¿Cómo vive el infinito en los libros de texto de Formación Docente?

Tesina de Diploma en Matemática, Mención Enseñanza

Instituto de Perfeccionamiento y Estudios Superiores – CFE

Universidad de la República

Florencia Rivero Sande

Tutora: Verónica Molfino Vigo

Resumen:

Mi interés por el concepto de infinito surgió ya en la etapa final de la carrera de Profesorado de Matemática, cristalizándose en una investigación llevada a cabo con compañeras sobre las concepciones de infinito que conviven en los estudiantes de profesorado de Matemática (Acosta, Figares, López, Mesa, Molfino y Rivero, 2014). En ese trabajo caracterizamos las diferentes concepciones de infinito usando el esquema de *actividades – prácticas de referencia - prácticas sociales* proveniente de la Socioepistemología (Montiel, 2011; Lestón, 2011a y 2011b). En el presente trabajo nos propusimos profundizar ese estudio, adentrándonos en el análisis del discurso matemático escolar (dme), específicamente de uno de sus componentes: los libros de texto.

A partir del análisis de los textos, buscamos, por un lado, identificar qué tipos de infinito asumen implícita o explícitamente los autores de libros de texto utilizados en el profesorado de Matemática. A su vez, queremos ampliar la caracterización de los diferentes tipos de infinitos que conviven en el dme mediante otro constructo propio de la Socioepistemología, los *usos socioepistemológicos* (Buendía, 2012; Cordero y Flores, 2007; Fregueiro, 2014).

Con el objetivo de mostrar la viabilidad del proyecto, así como la pertinencia del marco teórico y la metodología diseñada, seleccionamos un libro de texto utilizado como referencia en el curso Análisis I (de Burgos, 2007). El mismo desarrolla los temas que figuran en el programa de dicho curso. Analizamos la introducción a temas, definiciones, proposiciones, teoremas, diferentes demostraciones y ejercicios. Esto sirvió como insumo para evidenciar cómo conviven en el texto dos distintos tipos de infinito: potencial y actual, así como también detectar, en forma incipiente, diferentes usos del infinito: geométrico-espacial, analítico, aritmético, nominativo y descriptivo.

Entendemos que este estudio puede brindar herramientas que arrojen luz sobre la enseñanza de un concepto que es considerado transparente en el discurso matemático escolar tradicional, en este caso, del nivel superior.

Palabras claves:

Tipos y usos de infinito**,** Libros de texto, Discurso matemático escolar, Formación de profesores.

Índice:

Índice de figuras:

Introducción:

El concepto de infinito es abordado explícitamente en el ámbito escolar recién en algunos cursos avanzados de nivel terciario, pero está relacionado con muchos de los temas desarrollados en distintos cursos de Matemática de educación primaria, media y superior. Además, es un concepto con el que tenemos contacto desde etapas iniciales de nuestro desarrollo cognitivo en contextos extraescolares. Desde niños intentamos explicar el universo que nos rodea y entender las explicaciones que los adultos nos brindan. El concepto de infinito es parte sustancial de esas explicaciones.

De ahí que nos resulte un tema sumamente controvertido: las concepciones extraescolares y extramatemáticas del infinito están presentes cuando en ámbitos escolares, en particular en la Matemática Escolar, se comienza a hablar de él. Además, las concepciones explícitas e implícitas en ambos ámbitos –escolar y extraescolar- suelen diferir, incluso entrar en contradicción. Por ejemplo, mismo en el ámbito extraescolar, muchas veces el término infinito es utilizado como sinónimo de mucho, “Te lo dije infinitas veces”, esto nos muestra una idea finitista del infinito, en otras ocasiones se puede observar el infinito potencial como en la frase: “El espacio es infinito”, cuando se lo dice en el sentido de que es ilimitado. Por último, mostramos una frase en la que subyace una concepción actual del infinito: “Te quiero hasta el infinito” aquí se ve al infinito como un lugar físico, como un todo.

Nos interesa desentrañar cómo vive ese infinito en el ámbito escolar, en este caso ubicándonos en el nivel superior, especialmente considerando lo construido previamente por los estudiantes en ámbitos no escolares o escolares.

El interés sobre los distintos tipos de infinito surge en 2012 en el curso de Análisis del discurso matemático escolar del Profesorado de Matemática, en el Instituto de Profesores ‘Artigas’ (IPA). En dicho curso se realizó un proyecto de investigación sobre las diferentes concepciones de infinito que conviven en los estudiantes de formación docente, el cual fue profundizado luego de terminar la carrera. (Acosta, Figares, Hanusz, López, Mesa, Molfino y Rivero, 2012 y Acosta et al., 2014).

