, consideramos que las características del diseño de tareas de evaluación que señala están presentes en las que habitualmente se proponen en Uruguay. Por lo tanto consideramos importante señalar estos aspectos y analizarlos críticamente como un paso inicial en el abordaje de esa dimensión de la evaluación: el diseño de las tareas.

Acerca del tipo de tareas, en *A Framework for Balance* se describen como posibles los siguientes tipos: de planificación (los estudiantes deben organizar o planificar cierta actividad a llevar a cabo), problemas no rutinarios (por ejemplo, la generalización de patrones), tareas de evaluación y recomendación (en las que es preciso evaluar entre varias opciones y decidir a favor de una), de representación de información (que implican un cambio de registro de representación), tareas de investigación (dentro o fuera de la matemática), ejercicios técnicos, definición de conceptos.

El foco de la tarea, en tanto, puede estar:

- En la matemática pura: la tarea implica tratar con objetos y estructuras matemáticas de forma directa.
- En la aplicación ilustrativa de la matemática: el foco sigue siendo una idea matemática pero esta se plantea a través de una situación realista o pseudo-realista. Si bien su objetivo es evaluar la comprensión de la matemática, permite evaluar el conocimiento sobre modelos.

- En una actividad de la vida real. El foco de atención está en generar un nuevo conocimiento del mundo fuera de la matemática. Requieren la integración de habilidades matemáticas y no matemáticas. Pueden contener datos insuficientes o superfluos.

Burkhardt (2007) establece que las tareas de evaluación deberían promover que todos los estudiantes que han trabajado responsablemente en un buen curso hagan progresos significativos al realizarlas. Al mismo tiempo que los más capaces se sientan desafiados y que puedan realizar las tareas de evaluación sin la ayuda que se presenta en una tarea de la clase. Para esto plantea la conveniencia de proponer tareas abiertas o exponencialmente graduadas, que permitan aumentar la generalidad, complejidad y/o la abstracción.

A continuación presentamos algunas de las tareas de evaluación diseñadas por los estudiantes de profesorado en el marco de esta actividad.

ALGUNAS TAREAS DE EVALUACIÓN DISEÑADAS

Tarea 1

Organiza tu viaje

Para las vacaciones de verano, tú y tus compañeros han decidido organizar un viaje a algún lugar del Uruguay.

a. Con la ayuda del mapa elijan tres lugares a los que les gustaría viajar.

b. ¿Quiénes realizarán el viaje? ¿Qué medios de transporte pueden llevarlos a cada lugar elegido?

c. Calculen el tiempo que les llevaría llegar a cada destino, contando todas las paradas o desvíos que decidan realizar, y los distintos medios posibles de transporte.

d. ¿Cuánto les costará el transporte para el viaje? ¿Cuánto tendrá que pagar cada uno?

Esta tarea se diseñó para proponerse en un curso de primer año del ciclo básico de educación secundaria. Será la primera tarea a proponer durante el estudio del tema *proporcionalidad* y, a la vez, se utilizará como evaluación diagnóstica. Como se establece en PROCIENCIA (1986), una evaluación puede cumplir varias funciones. Entre ellas, la función *motivadora*, que pensamos tendrá esta situación para los estudiantes. Se enmarca en el tipo *investigaciones abiertas*, ya que la actividad supone que los estudiantes tomen decisiones, se planteen preguntas y las respondan, busquen datos de la vida real y los organicen. Si bien no se trata de una tarea de *matemática pura*, sino que es una *tarea auténtica* de acuerdo al foco, consideramos que permitirá poner en juego aspectos importantes vinculados al concepto de proporcionalidad y de los que se vinculan con él. Al mismo tiempo, los estudiantes mostrarán su grado de desarrollo en habilidades no matemáticas, así como la integración con otras disciplinas. Creemos que el hecho de que los estudiantes tengan que buscar los datos, en lugar de que se los proporcionemos en una tabla, favorecerá el acercamiento a la actividad matemática, por ejemplo, al tener que manipular y organizar esos datos.

La tarea se propone para trabajar en grupos pequeños (no más de tres integrantes), y los estudiantes tendrán que entregar el registro escrito de sus actividades. La evaluación se centra en la actividad surgida de la interacción en los grupos, pues creemos que dicho intercambio hace propicia la recuperación de conceptos y estrategias que en lo individual pueden olvidarse. Las preguntas que los estudiantes realicen en el transcurso de la actividad y las interacciones del docente con ellos, nos permitirán evaluar en forma más personal los conocimientos de cada alumno. Buscamos información que nos permita conocer los conocimientos y estrategias que utilizan los estudiantes en relación a la planificación de unidad que hemos realizado. La información que resulte de la actividad motivará la modificación o no de dicha planificación.

Al inicio de la actividad se les entregará la consigna y un mapa del Uruguay. Se permitirá el uso de computadora y celular para realizar las búsquedas necesarias, así como las operaciones o gráficas que decidieran realizar.

La parte c de la tarea es la central en cuanto a los conocimientos sobre proporcionalidad. Como se pide que los estudiantes consideren diferentes medios posibles de transporte para cada lugar elegido y que para cada uno, con las paradas que decidan realizar, calculen el tiempo del viaje, es posible que los estudiantes decidan recurrir a una tabla para presentar los resultados. Además, es esperable que recurran a la regla de tres, o al uso de la proporcionalidad tanto en el trabajo con escalas en los mapas, como en los cálculos de distancias y tiempos. Otro aspecto que nos proponemos evaluar es si los estudiantes trabajan con técnicas aditivas y de recuento, o si utilizan estrategias multiplicativas, o ambas, en sus razonamientos sobre razones y proporciones (Godino y Batanero, 2002).

Tarea 2

Dado el siguiente sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas:

$$\begin{cases} 3a - b = 9 \\ 4b - 2a = -16 \end{cases}$$

a. Agrega una nueva ecuación al sistema para que el mismo tenga solución única. Representa gráficamente las tres ecuaciones y la solución del sistema.

b. Agrega una ecuación más al sistema original para que no tenga solución.

c. Presenta un nuevo sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, utilizando una de las ecuaciones del sistema original, de forma que el nuevo sistema de ecuaciones tenga infinitas soluciones.

Esta tarea fue diseñada para evaluar el tema *Ecuaciones lineales con dos incógnitas. Sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas.* Está inspirada en los problemas planteados en Ochoviet y Olave (2009).

Podemos decir que es un problema no rutinario y de final abierto (Zaslavsky, 1995), que posibilita a los estudiantes, para resolverlo, tomar sus propias decisiones, poniendo en marcha distintos procedimientos o estrategias. Pensamos que esto otorga confianza a los estudiantes en su proceso de construcción del conocimiento matemático.

Se pretende indagar qué conocimientos ponen en juego los estudiantes para construir sistemas de tres ecuaciones con dos incógnitas teniendo en cuenta su conjunto solución. Está pensada como evaluación de síntesis, luego de haber trabajado el tema en el curso.

Se busca evaluar el trabajo de los estudiantes con las parejas solución y no tanto con los métodos de resolución, de acuerdo a lo planteado por Panizza, Sadovsky y Sessa (1999). De todos modos, el procedimiento y la elección del método más conveniente para la resolución de los sistemas también serán evaluados.

Para poder encontrar la ecuación pedida en la primera parte, los estudiantes necesitan conocer la solución del sistema, aunque no se les pide que utilicen ningún método para ello (podrían incluso resolverlo por ensayo y error). La ecuación que agreguen, para la que tienen infinitas posibilidades, debe tener como solución la del sistema original, y para optar por una tendrán que utilizar el concepto de solución. Podrían agregar una ecuación equivalente a una de las dadas, en cuyo caso no necesitarían conocer la solución. Se agrega el registro gráfico para evaluar la comprensión de la interpretación gráfica de las ecuaciones y de la solución del sistema.

La segunda parte implica que los estudiantes consideren ecuaciones que han desechado en la parte anterior. De alguna forma, aparece aquí el objeto ecuación y una clasificación de las ecuaciones (no solo de los sistemas) en el sentido de poseer o no determinada solución.

En la parte c de esta tarea también se pide la construcción de un sistema a partir de la solución, pero en este caso el foco está puesto en el hecho de que dos ecuaciones tienen el mismo conjunto solución si y solo si son equivalentes.

Tarea 3

a. En GeoGebra y usando el deslizador p, representa la función de expresión:

$$k(x) = \frac{x+2}{x+p}$$

b. Modifica el valor de p en el deslizador y anota tres diferencias y tres similitudes que encuentres entre las diferentes gráficas que obtienes.

Esta tarea es del tipo de atención a similitudes y diferencias (Zaslavsky, 2008) y podemos considerarla un problema no rutinario en cuanto a los tipos de actividades de evaluación descritas anteriormente. Al buscar similitudes, los estudiantes estarán considerando patrones que pueden permitirles generalizaciones. Y al encontrar diferencias entre las gráficas y por tanto entre las funciones que los definen, estarán clasificando el objeto *función racional*, aunque de forma particular, en base a determinados criterios. Se apela además a la creatividad del alumno, que deberá tomar sus propias iniciativas, para luego poder realizar la tarea.

Consideramos que el planteo inicial de la tarea en el registro gráfico, permitirá a los estudiantes analizar ciertas propiedades desde un enfoque inicialmente visual, así como las características de las curvas representadas. Entre ellas, pensamos que pueden usar como criterio clasificador su simetría (respecto al eje y al origen), las coordenadas de los puntos de corte de la gráfica con los ejes coordenados, o los intervalos donde la función es creciente, decreciente o constante. Pueden analizar si el signo de las imágenes se mantiene, si cambia la concavidad, el crecimiento, si alguna asíntota queda fija o si siempre varían. Esta búsqueda les permitirá volver sobre los conceptos estudiados.