Ese trabajo se basó en Lestón (2011a y b) para identificar los “tipos” de infinito mediante una caracterización propia de la socioepistemología. Detectamos que conviven varios tipos de infinito en las concepciones de los estudiantes, entonces nos cuestionamos: ¿a qué se debe que coexistan esas concepciones? Pensamos que un componente que incide en tal coexistencia es el discurso matemático escolar (dme). Por eso buscamos ampliar lo descubierto en trabajos anteriores, estudiando si conviven diferentes tipos de infinito en algunos aspectos del dme. En particular nos focalizamos en el análisis de libros de texto utilizados en la carrera de profesorado de Matemática del Consejo de Formación en Educación.

Los libros que proyectamos analizar en este trabajo son algunos de los recomendados para los cursos Análisis I, Análisis II y Topología en el IPA y Profesorado Semipresencial. Seleccionamos estos cursos porque entre los obligatorios no optativos, ellos son en los que mayormente se utiliza, explícita o implícitamente, el concepto de infinito. Mientras el curso de Análisis I no trata explícitamente con el concepto ya que no está dentro de los contenidos a abordar el de "conjuntos infinitos", el curso de Topología sí contiene al concepto de infinito como un contenido explícito del programa. Por su parte, el curso de Análisis II no lo aborda explícitamente pero al ser un curso del mismo grado que el de Topología, es de esperar que los estudiantes estén en proceso de reflexión sobre los diferentes aspectos del infinito.

Por otro lado durante los cursos del Diploma se trabajó el constructo de *usos socioepistemológicos,* lo que nos permitió ampliar nuestra mirada. Además de querer analizar los tipos de infinito desde una perspectiva socioepistemológica, nos proponemos identificar los *usos socioepistemológicos* para el concepto de infinito. El objetivo del trabajo es brindar información relevante sobre qué tipos de infinitos viven en libros de texto usados en el profesorado de Matemática en Uruguay así como los diferentes usos del mismo.

Exponemos el marco teórico y el metodológico, diseñados específicamente para el análisis propuesto y, dadas las características de extensión y formato de la tesina, realizamos el análisis de algunas secciones de un solo libro, con el fin de ejemplificar y mostrar la viabilidad del modelo creado. Consideramos que este trabajo permitirá dejar en evidencia cómo conviven diferentes infinitos, incluso a la interna de un libro de texto "formal[1]". Además, mostramos evidencia de que a partir de la metodología propuesta es posible comenzar a delinear la identificación de usos socioepistemológicos del concepto de infinito en libros de texto, explicitando para

[1]Entendemos por libro de texto "formal" a todo libro publicado y editado.

cada uno las formas y funcionamientos correspondientes. Ello constituye un gran desafío dado que, si bien existen trabajos previos sobre el concepto de infinito desde la perspectiva socioepistemológica, no existen estudios relativos al concepto de infinito en libros de texto ni tampoco antecedentes relativos a la identificación de los usos del infinito. En este sentido consideramos que puede ser un aporte muy significativo tanto para la comunidad escolar como para la comunidad de investigación en Matemática Educativa.

Confiamos en que este trabajo brinde herramientas para el análisis y la reflexión sobre nuestro dme, en particular en lo que hace a la idea de infinito que transmitimos tanto los docentes como los libros de texto y de esta manera repensar nuestra propuesta didáctica.

En el capítulo 1 presentamos algunas investigaciones que constituyen antecedentes relevantes para nuestra investigación, unas relativas al análisis de los libros de texto y otras a los diferentes tipos de infinito.

En el capítulo 2 contextualizamos y fundamentamos la problemática a abordar. A partir de ello, proponemos los objetivos del trabajo.

En el capítulo 3 desarrollamos el marco teórico que sustenta el proyecto, descripto en tres apartados. El primero hace referencia a aspectos de la Socioepistomología que consideramos fundamentales para nuestra investigación. El segundo, trata sobre los tipos de infinito caracterizados desde la perspectiva socioepistemológica, mientras que en el último apartado presentamos el constructo socioepistemológico de los usos del conocimiento matemático.