La tarea está pensada como una evaluación formativa y se realizará durante parte de una clase. Se propondrá para trabajar en parejas usando GeoGebra, cada pareja entregará al profesor un archivo con sus producciones en este *software* y un informe escrito con las similitudes y diferencias encontradas. La tarea será propuesta luego de haber trabajado varios ejemplos de funciones racionales y su comportamiento, y de haber introducido los conceptos de dominio, ceros, asíntotas, tanto en el registro analítico como tabular y gráfico, con papel y lápiz y también usando GeoGebra. Con esta tarea se pretende evaluar en qué grado los estudiantes han integrado los conceptos estudiados, así como la forma en que las variaciones analíticas producen cambios en la gráfica y viceversa. Usaremos la información que nos reporte esta evaluación en la segunda parte de la unidad, en la que abordaremos la resolución de ecuaciones racionales. Se tendrá oportunidad de volver sobre los conceptos vistos al estudiar las funciones.

REFLEXIONES FINALES

En este trabajo hemos puesto la mirada en la evaluación como parte inseparable del proceso educativo y componente fundamental de su desarrollo, concibiéndola como fuente de información para las decisiones a tomar por el docente en ese proceso.

Volvamos sobre una de las preguntas formuladas por Burkhardt (2007) en relación a la evaluación: "¿Qué aspectos del desempeño matemático son importantes y deberían ser evaluados?" (p. 77). En relación a esto, el autor sostiene que las tareas específicas de evaluación muestran la intención vinculada a dicha pregunta, ya que un mismo conocimiento puede evaluarse con tareas muy diversas y el tipo de tarea permite conocer cuáles son los aspectos valorados por quien la diseña.

Durante el tiempo de trabajar un tema en la clase se realizan diferentes actividades. El docente plantea problemas, da explicaciones, realiza preguntas. Los estudiantes resuelven problemas, estudian en un texto, analizan enunciados. En el momento de proponer una evaluación, el docente pone en juego, conscientemente o no, aquellos aspectos que valora del conocimiento matemático y de las metacogniciones vinculadas con él. Ellos impregnan las tareas diseñadas.

Pensamos que las tareas que aquí se presentan, que pueden integrar una evaluación diagnóstica, formativa o de síntesis, incorporan elementos que deben valorarse en relación al aprendizaje de la matemática. Usualmente no son tenidos en cuenta en las actividades de evaluación. Entre ellos, la posibilidad de movilizar distintos recursos y estrategias por parte de los estudiantes y, aún más, la habilitación a dar diferentes respuestas, igualmente correctas. Es claro que para usar este tipo de tareas para evaluar el aprendizaje de cierto tema, es necesario que en el desarrollo del mismo se trabaje de manera similar, es decir, que se valoren de forma balanceada los conocimientos y los procesos matemáticos, que se promuevan prácticas como establecer conjeturas, cuestionar las afirmaciones de los demás y las propias, y fundamentar lo que se afirma. Si bien en este trabajo no hemos abordado los posibles criterios de calificación de las tareas al momento de implementarlas, pensamos que el carácter abierto de las mismas puede modificar la habitual práctica de evaluación consistente en solo poner cruces y tildes, o calificar como “correcto” o “incorrecto” el trabajo de nuestros estudiantes. Creemos que es imprescindible establecer una interacción de diálogo con ellos, también en el momento de evaluarlos, sobre todo en lo que respecta a la devolución que realizamos de la evaluación.

Finalmente, tomando el punto de vista de los estudiantes, creemos que las tareas propuestas permiten que la instancia de evaluación también lo sea de aprendizaje.

REFERENCIAS

Burkhardt, H. (2007). Mathematical Proficiency: What is important? How can it be measured? En A. H. Schoenfeld (Ed.), *Assessing Mathematical Proficiency* (Vol. 53, pp. 77-98). Universidad de California, Berkeley: Mathematical Sciences Research Institute Publications.

Godino, J. y Batanero, C. (2002). *Proporcionalidad y su didáctica para maestros.* Departamento de Didáctica de las Matemáticas Universidad de Granada. Recuperado desde http://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros el 26 de octubre de 2015.

Ochoviet, C. y Olave, M. (2009). *Matemática 3*. Montevideo: Santillana.

Panizza, M., Sadovsky, P. y Sessa, C. (1999). La ecuación lineal con dos variables: entre la unicidad y el infinito. *Enseñanza de las ciencias, 17 (3)*, 453-461.

PROCIENCIA (1986). *Matemática. Metodología de su enseñanza. Estructura Modular 1*. Buenos Aires: Conicet.

Schoenfeld, A.H. (2007). Issues and Tensions in the Assessment of Mathematical Proficiency. En A. H. Schoenfeld (Ed.), *Assessing Mathematical Proficiency* (Vol. 53, pp. 3-16). Universidad de California, Berkeley: Mathematical Sciences Research Institute Publications.

Zaslavsky, O. (1995). Open-ended tasks as a trigger for mathematics teachers' professional development. *For the Learning of Mathematics*, 15(3), 15-20.

Zaslavsky, O. (2008). Attention to similarities and differences: A fundamental principle for task design and implementation in mathematics education. *Invited presentation at the Topic Study Group (TSG34) on Research and Development on Task Design and Analysis, the 11th International Congress on Mathematics Education* (ICME-11), Monterrey, México. Recuperado desde http://tsg.icme11.org/document/get/290 el 26 de octubre de 2015.

DISEÑO DE TAREAS DE APRENDIZAJE CON EL MODELO 3 UV

ANDRÉS DE ACEVEDO, CRISTINA OCHOVIET, DANIEL TORRES

Resumen

Presentamos el diseño de tres tareas que involucran el uso del álgebra a nivel de segundo año de enseñanza secundaria. Se utilizó como marco el Modelo 3UV. A su vez, cada una de las tareas es planteada en el contexto de una historia.

Palabras clave: diseño de tareas, álgebra, uso de historias, enseñanza secundaria

Abstract

We present the design of three tasks that involve the use of algebra at the second year of the secondary school. The 3UV Model was used as a framework. In turn, each of the tasks is raised in the context of a story.

Keywords: task design, algebra, storytelling, secondary school

INTRODUCCIÓN

En este trabajo presentamos un conjunto de tareas diseñadas en base al Modelo 3UV (Trigueros y Ursini, 2003; Ursini y Trigueros, 2006). Analizamos cada una de ellas para evidenciar qué estrategias podrían emplear los alumnos para abordarlas y a ello sumamos los aspectos de la variable que entran en juego de acuerdo al modelo que da marco a la propuesta.

Las tareas atraviesan el trabajo con ecuaciones, con patrones y con funciones pensando en un segundo año de enseñanza secundaria. Se buscó que en ellas entraran en juego los distintos aspectos de la variable reseñados en el modelo marco. Además, son planteadas a través de historias (Zazkis y Liljedahl, 2009; Cho y Hong, 2015)

MARCO TEÓRICO

El marco teórico a utilizar es el Modelo 3UV (tres usos de la variable) (Trigueros y Ursini, 2003; Ursini y Trigueros, 2006). En dicho modelo las autoras señalan que en la enseñanza del álgebra elemental, los aspectos más usados del concepto de variable son: como una *incógnita*, como un *número genérico* y como variables en una *relación funciona*l.

Según Trigueros y Ursini (2003) a la variable como *incógnita* podemos verla representada como una incógnita en una situación particular o en una ecuación. El símbolo mediante el cual se representa es simplemente como el de una incógnita en una ecuación. Para comprender este uso de la variable es necesario reconocer la presencia de algo desconocido que puede ser determinado usando la información que tenemos disponible en el problema planteado. Por otra parte, es necesario también ser capaz de representar entidades desconocidas en forma simbólica y de plantear expresiones algebraicas que describan las relaciones existentes entre los datos del problema. Estos datos estarían relacionados a través de ecuaciones que el estudiante deberá ser capaz de manipular algebraicamente para encontrar los valores de la incógnita y verificar que son correctos realizando la sustitución correspondiente.

Ursini y Trigueros (2006) consideran que para resolver problemas que involucran a la variable como incógnita es necesario:

> I1 Reconocer e identificar en una situación problemática la presencia de algo desconocido que puede ser determinado considerando las restricciones del problema.
>
> I2 Interpretar los símbolos que aparecen en una ecuación como la representación de valores específicos.
>
> I3 Sustituir la variable por el valor o los valores que hacen de la ecuación un enunciado verdadero.
>
> I4 Determinar la cantidad desconocida que aparece en ecuaciones o problemas, realizando las operaciones algebraicas o aritméticas.
>
> I5 Simbolizar las cantidades desconocidas identificadas en una situación específica y utilizarlas para plantear ecuaciones. (p. 7)

Trigueros y Ursini (2003) afirman que a la variable como *número genérico* podemos verla representada en métodos generales o reglas que se deducen de patrones numéricos, geométricos o de familias de problemas similares. La podemos interpretar en símbolos como una generalización en expresiones algebraicas o en la expresión de métodos generales. Para comprender este uso de la variable es necesario poseer habilidad para reconocer patrones y encontrar o deducir reglas generales. Además resulta fundamental poder distinguir los aspectos invariantes de los que son variables. Una habilidad fundamental consiste en ser capaz de introducir símbolos para representar proposiciones generales, reconocer un símbolo como representando un objeto indeterminado y manipular expresiones (desarrollar, factorizar, etc.).

Ursini y Trigueros (2006) consideran que para resolver problemas que involucran a la variable como número genérico es necesario:

> *G1* Reconocer patrones, percibir reglas y métodos en secuencias y en familias de problemas.
>
> *G2* Interpretar un símbolo como la representación de una entidad general indeterminada que puede asumir cualquier valor.
>
> *G3* Deducir reglas y métodos generales en secuencias y familias de problemas.
>
> *G4* Manipular (simplificar, desarrollar) la variable simbólica.
>
> *G5* Simbolizar enunciados, reglas o métodos generales. (pp. 7-8)

Para entender a las variables en una *relación funcional*, Trigueros y Ursini (2003) destacan la necesidad de reconocer situaciones donde esté presente la correspondencia entre variables y la variación. La información puede provenir de diferentes registros como tablas, gráficas, expresiones analíticas o el lenguaje verbal. En cada uno de estos tipos diferentes de registro el estudiante debe ser capaz de reconocer correspondencias entre variables y reconocer cómo la variación en una de ellas incide en la otra. Reconocer una relación significa ver que cada variable puede tomar diferentes valores dependiendo del intervalo en que la relación está definida. La habilidad de los estudiantes a la hora de determinar la correspondencia entre las variables se refleja en la habilidad de calcular imágenes y preimágenes. Como al calcular preimágenes necesitamos plantear ecuaciones, vemos cómo las diferentes concepciones de la variable están entrelazadas entre sí.

Por otra parte, la habilidad de trabajar con variación se puede observar en la capacidad del alumno a la hora de determinar intervalos o al estudiar el crecimiento de una función, su signo, sus extremos relativos, etc.

Para resolver problemas que involucren a la variable en una relación funcional, Ursini y Trigueros (2006) consideran que es necesario:

> *F1* Reconocer la correspondencia entre variables relacionadas, independientemente de la representación utilizada (tablas, gráficas, problemas verbales, expresiones analíticas).
> *F2* Determinar los valores de la variable dependiente, dados los valores de la independiente.
> *F3* Determinar los valores de la variable independiente, dados los valores de la dependiente.
> *F4* Reconocer la variación conjunta de las variables involucradas en una relación funcional, independientemente de la representación utilizada (tablas, gráficas, problemas verbales, expresiones analíticas).
> *F5* Determinar los intervalos de variación de una de las variables, dado el intervalo de variación de la otra.
> *F6* Simbolizar una relación funcional, basados en el análisis de los datos de un problema. (p. 8)

FUNDAMENTACIÓN DE LA UTILIZACIÓN DEL MODELO 3 UV

Ursini y Trigueros (2006) sostienen que un estudiante alcanza un pensamiento algebraico maduro solo cuando es capaz de usar la variable de manera flexible (es decir, cuando son capaces de comprender los tres usos de la variable y transitar entre ellos). Sin embargo, son conscientes de que el concepto de variable es difícil, y por tanto se proponen investigar si los estudiantes logran alcanzar esta comprensión a medida que progresan en el estudio de las matemáticas universitarias o no.

Los resultados de la investigación concluyen que conforme los estudiantes progresan en los cursos de matemática avanzada, su pensamiento algebraico no se desarrolla como se podría esperar. En problemas sencillos, independientemente del nivel escolar de los estudiantes, estos son capaces de integrar los diferentes usos de la variable. El problema radica en actividades ligeramente más complicadas, en las cuales intervienen parámetros o requieren de la simbolización de una expresión: son muchos los estudiantes que estando en secundaria o al iniciar sus cursos universitarios, recurren a procedimientos aritméticos en lugar de utilizar el álgebra. Y más preocupante es aún que los problemas considerados complejos resulten un reto prácticamente insuperable para casi todos los estudiantes independientemente de su nivel escolar.

Esto genera un gran problema ya que esa falta de habilidades algebraicas básicas no es tenida en cuenta en el nivel terciario y los cursos de matemática que se dictan en los cursos universitarios necesitan de un pensamiento algebraico maduro que incorpore una buena comprensión de la variable y la habilidad de usar sus diferentes facetas.

Como solución a esta problemática, las autoras proponen que en todos los niveles escolares debería considerarse la inclusión de problemas en los que aparezcan los tres usos de la variable de manera integrada. Además, afirman que es necesario que el aprendizaje haga referencia a contextos diversos en vista de que fuera del contexto de la clase, los estudiantes no son capaces de establecer las asociaciones necesarias para utilizar su pensamiento algebraico. También mencionan la importancia de que los alumnos comprendan los conceptos en profundidad de modo tal que sean capaces de comprender las posibilidades que estos les brindan y sus limitaciones. Para Ursini y Trigueros (2006) esta problemática reside, en parte, en que tanto los programas de estudio como los textos escolares no enfatizan en la integración de los distintos usos de la variable y sostienen que este debería ser un aspecto a ser atendido, si se desea mejorar la enseñanza del álgebra.

DISEÑO DE TAREAS CON EL MODELO 3 UV

A continuación presentamos tres tareas y su análisis. Si bien el Modelo 3 UV guió el diseño para explicar los usos de la variable que intervienen en cada tarea, también se recurrió al uso de historias como recurso didáctico (Zazkis y Liljedahl, 2009; Cho y Hong, 2015).

¡De vacaciones!

Una clase de liceo decide realizar un paseo de fin de año. El papá de uno de los alumnos acepta llevarlos en su ómnibus y que ellos definan el destino. Lo único que ese papá pide a los estudiantes es que ellos se encarguen de poner al ómnibus la cantidad de combustible necesario *en función de la distancia que quieran recorrer. Cada cinco kilómetros recorridos el ómnibus gasta un litro de combustible.*

1. A Matías le gustaría viajar a Rivera y sabe que queda a una distancia de 420 kilómetros. ¿Cuánto combustible necesitarán para viajar?

2. Romina propone visitar Rocha y sabe que para llegar precisan de 42 litros de combustible. ¿Cuál es la distancia que quiere recorrer?

3. Sabiendo que se gastan entre 70 y 90 litros de combustible, ¿qué rango de distancias pueden recorrer?

Análisis de la tarea empleando el modelo 3UV

1. En una primera instancia el estudiante debe ser capaz de reconocer la correspondencia existente entre la cantidad de kilómetros que se desean recorrer y la cantidad de combustible que se utilizará para ese viaje (F1). Además, deberá reconocer que se encuentra frente a un problema en el que tiene que determinar una cantidad desconocida de litros de combustible (I1). Luego, para responder la pregunta, deberá determinar el valor que toma la variable dependiente (cantidad de litros de combustible) dado el valor de la variable independiente (cantidad de kilómetros recorridos) (F2). Luego el estudiante puede dividir la cantidad de kilómetros entre cinco y obtendrá la cantidad de litros de combustible que es necesaria para el viaje (F2, I4).

2. El estudiante deberá reconocer la correspondencia existente entre la cantidad de kilómetros a recorrer y la cantidad de litros de combustible (F1). Luego, se espera que el estudiante determine el valor de la variable independiente dado el valor de la variable dependiente (F3). Para ello el

estudiante debe reconocer la presencia de algo desconocido que puede ser determinado (I1) y después determinar la cantidad de kilómetros conociendo la cantidad de litros de combustible, multiplicando esta cantidad por cinco (F3, I4).

3. Para responder esta pregunta primero se debe reconocer la correspondencia entre las variables relacionadas (F1). También es necesario que se observe la variación conjunta de las variables involucradas (F4). Posteriormente, se requiere determinar el rango de una variable conociendo el rango de la otra variable (F5). Para ello, el estudiante debe determinar el valor de la variable independiente dado el valor de la variable dependiente (F3); debe reconocer la presencia de algo desconocido que puede ser determinado (I1) y después determinar la cantidad de kilómetros conociendo los litros de combustible, multiplicando cada cantidad dada por cinco para obtener los extremos del intervalo de variación (F3, I4).

Las cercas de Pueblo Pequeño

Tom Cercador ha construido todas las cercas de madera de pueblo Pequeño.

Para construir una cerca, Tom comienza colocando dos postes de madera separados a una distancia de un metro y luego une ambos postes con tres tablas de madera. Para continuar la cerca coloca otro poste a un metro de distancia de uno de los postes verticales anteriores y luego los conecta mediante tres tablas. Así continua hasta terminar la cerca.

Como todo habitante de pueblo Pequeño, Tom tenía sus manías. Un día la señora Balde le pidió a Tom que construyera la cerca de su casa. Pero eso sí, quería que Tom usara cuatro tablones horizontales en lugar de tres, a lo que Tom contestó:

-Así no es como se hace una buena cerca, las buenas cercas tienen tres tablones horizontales en lugar de cuatro.

Y si un día visitan pueblo Pequeño van a ver que la casa de la señora Balde está rodeada de una cerca de postes unidos por tres tablones y no cuatro.

1. Si Tom tiene que construir una cerca de 3 metros, ¿cuántas piezas de madera (entre postes y tablones) necesita? ¿Y si la cerca fuese de 4 metros de largo?

2. Un día, charlando sobre Tom, el señor Pico le dijo al señor Pala:

-El otro día le consulté a Tom si podía construir una cerca de 53 metros de largo. ¿Sabe qué fue lo que me contestó de forma inmediata?

-No sé, yo una vez le pregunté si me podía construir una cerca de 6,5 metros y me dijo que solo construía cercas con largo natural.

Naturalmente no tengo ni idea de lo que me quiso decir. Pero a usted, ¿qué le contestó?

-Que iba a necesitar 213 piezas de madera. Luego le dije otro largo y me contestó cuántas piezas y así como cinco veces. Cuando le pregunté cómo calculaba la cantidad de piezas de madera que iba a necesitar conociendo el largo de la cerca, me miró muy misterioso y me dijo: "Eso es un secreto profesional".