En el capítulo 4 describimos la metodología de trabajo diseñada para lograr los objetivos propuestos. Presentamos un apartado donde se justifica la selección del texto a analizar y otro apartado que hace explícito los elementos que tuvimos presentes al momento de analizar el libro de texto.

En el capítulo 5 presentamos los hallazgos de la aplicación del marco teórico y metodológico para el análisis de un libro de texto concreto con el objetivo de constatar la viabilidad del proyecto.

El capítulo 6 lo destinamos a las consideraciones finales, sintetizamos lo abordado en el proceso de elaboración de la investigación y exponemos las conclusiones a las que arribamos a partir de la reflexión sobre los hallazgos reportados en el capítulo anterior, así como posibles extensiones del trabajo en futuras investigaciones.

Capítulo 1. Estado del arte

En este apartado presentamos investigaciones que por diferentes razones constituyen antecedentes para la nuestra. Por un lado, encontramos trabajos que muestran la relevancia del análisis de los libros de texto, en particular como componentes privilegiados del dme y, por otro lado, otras que refieren a diferentes maneras de concebir al infinito.

1.1. Respecto al análisis de libros de texto como componentes del dme:

En investigaciones de Castañeda (2002, 2004, 2006a y 2006b) se plantea que la construcción de la matemática responde a ciertos intereses o preocupaciones, ya sean eruditos o socioculturales, pero que no se produce con el propósito expreso de ser enseñable. Castañeda, basándose en Brousseau (1987), plantea que la transformación del saber con una intencionalidad didáctica provoca lo que el autor denomina *despersonalización*: la presentación de un concepto matemático sin permitir crear o recrear conflictos, conjeturas e interpretaciones que en sus orígenes le dieron sentido y significado. De Chevallard (1985) toma que la *textualización* es una forma de despersonalización, ya que los libros de texto desproveen de situaciones asociadas con el saber original.

> Los libros de texto posibilitan además el control social de los aprendizajes, dado que tienen un reconocimiento social y cultural, los libros funcionan como una autoridad moral con un estatus de *verdad* en cuanto al contenido que tratan y a la forma de cómo plantean problemas o aplican conceptos. (Castañeda, 2004, p. 29)

En Castañeda (2006b) se plantea que el discurso matemático escolar, entre otros aspectos, involucra las explicaciones que brindan los docentes al dar las clases como por ejemplo el diálogo que se puede suscitar en una clase entre profesor y alumnos (formas orales) y las formas escritas como los programas o los libros de texto seleccionados para dictar un curso.

En particular, en relación a los libros de texto señala:

> El libro de texto en el ámbito escolar cumple, entre otras funciones, la de fuente de consulta del saber que se estudia, así como la de organizador en la

> creación de programas de estudio, estructuración de cursos y seminarios, o de situaciones específicas en la preparación de clases, elaboración de problemarios, guías de estudio o exámenes. (Castañeda, 2006b, p. 254)

Castañeda, Rosas y Molina (2010) realizan una investigación en base a la noción teórica del discurso matemático escolar. A través del análisis de libros de texto estudian la estructura y organización que establecen los autores como, por ejemplo, el manejo de las definiciones, argumentos, usos de representaciones gráficas, entre otros.

> El propósito del análisis del *discurso matemático escolar* en los libros de texto es identificar los rasgos de tipo conceptual, de enfoque didáctico o referidos a la organización del saber que son comunes en las obras escolares y que han configurado un discurso *oficial* para la clase de matemáticas a partir del cual se escriben nuevas obras, se organizan lecciones de clase e incluso se desarrollan programas de estudio. (Castañeda, Rosas y Molina, 2010, p. 5)

También Cordero y Flores (2007) realizan un estudio del discurso matemático escolar mediante el análisis de libros de texto. Para ellos, "el discurso matemático escolar es la manifestación del conocimiento matemático normado por creencias de los actores del sistema didáctico de lo que es la enseñanza y lo que es la matemática." (p.14)

Plantean que en el discurso matemático escolar los libros de texto tienen un rol muy importante, ya que norman todas las acciones de enseñanza y aprendizaje. También expresan que el libro de texto es un marco de referencia insoslayable para el profesor y el estudiante, ya que genera el discurso matemático que se manifiesta en la práctica docente.