¿Puedes ayudar al señor Pico y al señor Pala a descubrir el secreto profesional de Tom? En primer lugar, verifica que una cerca de 53 metros de largo efectivamente requiere de 213 piezas de madera.

3. Tom utilizó 805 piezas de madera en la construcción de una cerca. ¿Cuántos metros tiene la cerca?

4. El señor Pico de Loro, uno de los extraños vecinos de pueblo Pequeño, le dijo al señor Pala:

-Tom Cercador me construyó una cerca utilizando 311 piezas de madera.

El señor Pala luego de unos segundos sacudió la cabeza y le dijo:

-Usted se equivoca señor Pico de Loro.

¿Cómo sabe el señor Pala que el señor Pico de Loro está equivocado?

5. La cerca de la casa de Tom está formada por 485 piezas de madera. ¿Cuántos tablones tiene? ¿Y postes?

Análisis de la tarea empleando el modelo 3UV

1. Esta parte del problema es un preámbulo de la parte 2. Tiene por objetivo que los alumnos observen el patrón existente en la construcción

de la cerca (G1). Aún así, ya en esta primera pregunta el estudiante se enfrenta a una situación problemática en la que debe reconocer la presencia de algo desconocido (número de piezas de madera utilizados) que puede ser calculado a partir del enunciado del problema (I1).

2. El estudiante deberá deducir el patrón existente en la construcción de la cerca (G1) y de la relación existente entre la cantidad de metros de la misma y las piezas de madera necesarias para su construcción (F1). Luego deberá plasmar mediante una expresión el patrón encontrado (el secreto profesional de Tom) (G5), para ello deberá emplear un símbolo que represente la cantidad de metros de la cerca (G2). A continuación se pide verificar la validez de los datos dados. Para ello, el alumno deberá interpretar la relación existente entre los 53 metros de la cerca y las 213 piezas de madera empleadas (F1). En la expresión hallada debe realizar la sustitución de la variable por la cantidad de metros brindados (I3) y mediante la realización de las operaciones planteadas verificar que la cantidad de piezas necesarias es efectivamente la dada (F2, I4).

3. El alumno ya ha trabajado en la parte 2 y ha deducido el patrón existente en la construcción de la cerca (G1) y de la relación existente entre la cantidad de metros de la misma y las piezas de madera necesarias para su construcción (F1). Ahora, el estudiante debe hacer uso de esa relación entre la cantidad de piezas de madera y el largo de la cerca para luego plantear la ecuación $4n + 1 = 805$ (I5). Debe manipular la ecuación anterior para obtener el valor de incógnita $n = 201$ (F3, I4) y asociar el valor obtenido con la cantidad de metros que tiene la cerca de largo (I2).

Las partes 4 y 5 repetirán esta secuencia en un principio, pero luego será necesario que el alumno emplee otras habilidades. Por ello, se vuelven a describir los pasos anteriores para mayor claridad.

4. Esta parte del ejercicio requiere que el alumno se dé cuenta de que el dato brindado es la cantidad de piezas de madera y que esta cantidad depende de los metros que tenga la cerca de largo (F1). En segundo lugar debe plantear la ecuación $4n + 1 = 311$ (I5).

Luego deberá manipular la ecuación para obtener el valor de la incógnita y asociarlo con la cantidad de metros (F3, I4). A continuación se requiere asociar el valor hallado con la cantidad de metros de la cerca (I2) pero el estudiante debe advertir que por las restricciones que el problema le asigna a la variable independiente (la cantidad de metros que puede tener la cerca es un número natural), es imposible que la cerca mida 77,5 metros. Debe relacionar esta información con que los datos dados por el personaje son falsos. Esto es, ninguna de las cercas construidas por Tom utiliza 311 piezas de madera (F5).

5. En primer lugar el alumno debe reconocer la relación entre la cantidad de piezas de madera y el largo de la cerca (en metros) (F1). Luego debe plantear la ecuación empleando el dato dado sobre la cantidad de piezas de madera: $4n + 1 = 485$ (I5) y manipular la ecuación hasta obtener el valor de la variable, $n = 121$ (F3, I4). A continuación se requiere asociar el valor hallado $n = 121$ con la cantidad de metros de la cerca (I2). Para averiguar cuántos tablones tiene la cerca el alumno deberá plantearse cómo se presentan los tablones y cuál es su relación con el largo de la cerca (G1, G5, F1). Luego, debe sustituir el valor

obtenido previamente $n = 121$ en la expresión hallada para obtener la cantidad de tablones, realizando las operaciones planteadas (F2, I4). Para determinar la cantidad de postes puede seguirse la misma secuencia que para responder la pregunta anterior. Otra manera consiste en emplear la relación entre el dato dado (485 piezas de madera) y el dato obtenido en la pregunta anterior (363 tablones) para hallar la cantidad de postes de madera: 485 - 363 = 122, para ello el alumno tuvo que haber razonado que la cantidad de piezas de la cerca es igual a la suma de la cantidad de postes y tablas, y luego manipular esta relación para obtener la cantidad de postes (I4).

El juego de Alejo

Alejo prende la computadora (consultando el reloj confirma sus sospechas: en menos de una hora la cena va a estar lista) y comienza a jugar a uno de sus juegos favoritos, en él interpreta al guerrero Morg, El Poderoso. Para aumentar el poder de su personaje decide comprarle una espada mágica que vale 1780 monedas de oro (que se abrevia mo), como las monedas que tiene su personaje no le alcanzan se fija en el listado de misiones disponibles...

En primer lugar ayuda a los habitantes de un pequeño pueblo que estaba siendo atacado por un gran dragón. Al vencer a la bestia encuentra en su guarida 702 mo. No está mal, piensa Alejo, que ve que tardó 15 minutos en cumplir la misión.

Contento, Alejo sigue las indicaciones del juego que le señalan volver al pueblo. Al hacerlo el Alcalde del lugar lo convence de que done un *tercio de todas las monedas de Morg (las que tenía y las que encontró) para la restauración del pueblo. No tan contento, Alejo mira su reloj, han pasado veinte minutos desde que comenzó a jugar.*

Luego, Alejo guía fuera del pueblo a Morg que llega a una gran ciudad que sufre una invasión de ratas del tamaño de un perro grande. El rey de la ciudad ofrece una recompensa de 1490 mo al que derrote a las ratas. Alejo, decidido a que Morg cumpla la misión, recorre con su personaje toda la ciudad persiguiendo a los roedores súper desarrollados y cuando no quedan más ratas, el Rey le da la recompensa prometida. Alejo mira el reloj, van cuarenta y tres minutos de juego, del comedor se sienten los preparativos para la cena.

Comprobando que tiene monedas de sobra para comprar la espada, Alejo decide, antes de regresar a la ciudad donde inició la partida, comprarle a Morg dos pociones de curar que valen 50 mo cada una. Cuarenta y cinco minutos de juego y contando.

Por suerte para Alejo, Morg no se encuentra con ningún peligro en el camino de retorno. Al llegar a donde venden la espada mágica (van cincuenta minutos de juego) la compra sin pensarlo dos veces y comprueba en su inventario que le quedan 112 mo. Ve que en la tienda ahora venden un escudo mágico que vale 4000 mo, pero eso queda para otro día, la cena esta lista.

1. Al día siguiente Alejo le cuenta las peripecias de Morg a su mejor amigo Juan:

Alejo: - … compré la espada y me sobraron 112 mo.

Juan: - Muchos problemas para comprar la espada mágica. ¿Cuántas monedas tenías al comenzar el juego?

Alejo intenta hacer memoria pero no logra acordarse. ¿Puedes ayudar a Alejo a determinar la cantidad de monedas que tenía al comenzar a jugar? Realiza la verificación del dato hallado.

2. Realiza una gráfica que indique cuántas monedas tenía Morg desde que Alejo comienza a jugar hasta el minuto cincuenta y tres en que graba la partida y cierra el programa para ir a cenar.

3. Diseña una historia en la que exista un dato desconocido que el lector debe averiguar y que para ello tenga que usar la siguiente ecuación: $2(x + 135) = 1046$.

Análisis de la tarea empleando el modelo 3UV

1. En primer lugar el alumno deberá darse cuenta que el dato faltante puede obtenerse a partir de los datos brindados en el problema (I1), una vez que esto ocurra deberá comenzar la traducción del problema del lenguaje coloquial al lenguaje simbólico (I5) reconociendo que la incógnita presente es un valor específico (la cantidad de monedas iniciales) (I2). Una vez obtenida una expresión algebraica esta deberá ser manipulada para así poder encontrar el valor de la incógnita (I4). Luego de encontrar la cantidad de monedas iniciales de Morg, el alumno deberá realizar la verificación del valor encontrado sustituyéndolo en la ecuación original (I3).

2. El alumno deberá reconocer la correspondencia entre las variables relacionadas (la variable independiente que es el tiempo de juego y la variable dependiente que es la cantidad de monedas) (F1).
Para cada lapso de tiempo el alumno deberá emplear los datos dados en el enunciado y la cantidad de monedas halladas en la parte 1 para calcular la cantidad de monedas en cada momento (I4). El reconocimiento de los lapsos de tiempo donde la cantidad de monedas permanece constante es esencial para la construcción de la gráfica solicitada (F5).

3. En esta parte del problema el alumno deberá interpretar las operaciones y los valores numéricos que aparecen en la ecuación dada $2(x + 135) = 1046$ para dotarlos de un significado en el marco de la situación que piensa plantear (I1, I2, Inverso a I5).

Es muy factible que el alumno resuelva la ecuación para hallar el valor de la incógnita (I4).

REFLEXIONES FINALES

El Modelo 3UV es una herramienta muy valiosa para los docentes al momento de diseñar tareas para el aprendizaje del álgebra. El marco guía el desarrollo del diseño permitiendo, mediante un análisis sistemático, que los distintos usos de la variable se hagan presentes y que aparezcan interrelacionados en las diferentes situaciones.

Esperamos haber contribuido a la comprensión del marco y a su uso para el diseño y análisis de tareas que involucran a la variable.

REFERENCIAS

Cho, Y. y Hong, S. (2015). Mathematical intuition and storytelling for meaningful learning. En K. Y. T. Lim (Ed.), *Disciplinary intuitions and the design of learning environments* (pp. 155–168). Singapore: Springer.

Trigueros, M. y Ursini, S. (2003). First-year undergraduates' difficulties in working with different uses of variable. En A. Selden, E. Dubinsky, G. Harel y F. Hitt (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education V. CBMS Issues in Mathematics Education* (Vol. 12, pp. 1-29). Providence, RI: American Mathematical Society.

Ursini, S. y Trigueros, M. (2006). ¿Mejora la comprensión del concepto de variable cuando los estudiantes cursan matemáticas avanzadas? *Educación Matemática*, 18 (3), 5-38.

Zazkis, R y Liljedahl, P. (2009). *Teaching Mathematics as Storytelling*. Rotterdam: Sense Publishers.

MÁS ALLÁ DE LA CONCAVIDAD: UN ESTUDIO SOBRE EL VALOR NUMÉRICO DE LA DERIVADA SEGUNDA

ANA CLARA DÍAZ, VERÓNICA MOLFINO

Resumen

Las relaciones entre los aspectos gráfico y numérico de la derivada primera son ampliamente estudiadas en educación media y en el nivel terciario. No sucede lo mismo con la derivada segunda, dichas relaciones son poco abordadas y prácticamente desconocidas por la mayoría de los estudiantes de enseñanza media. En este artículo presentamos un estudio llevado a cabo en el año 2014 con estudiantes de profesorado de matemática. La motivación fue tanto indagar sus conocimientos e impresiones sobre estas relaciones gráficas y numéricas en torno al valor numérico de la función derivada segunda, como promover nuevos significados al respecto. Se procuró poner en juego el pensamiento y lenguaje variacional de los estudiantes mediante la realización de distintas actividades, y la elaboración y puesta a prueba de una conjetura. La perspectiva socioepistemológica y el desarrollo teórico propuesto por Tall y Vinner son el marco en el cual analizamos los resultados obtenidos.

Palabras clave: análisis, derivada segunda, pensamiento y lenguaje variacional, imagen y definición del concepto.

Abstract

The relationships between graphic and numeric aspects of the first derivative are widely considered in secondary and third level courses. Not so with the second derivative, these relationships are poorly addressed and nearly unknown to most high school students.

In this paper we present a study conducted in 2014 with mathematics pre-service teachers. The motivation was to investigate both their knowledge and views on these graphs and numerical relationships around the numerical value of the second derivative function, such as promoting new meanings about it. Efforts were made to bring into play the students variational thought and language by conducting different activities and the development and testing of an hypothesis. The socioepistemological perspective and the theoretical development proposed by Tall and Vinner are the framework we use to analyze the results.

Keywords: calculus, second derivative, variational thought and language, concept image and concept definition.

INTRODUCCIÓN

Este estudio, realizado en el marco de la asignatura Análisis del Discurso Matemático Escolar[1] (correspondiente al último año del profesorado de matemática del Consejo de Formación en Educación y cursada en el Instituto de Profesores Artigas (IPA)), surge motivado por la lectura de los documentos Procesos de resignificación del valor numérico de la función derivada segunda: un estudio en el sistema escolar uruguayo (Testa, 2006) y Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis (Cantoral y Farfán, 1998). El objetivo propuesto consiste, a grandes rasgos, en indagar sobre el significado gráfico que los estudiantes de profesorado de matemática del Instituto de Profesores Artigas le otorgan al valor numérico de la función derivada segunda, a partir de actividades que promuevan la reflexión sobre su influencia en la "forma" de la gráfica.

Proponemos ampliar el abordaje tradicional de la derivada segunda (que pone atención únicamente a su signo y a su relación con la

[1] Trabajo realizado por Ana Clara Díaz, María José Díaz y Leticia Elichirigoity, con la orientación de la profesora Verónica Molfino, año 2014.

concavidad de la función original) proponiendo actividades que permitan la obtención y puesta a prueba de una conjetura relativa a un posible significado gráfico que se le puede otorgar al valor numérico de la derivada segunda. Buscamos de esa manera promover nuevas relaciones entre los aspectos gráficos y numéricos de la función derivada segunda así como con los de la función original y su derivada primera y construir nuevos significados sobre tales relaciones. La utilización de herramientas informáticas (GeoGebra) resulta fundamental al momento de validar o refutar la conjetura y nos permitirá evidenciar que hay más en juego que únicamente la concavidad al momento de construir significados para la función derivada segunda.

ANTECEDENTES

Nuestro principal antecedente lo constituye el trabajo de Testa (2006), producto de su investigación en el marco de una maestría en Matemática Educativa. En él, se propone investigar:

> Cuál es el significado gráfico que asignan los estudiantes al valor numérico de la función derivada segunda, cuál es el papel que juegan las definiciones del concepto, y/o la imagen del concepto, al enfrentarse a actividades que ponen en juego el valor numérico de la función derivada segunda y cómo influye su Pensamiento y Lenguaje Variacional (PLV) al trabajar en dichas actividades. (Testa, 2006, p. 160)

Según la autora, el discurso matemático escolar (dme) tradicional en torno al concepto de derivada fomenta un tratamiento meramente instrumental. El principal objetivo es que la derivada sea una herramienta para poder representar funciones gráficamente. Como consecuencia, existe un abordaje del concepto que no fomenta otras perspectivas. No se pone en juego el Pensamiento y Lenguaje Variacional (PLV) del estudiante ni el valor numérico de la derivada segunda. Tampoco se fomenta la interpretación gráfica de este valor.

Más en detalle, la autora indica que en el tratamiento de las derivadas sucesivas (de una función *f*) no se trabaja con derivadas de orden mayor a 2 y que las relaciones de “bajada”[2], esto es, en el sentido $f \to f' \to f''$ son exclusivamente de tipo algebraico, mientras las de “subida” son solo de tipo geométrico, ya sea $f' \to f$ (al considerar el signo de *f’* para deducir el crecimiento de *f* y su valor numérico para obtener la pendiente de la recta tangente) como $f' \to f$ (de tipo geométrico, al considerar el signo de *f’’* para deducir la concavidad de *f*). También subraya que no aparecen relaciones del tipo $f'' \to f'$ ni $f \to f''$.

Al proponer a los estudiantes distintas actividades vinculadas a la función derivada segunda, una de las conclusiones a las que arriba Testa (2006) es que los estudiantes no le dan un significado gráfico a su valor numérico sino solamente al signo de este. En la investigación se pudo observar que los estudiantes, en general, utilizan una imagen asociada al concepto función creciente o concavidad positiva o negativa para

[2] La autora denomina “relaciones de bajada” a aquellas en las que se vincula una función con una de sus derivadas, de cualquier orden, en ese sentido. Las “relaciones de subida” son aquellas que vinculan una función con alguna de sus primitivas, en ese sentido.

resolver las situaciones planteadas, sin recurrir a las definiciones. Concluye que el desarrollo del PLV de los alumnos permite enriquecer el significado gráfico asociado al valor numérico de la función derivada segunda, no solo en términos de concavidad positiva o negativa, como algo estático, sino que se considera su variación. Esto genera nuevos conceptos que enriquecen su significado. Más aún, cabe destacar que las actividades propuestas por la autora enriquecen los significados de conceptos ya conocidos por los estudiantes y permiten a su vez significar nuevos, favoreciendo así el desarrollo de su PLV.

MARCO TEÓRICO

Abordaremos nuestro análisis desde la perspectiva socioepistemológica, que se caracteriza por la problematización del conocimiento y considera las siguientes cuatro dimensiones fundamentales en su construcción como un sistema complejo: su naturaleza epistemológica (dimensión del saber); los planos de lo cognitivo (procesos de aprendizaje del estudiante); la dimensión didáctica (los modos de transmisión a través de la enseñanza) y su dimensión sociocultural (el contexto y las prácticas sociales). Este último plano es el que caracteriza esta perspectiva. “La socioepistemología, o epistemología de las prácticas sociales relativas al saber, es una aproximación teórica de naturaleza sistémica que permite tratar con los fenómenos de producción y difusión del saber desde una perspectiva múltiple…” (Cantoral, 2004, p.1)

Dentro de este marco, vamos a considerar los aportes que nos brinda la línea de investigación del Pensamiento y Lenguaje Variacional. Como línea de investigación, Cantoral (2004) establece que el PLV se ocupa de estudiar los fenómenos de enseñanza, aprendizaje y comunicación de los saberes matemáticos en relación a la variación y el cambio, en el sistema educativo y social en que se encuentra. En particular, indaga sobre tres aspectos: el estudio de estructuras variacionales específicas desde un punto de vista matemático, las funciones cognitivas que se desarrollan a través del uso de conceptos y propiedades del cambio, y los problemas y situaciones abordados y resueltos en el campo de lo social mediante las estructuras variacionales. Según Cantoral (2013, p. 202), la expresión *cambio*, "se entiende como una modificación de estado, en tanto que el vocablo *variación* es una cuantificación de dicho cambio"; por tanto la construcción del concepto variación es considerada un proceso difícil y lento, porque requiere de la integración de distintos campos matemáticos, además de la comprensión de procesos matemáticos específicos.