Maldonado, Rodríguez y Tuyub (2007) realizan una investigación cuyo interés es analizar la noción del discurso matemático escolar y hacer un estudio sobre la reproducibilidad de los libros de texto. Plantean la importancia que tienen como principales recursos de los saberes matemáticos ya que de una u otra manera norman la práctica docente. Sostienen que el libro de texto constituye para el profesor una fuente de recursos tanto para las explicaciones de clase como para el conjunto de ejercicios a resolver en el salón, para usarlos como tarea o bien para evaluaciones.

López (2014) desde una perspectiva cognitiva (a diferencia de las anteriores, de corte socioepistemológico) analiza la noción del límite infinito en los libros de texto del cálculo diferencial que se utilizan en las diferentes carreras de ingeniería de Argentina. Basándose en Vinner (1991) plantea que las definiciones dificultan el aprendizaje de la matemática más que cualquier otra cosa, pues evidencian el conflicto entre la estructura de la matemática como la conciben los profesionales matemáticos y los procesos cognitivos que intervienen en la adquisición de conceptos. Evidencian grandes problemas en el pasaje de la matemática elemental a la matemática avanzada.

En el artículo se busca analizar en profundidad la presentación del concepto de límite y los ejercicios que la acompañan en los libros de texto. Plantea que:

> El lenguaje en que los libros de texto de matemática se hallan escritos tiene peculiaridades que atañen tanto a la forma de referirse a sus objetos y las relaciones que guardan entre ellos como a la naturaleza sintáctica que rige la composición de su sistema simbólico. (López, 2014, p.4)

En suma, por medio de los diferentes antecedentes expuestos se revela la importancia del análisis de libros de texto, pues conforman un componente fundamental del dme, influyendo sobre la práctica docente. Los textos son muy significativos en el dme ya que norman el actuar del docente, que cumple a su vez un rol importante en la institucionalización de conocimientos (en el sentido de Chevallard, 1991); regulan una determinada manera de presentar el conocimiento en clase así como las actividades o problemas que se proponen a los estudiantes.

Destacamos que no se encuentran antecedentes directamente relacionados con el análisis de las diferentes concepciones del infinito que se pueden detectar en textos utilizados en formación de profesores ni en otro nivel, secundario o terciario.

1.2. Respecto a las concepciones del infinito

1.2.1. Desde una perspectiva cognitiva y/o epistemológica

En Mamolo (2009) se analizan las concepciones de infinito (actual, potencial y finitista) que surgen a través de una secuencia de actividades en estudiantes universitarios bajo una perspectiva cognitiva. Trabaja con estudiantes universitarios del curso “Foundations of AcademicNumeracy”, curso que busca un desarrollo del razonamiento cualitativo y analítico mediante el análisis y reflexión crítica de algunos fundamentos de la matemática.

El estudio reveló que los estudiantes perciben el infinito como un proceso continuo, en lugar de uno completo y acabado, lo que conduce a pensar en un predominio de la concepción potencial del concepto. Ello se evidencia, por ejemplo, en las respuestas a una pregunta sobre la cantidad de fracciones que existen entre los números $\frac{1}{19}$ y $\frac{1}{17}$. La mayoría de los estudiantes respondieron que existen infinitos dado que existe una cantidad sin fin de posibles números para el numerador o el denominador que formen una fracción como la pedida, o que se puede "seguir agregando dígitos después del punto decimal para siempre" (p. 314).

Otras actividades planteadas evidenciaron conflictos en relación a la convivencia de diferentes concepciones del infinito. Por ejemplo, se les dio dos segmentos denominados A y C tales que la longitud de A es igual a la de C+x (siendo x un real positivo) y se les preguntó sobre el número de puntos de la porción del segmento A que tiene longitud x. Después se les pidió opinión sobre un argumento según el cual habría infinitos puntos, dado que $\infty-\infty=\infty$. Esta pregunta condujo a los estudiantes a confrontar dos concepciones del infinito, el potencial, según el cual el infinito es visto como un proceso, y el actual, según el cual el infinito sería un número o entidad específica, visto como un objeto. También se solapaban concepciones finitistas que entraban en contradicción con las anteriores.

Mamolo (2009) concluye que las actividades propuestas en un contexto geométrico favorecen la conceptualización del infinito mediante la priorización de la "medición del infinito". Puede ser especialmente útil para comprender por qué no se puede definir la sustracción entre números transfinitos[2] y demás aspectos relativos a la aritmética transfinita.

En Pehkonen y Hamula (2006) también se analizan las concepciones de infinito por medio de un estudio centrado en el desarrollo cognitivo de los estudiantes. Los autores afirman que desde el inicio de la educación se abordan ejemplos relacionados con el infinito, pero casi siempre desde la concepción potencial. Plantean que el concepto de infinito desde sus orígenes ha sido problemático, por lo que ven lógico que los estudiantes presenten dificultades(lo que nos da la pauta de que el estudio no es meramente cognitivo sino que involucra también aspectos epistemológicos desde una

[2]Representación del cardinal de conjuntos infinitos construida por Cantor. Los números transfinitos refieren a los ordinales infinitos, mayores que cualquier natural.

perspectiva genética). Se analizan los resultados separándolos por cursos y edades, concluyendo que en cursos iniciales la concepción del infinito que predomina es la finitista y potencial y que esto va cambiando a medida que llegan a cursos más avanzados. Es importante destacar que los autores plantean que uno de los motivos en que muchos estudiantes tienen una concepción finitista del infinito se debe a que este concepto no se encuentra de manera explícita en los planes y programas.
Garbin y Azcárate (2002) se cuestionan cómo influyen los distintos registros: verbal, geométrico, gráfico, algebraico y analítico en la conformación de dichas inconsistencias de los alumnos, para lo cual diseñan un cuestionario con cinco actividades que involucra el mismo concepto (suma infinita de la serie geométrica de base ½), cada una asociada mayormente a uno de los registros mencionados. Buscan identificar, describir, categorizar y analizar las inconsistencias que manifiestan los alumnos en sus esquemas conceptuales asociados al concepto de infinito actual. Llegaron a la conclusión de que los alumnos pueden mantener respuestas coherentes y consistentes, coherentes pero inconsistentes o, dependiendo de la representación del problema, pueden dar una respuesta consistente o no con el concepto, que puede ser coherente o no con otra representación del mismo problema (en otro registro).Sugieren que al resolver problemas representados de diferentes formas, pero que contienen la misma noción matemática, el docente promoverá que sus estudiantes realicen conexiones logrando que no sean vistos como problemas aislados.

Hitt (2003) busca mostrar que para adquirir el concepto de límite se necesita superar el obstáculo que no permite distinguir entre las concepciones de los infinitos. Intenta responder si en los estudiantes y en los profesores de enseñanza media superior se presentan obstáculos de corte epistemológico. Plantea que algunos profesores tienen problemas a la hora de resolver actividades que involucren el concepto de infinito y que estos son transmitidos a sus alumnos. Concluye que hay dos tipos problemas: uno que tiene que ver con la complejidad del concepto que se quiere que los alumnos construyan, y el otro que tiene que ver con los obstáculos generados por la forma en que se aborda dicho concepto en el aula de matemática. El autor plantea la necesidad de iniciar una discusión sobre el infinito actual y el infinito potencial entre los profesores de matemática y diseñar nuevas actividades que puedan ayudar a mejorar la enseñanza del concepto.

1.2.2. Desde una perspectiva socioepistemológica

Existen también algunos estudios relativos al concepto de infinito desde la perspectiva socioepistemológica. Lestón (2011a) realiza una investigación acerca del infinito y su presencia en el discurso matemático escolar, detectando diferencias entre el concepto de infinito trabajado en la escuela y el que se aborda en los cursos de formación docente en Argentina.

> Desde un estudio socioepistemológico de la evolución del concepto de infinito, se lograron detectar los procesos, significados y preguntas que provocaron el surgimiento de esta noción, así como también permitió identificar prácticas sociales, prácticas de referencia y contextos de significación para los dos infinitos que se detectaron: uno vinculado con el análisis y el otro con el álgebra (Lestón, 2011a, p.1).

Por medio de un recorrido por la historia de los sucesos que llevaron a la construcción del infinito matemático, se puede identificar por un lado el infinito de los conjuntos, y por otro, el infinito del espacio. El primero es estático y entiende al infinito como lo que ya está acabado o bien no puede ser representado por cantidades finitas mientras que el otro es dinámico y permite explicar la posibilidad de continuación ilimitada de un proceso.

Con estas ideas de infinito se reconocen dos prácticas sociales que llevaron a la emergencia del infinito como concepto científico: la aritmetización de las cantidades por un lado, y la geometrización del espacio por otro. Cada una de ellas conduce a una concepción particular del infinito, que la autora asocia con las concepciones actual y potencial, respectivamente. Según Lestón (2011a), dichas prácticas deben ser puestas en juego en el discurso matemático escolar respecto del infinito.