El estudio del cambio sirve para concebir sus efectos en otros fenómenos. Ante la incapacidad humana de predecir para observar el resultado de los acontecimientos, se desarrollan algunas herramientas para anticipar el comportamiento de sistemas complejos. De esta forma la predicción se torna como un móvil que genera otras herramientas fundamentales en el desarrollo y construcción de algunos resultados y conceptos matemáticos, como podría ser el estudio de la variación y que al igual que este, se forma socialmente a partir de experiencias de individuos y grupos sociales.

En relación a nuestra investigación, podemos mencionar que la derivada permite cuantificar, describir y pronosticar la rapidez de la variación en fenómenos de la naturaleza o de la práctica, y que los procesos de *visualización* y *graficación* son indispensables en la construcción del concepto de derivada. Cantoral y Montiel (2003) conciben a la *visualización* no como el simple acto de ver o contemplar una gráfica –por ejemplo–; sino como "la habilidad para representar, transformar, generar, comunicar, documentar y reflejar información visual en el pensamiento y el lenguaje del que aprende" (p. 694). Sostienen que para visualizar es preciso utilizar nociones matemáticas asociadas a los ámbitos numéricos, gráficos, algebraicos o verbales, así como el uso de un lenguaje coloquial o gestual para explicar ciertos fenómenos. La *graficación,* que desde la perspectiva más difundida en el medio educativo se entiende como "una técnica o conjunto de técnicas que permiten bosquejar una gráfica de una función en particular", es entendida por Cantoral (2013) "como una forma de tratamiento del universo de formas gráficas asociadas a las funciones" (p. 203) y su consideración permite analizar cómo los estudiantes perciben dicho universo y qué códigos utilizan para descifrar y procesar la información visual que contiene.

Un punto importante a tener en cuenta al momento de analizar el PLV es si los estudiantes han construido un universo de formas gráficas, es decir, si consideran a la gráfica de una función como perteneciente a una familia de gráficas de funciones, ya sea polinómica, racional, exponencial, logarítmica, etc.

Por otro lado, siguiendo la línea propuesta por Testa (2006), también tendremos en cuenta a nivel cognitivo, los aportes que realizan Tall y Vinner (1981) en cuanto a los términos imagen del concepto y definición del concepto.

Los autores denominan *imagen del concepto* a aquella que incluye no solo las "fotos mentales" sino también las "propiedades y procesos asociados" a un concepto, esto es, usamos la imagen del concepto para describir la estructura cognitiva ligada a dicho concepto. Es importante recalcar el hecho de que la imagen del concepto es propia de cada estudiante y que puede diferir de la imagen del concepto que posea otro estudiante sobre el mismo concepto. Por ejemplo, "cuando escuchamos la palabra "función" se puede recordar la expresión $y = f(x)$, se puede visualizar la gráfica de una función, o pensar en funciones específicas como $y = x^2$, $y = sen(x)$" (Vinner, 1991, p. 68).

Para Tall y Vinner (1981), "la *definición de un concepto* es un conjunto de palabras que son utilizadas para explicar dicho concepto" (p. 2). Puede ser una reconstrucción personal de la definición por parte del estudiante, de esta manera la definición pasa a ser personal, pudiendo diferir de la definición formal. Es la forma en la que el estudiante explica mediante palabras su imagen del concepto.

Con respecto a la estructura cognitiva de un sujeto, Vinner (1991) considera la existencia de dos "celdas" diferentes, una celda para la definición del concepto y otra para la imagen del concepto, así como el proceso intelectual de los estudiantes frente a situaciones problema que el docente espera que realicen. Distingue cuatro casos que modelizan las distintas formas en que el sistema cognitivo podría actuar al dar respuesta a un problema:

Caso 1: Se consulta solo la celda de la definición (deducción puramente formal).

Caso 2: Se evoca en una primera instancia la imagen del concepto, luego se consulta su definición para, a partir de ahí, dar una respuesta (deducción siguiendo un pensamiento intuitivo).

Caso 3: Se recurre en una primera instancia a la definición del concepto, se realiza una interacción con la imagen de este, pero la respuesta es dada a partir de su definición (interacción entre definición e imagen).

Caso 4: Se consulta solamente la celda de la imagen del concepto para dar una respuesta (respuesta intuitiva).

Además, Testa (2006, p. 167) considera un nuevo tipo de respuesta posible: "*Caso 5:* Se recurre en una primera instancia a la celda de la imagen del concepto, se realiza una interacción con la definición pero la respuesta es dada a partir de la celda de la imagen del concepto".

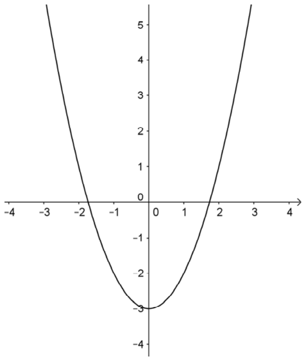
LA SECUENCIA PROPUESTA Y SU FUNDAMENTACIÓN

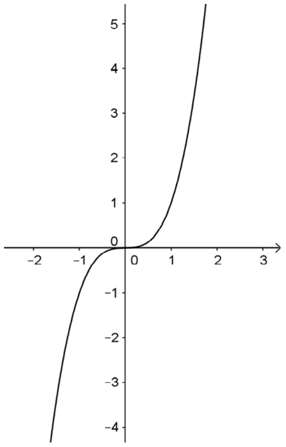
La secuencia que realizamos consta de tres actividades. Con la misma se pretende que el estudiante se cuestione el significado del valor numérico de la función derivada segunda y su relación con la representación gráfica de la función, evidenciando cuál es su creencia al respecto al realizar diferentes tareas.

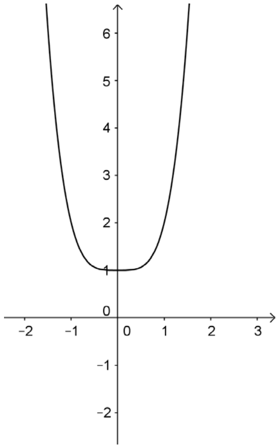
Presentamos brevemente las actividades y el porqué de las mismas.

Actividad 1

a. Observa las siguientes gráficas de funciones de dominio R e indica para cada una de ellas dos valores x_1 y x_2 que cumplan $|f'(x_1)| > |f'(x_2)|$.







b. Para los valores indicados anteriormente completa con >, < o = y justifica tu respuesta:

$$\left|f''(x_1)\right| \underline{\qquad} \left|f''(x_2)\right|$$

c. ¿Qué relación crees que existe entre el valor numérico de la función derivada segunda para un cierto valor de x y la "proximidad" de la gráfica de la función f a su recta tangente en (x, f(x))?

Con la actividad 1a buscamos indagar la imagen del concepto que poseen los estudiantes respecto al valor numérico de la derivada primera y su relación con la representación gráfica de la función. Al presentar de forma intencional gráficas de funciones polinómicas, pero sin dar sus expresiones analíticas, también buscamos estudiar si hay en los estudiantes un reconocimiento de este tipo de funciones como parte de una familia, por ejemplo al intentar hallar sus expresiones o el grado de la función derivada primera para contestar. En la parte b se quiere observar la imagen del concepto que poseen respecto al valor numérico de la derivada segunda y su relación con la representación gráfica de la función. En la parte c se pretende evidenciar si existe en los estudiantes un preconcepto establecido sobre la interpretación gráfica del valor numérico de la derivada segunda, por medio de la realización de una conjetura al respecto.

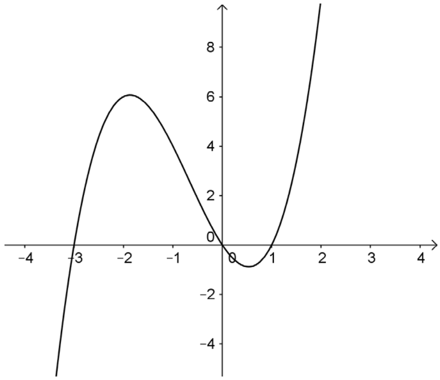
La conjetura esperada, que coincide con la esperada por Testa (2006), es la siguiente:

> El valor numérico de la función derivada segunda en $x = a$ determina la "abertura" del gráfico, o más específicamente la "proximidad" del gráfico de la función f a su recta tangente en $(a, f(a))$ en un entorno reducido de a, de donde si $|f(a)| > |g(a)|$ entonces el gráfico de f estará más alejado de su recta tangente en $x = a$ que el de g a la suya. (Testa, 2006, p. 192)

Actividad 2

A partir de la gráfica de la función f de dominio R, indica dos valores x_1 y x_2 y que creas que cumplen:

1. $f'(x_1) > 0, f'(x_2) > 0, \; |f''(x_1)| > |f''(x_2)|$
2. $f'(x_1) < 0, f'(x_2) < 0, \; |f''(x_1)| > |f''(x_2)|$
3. $f'(x_1) > 0, f'(x_2) < 0, \; |f''(x_1)| > |f''(x_2)|$



Justifica ampliamente tu respuesta.

En la actividad 2 se busca que los estudiantes apliquen la conjetura enunciada previamente en algunos de los distintos casos posibles considerando simultáneamente el signo de la derivada primera y los valores absolutos de los valores numéricos de la derivada segunda. Optamos por pedir que trabajen con la gráfica de una función polinómica (en este caso de tercer grado).

Actividad 3

La gráfica de la actividad anterior corresponde a la función $f: R \rightarrow R / f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x$.

Grafícala en GeoGebra e investiga la validez de las respuestas dadas en la actividad 2. Analiza la validez de la respuesta dada en 1c con la ayuda de un deslizador, ¿sigue siendo la misma? ¿Por qué?

Con esta tercera actividad se pretende que los participantes se replanteen la conjetura dada en la parte 1c, al pedirles que verifiquen lo respondido en la actividad 2 utilizando herramientas informáticas y conociendo la expresión analítica de la función presentada anteriormente.

Llegado este punto se quiere generar un conflicto en relación a lo que se creía previamente sobre el valor numérico de la derivada segunda y ver si es posible generar nuevas relaciones entre los valores numéricos de las derivadas primera y segunda en un punto, al enfrentar a los participantes a un caso en que la conjetura esperada no se cumple.

Más allá de los objetivos particulares que tenemos con cada una de las actividades propuestas, también queremos ver de qué manera los estudiantes relacionan las derivadas sucesivas: si las relaciones dadas son "de subida" o "de bajada" y si se dan en un registro analítico y/o en uno gráfico.

ALGUNOS RESULTADOS OBTENIDOS EN LA INVESTIGACIÓN

Esta misma secuencia fue aplicada a doce estudiantes del Instituto de Profesores Artigas durante su clase de Didáctica (en diferentes subgrupos), con el permiso del docente. Algunos datos significativos obtenidos en el análisis de sus respuestas son los siguientes.

En cuanto a la función derivada primera, seis estudiantes recurren a las rectas tangentes, otros seis utilizan su expresión analítica (asumiendo que la función se corresponde con una polinómica) para obtener su valor numérico y un estudiante realiza el estudio de signo de la misma.

En relación a la función derivada segunda, cinco estudiantes utilizan su expresión analítica (asumiendo que la función se corresponde con una polinómica), cinco estudiantes recurren al estudio de su signo y/o hacen referencia a la concavidad. Vemos que no está presente el valor numérico.

Con respecto a la elaboración de conjeturas, solo un estudiante elabora la conjetura esperada, cinco estudiantes elaboran conjeturas no esperadas (entre ellas la opuesta a la esperada) y seis estudiantes no conjeturan. Al poner a prueba las conjeturas, ocho estudiantes no logran generar nuevas relaciones o mantienen su conjetura anterior (a pesar de haberse enfrentado a casos en los que no se cumplía) y solo dos estudiantes logran corregir sus conjeturas, uno en forma correcta y uno en forma incorrecta.

En cuanto a la construcción de un universo de formas gráficas, cinco estudiantes recurren a la familia de funciones polinómicas para responder a las actividades. Esto denota en ellos un dominio de esa familia particular.

Por último, únicamente un estudiante habla de la derivada segunda como la variación de la derivada primera (lo que estaría evidenciando un vínculo entre *f'* y *f''* de tipo algebraico-gráfico).

Observamos a partir del análisis de las respuestas de los estudiantes que en general la imagen del concepto que ha formado cada uno en relación al valor numérico de la derivada primera, es rica en aspectos gráficos, pero que esto no ocurre con la imagen del concepto del valor numérico de la derivada segunda pues a lo único que se hace referencia es a la concavidad de la función. Consideramos que esto puede deberse a la manera en que estos temas se tratan en los cursos, lo cual es reflejado en los programas y libros de textos según lo observado en el análisis de los mismos (esto fue parte del estudio realizado en el curso pero que no incluimos aquí por razones de espacio).

En relación al PLV de los estudiantes, podemos concluir que sí está presente en algunos estudiantes un universo de formas gráficas, en su mayoría funciones polinómicas, a las cuales pueden recurrir para resolver situaciones. Consideramos que actividades de este tipo fomentan la profundización en dicho conocimiento y en el desarrollo del PLV ya que permitirían tratar con el cambio y la variación al trabajar con las funciones derivadas.

A partir de lo observado en las respuestas a la última actividad, observamos que a los estudiantes les cuesta romper con lo que ya saben, recurren a cosas que conocen pero les cuesta generar conjeturas nuevas o poner a prueba las existentes. Una de las posibles explicaciones que encontramos se centra en que probablemente su formación, específicamente en este tema, está más centrada en la práctica de la algoritmia que en la producción de conocimientos nuevos. Esto se deduce del análisis del dme reportado en los antecedentes.

LUEGO DE LA INVESTIGACIÓN

Posteriormente a la realización de esta investigación, y a partir de la misma, se presentó la misma secuencia de actividades en un taller en el marco del CUREM 5[3]. En este caso el taller fue pensado para docentes de matemática. Es interesante destacar que surgieron discusiones muy interesantes en cuanto a la derivada segunda como variación de la derivada primera (aspecto casi inexistente en la investigación con estudiantes de profesorado) y también con respecto a las relaciones de "subida" entre ellas (es decir, obtener datos algebraicos, analíticos o gráficos de *f'* a partir de *f''*). Se puso en evidencia el hecho de que no solemos pensar en estas relaciones entre las derivadas ni en el valor numérico de la función derivada segunda, y por tanto tampoco promovemos este tipo de discusiones en el aula.

Como extensión posible del trabajo consideramos que esta secuencia puede tener una segunda etapa, recurriendo a por lo menos dos conceptos matemáticos relacionados al valor numérico de la función derivada segunda: el radio de curvatura y el polinomio de Taylor. En ambos casos, son ambas derivadas (primera y segunda) las que están involucradas y nos aportan información gráfica.

REFERENCIAS

Cantoral, R. (2004). Desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional, una mirada socioepistemológica. En L. Díaz Moreno (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática* Educativa (Vol. 17, pp. 1–9). Chile: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. Recuperado desde

[3] 5º Congreso Uruguayo de Educación Matemática, 21 al 23 de setiembre de 2015, Montevideo, Uruguay.

http://www.clame.org.mx/documentos/alme%2017.pdf el 11 de agosto de 2015.

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la matemática educativa: estudios sobre construcción social de conocimiento.* Barcelona: Gedisa.

Cantoral, R. y Farfán, R. (1998). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. *Épsilon, Revista de S.A.E.M "Thales",* 42, 353-369.

Cantoral, R. y Montiel, G. (2003). Visualización y pensamiento matemático. En J. Delgado Rubí (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (Vol. 16 (2), pp. 694-701). Chile: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. Recuperado desde http://www.clame.org.mx/documentos/alme%2016_2.pdf el 25 de octubre de 2015.

Tall, D. y Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics, 12* (7), 151-169.

Testa, Y. (2006). Procesos de resignificación del valor numérico de la derivada segunda: un estudio en el sistema escolar uruguayo. En M. Dalcín, C. Ochoviet, M. Olave y Y. Testa (Comp.), *Didáctica de Matemática. Cuatro trabajos de investigación en el marco del sistema educativo uruguayo* (pp. 153-196). Montevideo: Ediciones Rocamadur.

Vinner, S. (1991). The role of definitions in teaching and learning. En D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 65-81). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

AUTORES

JUAN PABLO ÁLVAREZ es estudiante de cuarto año del Profesorado Semipresencial (IFD de Canelones). El trabajo de su autoría que se incluye en esta obra lo elaboró colectivamente para el segundo parcial de la asignatura Didáctica III (2015).

MARCELO ASTORUCCI es estudiante de cuarto año del Instituto de Profesores Artigas. El trabajo de su autoría que se incluye en esta obra es una creación colectiva fruto de una tarea propuesta en la asignatura Análisis del Discurso Matemático Escolar (2015).

LAURA AYALA es estudiante de cuarto año del Profesorado Semipresencial (IFD de San Ramón). El trabajo de su autoría que se incluye en esta obra es una creación colectiva que formó parte del segundo parcial de la asignatura Didáctica III (2015).

EDWARD ARAP es estudiante de cuarto año del Instituto de Profesores Artigas. El trabajo de su autoría que se incluye en esta obra lo elaboró colectivamente para el trabajo final de la asignatura Análisis del Discurso Matemático Escolar (2014).

NANCY BARBOZA es estudiante de cuarto año del Profesorado Semipresencial (IFD de la Costa). El trabajo de su autoría que se incluye en esta obra es una creación colectiva que formó parte del segundo parcial de la asignatura Didáctica III (2015).

GABRIELA BUENDÍA es Doctora en Matemática Educativa (CINVESTAV, IPN, México). Se ha desempeñado como profesora e investigadora en CICATA-IPN (México). Actualmente es investigadora del Colegio Mexicano de Matemática Educativa AC.

SILVANA CAFASSO es estudiante de cuarto año del Profesorado Semipresencial (IFD de Canelones). El trabajo de su autoría que se incluye en esta obra lo elaboró colectivamente para el segundo parcial de la asignatura Didáctica III (2015).

ADRIÁN CARREROU es estudiante de cuarto año del Profesorado Semipresencial (IFD de Canelones). El trabajo de su autoría que se incluye en esta obra es una creación colectiva que formó parte del segundo parcial de la asignatura Didáctica III (2015).

KARINNA CELERY es estudiante de cuarto año del Profesorado Semipresencial (IFD de Fray Bentos). El trabajo de su autoría que se incluye en esta obra formó parte del Segundo Parcial de Didáctica III (2015).

GISELA DA CUNHA es estudiante de cuarto año del Instituto de Profesores Artigas. El trabajo de su autoría que se incluye en esta obra es una creación colectiva fruto de una tarea propuesta en la asignatura Análisis del Discurso Matemático Escolar (2015). Actualmente se desempeña como docente en institutos públicos y privados de enseñanza secundaria y en UTU (Montevideo).

ANDRÉS DE ACEVEDO es Profesor de Matemática egresado del Instituto de Profesores Artigas (2015). Participó en la elaboración de los materiales para este libro como estudiante de cuarto año del Instituto de Profesores Artigas al cursar la asignatura Didáctica III (2015).