En el trabajo de Acosta, Figares, López, Mesa, Molfino y Rivero, (2014) se presentan algunos de los resultados obtenidos a partir de un micro diseño de investigación que buscaba explicitar cómo conviven diferentes concepciones de infinito en estudiantes de la carrera de profesorado de Matemática del Consejo de Formación en Educación. Las autoras, inspiradas en el trabajo realizado por Garbin y Azcárate (2002), diseñaron una secuencia de actividades y la propusieron a estudiantes de formación docente. Basándose en el marco teórico expuesto en Lestón (2011a y b) analizaron las respuestas recogidas. La principal conclusión a la que arribaron es que en los estudiantes de formación docente conviven los diferentes tipos de infinito: potencial, actual y finitista.

En suma, los estudios reportados muestran, por un lado, que los estudiantes presentan dificultades cognitivas relativas al concepto de infinito y que también existen obstáculos epistemológicos intrínsecos a dicho concepto. Según esos estudios de corte cognitivo y/o epistemológico, una de las razones por las que se presentan esas dificultades radica en la manera en que es tratado el concepto en el ámbito escolar, tanto de forma explícita como en forma implícita, en el abordaje de otros contenidos matemáticos que precisan del infinito para su desarrollo. De ahí que consideremos fundamental el estudio del abordaje del concepto en el dme, en particular en los textos.

Por otro lado, los estudios de corte socioepistemológico brindan un marco teórico específico desde el cual entender al infinito ya que presentan una epistemología de prácticas relativa a él. Sin embargo, observamos que no existen estudios que desde esta perspectiva analicen cómo vive el infinito en libros de texto, tanto en lo relativo a los tipos de infinito que se pueden presentar como en lo relativo a los usos socioepistemológicos de ese saber.

En la siguiente sección fundamentamos, a partir de los antecedentes reportados, la pertinencia del estudio que nos proponemos.

Capítulo 2. Presentación de la problemática

2.1. Contexto, fundamentación y objetivos.

La enseñanza media uruguaya bien se puede realizar en seis años lectivos compuesta por dos núcleos: Ciclo Básico (CB) y Bachillerato Diversificado (BD), o por medio de los cursos que brinda la Universidad del Trabajo (UTU). Los docentes de Matemática de educación media se forman en el Instituto de Profesores "Artigas" (IPA) o en los diferentes Centros Regionales de Profesores (CeRP) e Institutos de Formación Docentes (IFD), que desde el año 2008 tienen unificado el plan de estudios en una carrera de 4 años de duración. En todos los años las asignaturas se dividen en asignaturas generales, comunes a todas las disciplinas, y asignaturas específicas.

Las asignaturas específicas en el profesorado de Matemática son Introducción a la Didáctica, Didáctica I, Didáctica II, Didáctica III, Fundamentos de la Matemática, Geometría, Análisis I, Análisis II, Geometría y Algebra lineal, Probabilidad y Estadística, Topología, Análisis del Discurso Matemático Escolar, Historia de la Matemática, Física y Profundizaciones (a optar entre Geometría, Álgebra o Análisis).En todas ellas de manera explícita o implícita se trabaja con el infinito. En los cursos de matemática de enseñanza media también se aborda el concepto de infinito, mayormente de forma implícita.

Nos proponemos en este estudio brindar herramientas que nos permitan responder la interrogante ¿a qué se debe que en los estudiantes convivan las diferentes concepciones de infinito? Tal "convivencia" es reportada por varias investigaciones, tanto enfocadas en lo cognitivo o epistemológico como de corte socioepistemológico (Mamolo, 2009; Garbin y Azcárate, 2002; Lestón, 2011; Acosta et al., 2014). Por su parte, Pehkonen y Hamula (2006) y Hitt (2003), además de identificar y caracterizar problemáticas relativas a la conceptualización del concepto de infinito, sugieren que una posible causa de ello radica en el dme: los primeros hacen especial mención a los programas mientras el segundo habla de obstáculos generados por la forma en que se aborda dicho concepto en el aula de matemática, esto es, el discurso docente en el aula así como sus decisiones respecto a qué textos, actividades, tipos de argumentos o preguntas opta por abordar.Ello nos conduce a intentar responder nuestra pregunta mediante el análisis del dme relativo al concepto de infinito.

Por otra parte, diversas investigaciones fundamentan sobre la importancia de los textos en la conformación de discursos, específicamente del dme, lo que hace que mediante su análisis podamos identificar rasgos conceptuales, didácticos o referidos a la organización del saber (Castañeda et al., 2010; Cordero y Flores, 2007 y Maldonado, et al. 2007).Dado que el estudio que operó de antecedente principal para esta investigación fue llevado a cabo con estudiantes del IPA (Acosta et al., 2014), consideramos pertinente analizar en particular algunos libros de texto utilizados como referencia en algunos de los cursos de la carrera de profesorado de Matemática en Uruguay.

A partir de las investigaciones reseñadas, entendemos que las causas por las que conviven en los estudiantes diferentes concepciones no son meramente cognitivas o epistemológicas, o didácticas. Sostenemos que la interrogante que nos proponemos responder nos conduce inevitablemente a un abordaje sistémico de las situaciones deconstrucción, difusión y adquisición del saber matemático. Es por eso que adoptamos a la socioepistemología (SE) como marco teórico. Otros abordajes no toman en cuenta algunos de los componentes del sistema didáctico (saber, estudiante y profesor), o bien no consideran la dimensión social como dimensión que resignifica a las restantes. En nuestro caso es necesario porque estamos analizando textos como componentes del dme, constructo concebido en el seno de la SE y porque entendemos que los “tipos” de infinito deben ser descriptos a partir de las prácticas que norman las actividades que nos permiten identificarlos. A su vez, el infinito vive de manera implícita en contextos extraescolares y también de manera implícita en la mayor parte de la escolarización. Sólo se explicita en niveles superiores. Entonces las experiencias previas, en el entorno social tanto de los estudiantes como de los autores de libros de texto, son indispensables para entender sus concepciones del infinito.

Es importante remarcar que no hemos identificado antecedentes directos para esta investigación. Si bien hemos detectado antecedentes sobre la importancia del análisis de los libros de texto y sobre los conflictos que presentan los estudiantes frente al concepto de infinito, no se evidenció ninguna que relacione ambos aspectos, por lo que consideramos muy pertinente la realización de la misma. Este trabajo intenta realizar aportes para la formación de profesores de matemática en el Uruguay con el fin de que los resultados encontrados y las conclusiones a las que se arribe puedan ser útiles para mejorar la formación de los futuros docentes. Sabemos que el concepto de infinito vive de forma implícita en nuestras aulas pero es raramente explicitado en alguna de las manifestaciones del discurso matemático escolar. Consideramos importante que los docentes y los futuros docentes sean conscientes de los diferentes usos que tiene el infinito así como también de la convivencia de los diferentes tipos de infinito, no solo en los estudiantes sino también en el dme, puntualmente en los textos que utilizamos. Entendemos que con esta investigación brindaremos herramientas para seguir explicitando parte de lo que se pone en juego cuando el infinito aparece, solapado, en el aula. Y así reflexionar sobre cómo las diferentes concepciones y diferentes usos del infinito conviven en el dme.

Para ello nos proponemos los siguientes objetivos generales y específicos.

Objetivo general

Realizar aportes que contribuyan a la reflexión en torno a los distintos tipos de infinito y usos del mismo que viven en la formación de profesores de matemática en el Uruguay.

Objetivos específicos

Identificar los diversos tipos de infinito presentes implícita o explícitamente en libros de texto de Análisis I, Análisis II y Topología, de los cursos de formación docente en Uruguay.

Por medio de la descripción de esos tipos de infinito buscaremos también identificar los usos socioepistemológicos del concepto de infinito en esos textos.

Capítulo 3 – Marco teórico

En este apartado presentamos las consideraciones teóricas sobre las que sustentamos el proyecto de investigación. Tal como señalamos en el capítulo anterior, entendemos que el objetivo propuesto debe ser abordado desde la perspectiva socioepistemológica.

La socioepistemología

> Se ocupa del estudio de fenómenos didácticos ligados al saber matemático asumiendo la legitimidad de toda forma de *saber*, sea este *popular, técnico u* o*culto*, pues considera que ellas, en su conjunto, constituyen la *sabiduría humana*. Así el programa socioepistemológico se caracteriza por explicar la *construcción social del conocimiento matemático* y la *difusión institucional*. (Cantoral, Reyes-Gasperini y Montiel, 2014, p. 2)

Basándonos en Cantoral, Farfán, Lezama y Martínez-Sierra (2006) y en Cantoral y Farfán (2003) podemos decir que la socioepistemologia busca explicar los fenómenos didácticos relativos a la matemática. Dicha explicación, no se centra solo en lo cognitivo o epistemológico en forma aislada, sino que busca un abordaje sistémico, interviniendo en el sistema didáctico en un sentido amplio, tomando en cuenta los fenómenos de producción, adquisición y difusión del conocimiento. El sistema didáctico se reformula ya que incorpora el estudio de la epistemología del conocimiento (polo del saber), los procesos cognitivos (polo del estudiante) y los mecanismos de institucionalización (polo del profesor) mediante la consideración de la dimensión sociocultural (nueva dimensión considerada por la perspectiva socioepistemológica).