ANTONELLA DELLAPIAZZA es estudiante de cuarto año del Instituto de Profesores Artigas. El trabajo de su autoría que se incluye en esta obra lo elaboró colectivamente para el trabajo final de la asignatura Análisis del Discurso Matemático Escolar (2014). Actualmente se desempeña como docente en los liceos Nº 1 y Nº 24 (Montevideo).

ANA CLARA DÍAZ es egresada del Instituto de Profesores Artigas (2014). El artículo de su autoría que se incluye en esta obra fue realizado a partir del trabajo final de la asignatura Análisis del Discurso Matemático Escolar (2014). Actualmente se desempeña como docente en el liceo Nº 59, en el Instituto Superior Brazo Oriental y en la Facultad de Ciencias Económicas y de Administración (UdelaR).

MARÍA JOSÉ DÍAZ es estudiante de cuarto año del Profesorado Semipresencial (IFD de Carmelo). El trabajo de su autoría que se incluye en esta obra formó parte del segundo parcial de Didáctica III (2015).

MICAELA FERAHIAN-OGLI es estudiante de cuarto año del Profesorado Semipresencial (IFD de la Costa). El trabajo de su autoría que se incluye en esta obra es una creación colectiva que formó parte del segundo parcial de la asignatura Didáctica III (2015).

FIORELLA GIOVANNINI es estudiante de cuarto año del Profesorado de Matemática de la Universidad de Montevideo (2015). Las actividades que se incluyen en esta obra las elaboró para el curso de Didáctica III como estudiante del Instituto de Profesores Artigas (2014).

ALEJANDRA HERGATACORZIÁN es estudiante de cuarto año del Instituto de Profesores Artigas. El trabajo de su autoría que se incluye en esta obra es una creación colectiva fruto de una tarea propuesta en la asignatura Análisis del Discurso Matemático Escolar (2015). Actualmente se desempeña en liceos públicos y privados de Montevideo.

ANA MALDONADO es egresada del Instituto de Profesores Artigas (2007). El artículo de su autoría que se incluye en esta obra es una creación colectiva fruto de trabajos elaborados en la asignatura Aportes metodológicos para la enseñanza de la Matemática en la formación de profesores de Matemática (2015) del posgrado Diploma en Matemática (ANEP-UdelaR). Actualmente se encuentra en la fase de finalización de este posgrado, en el proceso de elaboración de la tesina. Se desempeña como docente en el liceo N° 2 y en la UTU de Bella Unión (Artigas).

FRANCO MARIANI es egresado del Instituto de Profesores Artigas (2014). El trabajo de su autoría que se incluye en esta obra lo elaboró colectivamente para el trabajo final de la asignatura Análisis del Discurso Matemático Escolar (2014). Actualmente se desempeña como docente en los liceos N° 1 y N° 3, y en la Escuela Técnica Superior (Mercedes).

LETICIA MEDINA UVAL es Profesora de Matemática egresada del Instituto de Formación Docente de Maldonado (2010). El artículo de su autoría que se incluye en esta obra surge a partir de trabajos elaborados en el marco de la asignatura Aportes metodológicos para la enseñanza de la matemática en la formación de profesores (2015) del posgrado Diploma en Matemática (ANEP-UdelaR). Se encuentra en la fase de finalización del posgrado, en el proceso de elaboración de la tesina. Actualmente se desempeña como docente de Didáctica de la Matemática en el CeRP del Este y como docente de Matemática en el IFD de Maldonado.

VICTORIA MESA es Profesora de Matemática egresada del Instituto de Profesores Artigas (2012). El artículo de su autoría que se incluye en esta obra surge a partir de trabajos elaborados en el marco de la asignatura Aportes metodológicos para la enseñanza de la matemática en la formación de profesores (2015) del posgrado Diploma en Matemática (ANEP–UdelaR). Actualmente se encuentra en la fase de finalización de este posgrado, en el proceso de elaboración de la tesina. Se desempeña como docente en los liceos N° 1 y 2 de Sauce (Canelones).

VERÓNICA MOLFINO es Doctora en Matemática Educativa (CICATA-IPN, México). Se ha desempeñado como docente del Instituto de Profesores Artigas y del Profesorado Semipresencial, y como docente de posgrado en el Instituto de Perfeccionamiento y Estudios Superiores (Uruguay).

CRISTINA OCHOVIET es Doctora en Matemática Educativa (CICATA-IPN, México). Se ha desempeñado como docente del Instituto de Profesores Artigas y del Profesorado Semipresencial, y como docente de posgrado e investigadora en el Instituto de Perfeccionamiento y Estudios Superiores (Uruguay).

DANIELA PAGÉS es Magíster en Ciencias en Matemática Educativa (CICATA-IPN, México). Se desempeña como docente de Didáctica de la Matemática en el Profesorado Semipresencial y como docente de Matemática en la formación de maestros y en la enseñanza secundaria.

FLORENCIA RIVERO es Profesora de Matemática egresada del Instituto de Profesores Artigas (2013). El artículo de su autoría que se incluye en esta obra surge a partir de trabajos elaborados en el marco de la asignatura Aportes metodológicos para la enseñanza de la matemática en la formación de profesores (2015) del posgrado Diploma en Matemática (ANEP-UdelaR). Actualmente se encuentra en la fase de finalización de este posgrado, en el proceso de elaboración de la tesina. Se desempeña como docente en el liceo Nº 62 y en el Colegio Latinoamericano (Montevideo).

ELIZABETH SCHEGGIATI es Profesora de Matemática egresada del Instituto de Profesores Artigas y Diplomada en Didáctica con énfasis en Matemática por la Universidad Católica del Uruguay. Actualmente se desempeña como profesora de Didáctica de la Matemática en el Profesorado Semipresencial y como profesora de Matemática en el liceo Nº 3 de Montevideo.

MARÍA CLARA TEIJEIRO es estudiante de cuarto año del Profesorado de Matemática (IFD de San José). El trabajo de su autoría que se incluye en esta obra formó parte del segundo parcial de Didáctica III (2015).

DANIEL TORRES es estudiante de cuarto año del Instituto de Profesores Artigas. Participó en la elaboración de los materiales para este libro durante el cursado de la asignatura Didáctica III (2015).

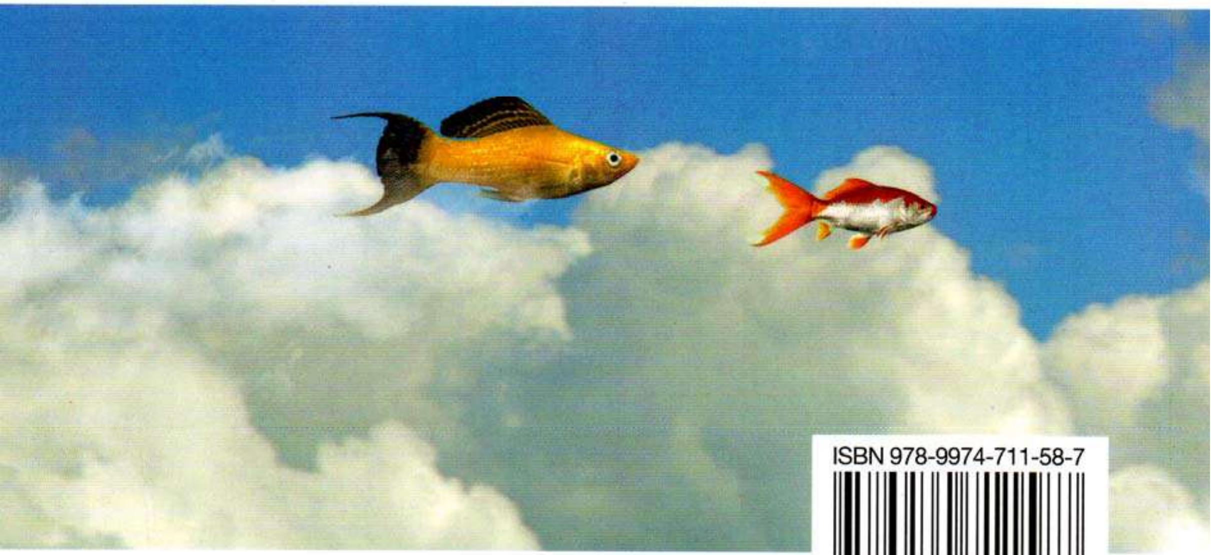
MARÍA NOELIA VILLALBA es estudiante de cuarto año del Profesorado Semipresencial (IFD de Fray Bentos). El trabajo de su autoría que se incluye en este libro se diseñó como parte del segundo parcial de la asignatura Didáctica III (2015).

María Noel Zunino es estudiante de cuarto año del Instituto de Profesores Artigas. El trabajo de su autoría que se incluye en esta obra es una creación colectiva fruto de una tarea propuesta en la asignatura Análisis del Discurso Matemático Escolar (2015). Actualmente se desempeña como docente en el liceo de la ciudad de Libertad (San José) y en el liceo Nº 17 de Montevideo.

«Estrechando lazos...», volumen II: efectivamente, lo imposible ha dejado de serlo para convertirse en un hecho natural.

¿Cómo es que la vinculación entre investigación y formación docente o que la escritura y difusión de materiales conjuntos -docentes y estudiantes- no han sido desde siempre tareas naturales? Paradigmas, lenguajes e intereses distintos, rumbos distanciados confluyeron para poner un disfraz de complicadas y difíciles a dichas tareas. Hoy, este texto, no sólo es una continuidad del trabajo realizado en el seno del ***Departamento de Matemática*** del *Consejo de Formación en Educación*; es la intencionalidad de crear, articular, difundir. Hoy, es ejemplo y rumbo.

Gabriela Buendía
Ciudad de México, Octubre 2015



ISBN 978-9974-711-58-7
9 789974 711587