En particular, usamos de esta perspectiva de investigación tres constructos concebidos a la interna de ella: la epistemología de prácticas (Montiel, 2011; Montiel y Buendía, 2012), los “tipos” de infinito (Lestón, 2011; Acosta et al., 2014) y la noción de usos del saber escolar (Cordero y Flores, 2007; Buendía, 2012; Fregueiro, 2014).Dedicamos los siguientes apartados al desarrollo de estos tres constructos.

3.1.El rol de las prácticas y el contexto de significación

El modelo de prácticas que propone Montiel (2011) articula prácticas sociales, prácticas de referencia y actividades para explicar la construcción del conocimiento matemático (figura 1).

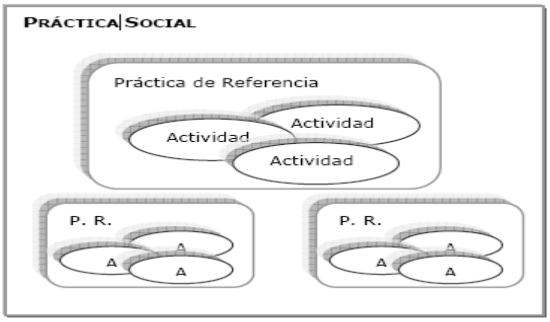


Figura 1. Un modelo epistemológico de prácticas

Se denomina *actividad* (explícita) a la que se observa en los individuos y grupos humanos. La *práctica de referencia* (PR) es el conjunto articulado de actividades intencionales que siguen un propósito específico enmarcadas en un paradigma específico. Por último, se entiende a las *prácticas sociales (PS)* como aquellas normativas de la actividad humana, aquello que hace que los individuos o grupos hagan lo que hacen (Covián, 2005). Cantoral et al. sostienen que las prácticas sociales tienen, además de la función normativa, la de generadora de conocimiento.

En Molfino (2010) se plantean algunas herramientas que permiten evidenciar ambas funciones de la práctica social. A través del proceso de institucionalización[3], entendido como un proceso que se evidencia a través del cambio y la permanencia del conocimiento, la práctica social adquiere la función normativa. El conocimiento matemático institucionalizado es considerado como aquello que permite el continuo de los saberes matemáticos.

> Construir conocimiento no se refiere exclusivamente a la adquisición de conceptos, sino también a la consideración de las prácticas sociales que dieron

[3]Desentrañar el proceso de institucionalización involucra el análisis de cómo se constituye y valida un determinado saber al cuerpo socialmente aceptado de conocimientos matemáticos y cómo las prácticas que norman el actuar de los actores del *ámbito científico* son traspuestas según lo que viven los actores del sistema educativo (*ámbito escolar)*, y cómo a su vez norman sus prácticas de referencia, específicas del paradigma en el que actúan. (Molfino y Buendía, 2014, p. 1220)

> origen y actualmente "dan vida" al conocimiento en cuestión. Las prácticas sociales se erigen así como generadoras de conocimiento matemático. Estas prácticas pueden ser propias de la actividad matemática académica tradicional o pueden ser externas a ella, lo que las caracteriza es que el conocimiento se origina y vive en ellas. (Molfino, 2010, p 68).

Para la descripción de los "tipos" de infinito nos es útil considerar también otro constructo propio de la socioepistemología, el *contexto de significación de cierto conocimiento*, concebido por Espinoza (2009): "es el ámbito en el cual cierta persona o colectivo sitúa la significación de cierto conocimiento en cierto escenario sociocultural." (p. 150)

3.2. Sobre los "tipos" de infinito

En la comunidad matemática y la de la matemática educativa es ampliamente aceptada la existencia de dos tipos o concepciones de infinito, el infinito actual y el potencial (Waldegg, 1996; Garbin y Azcárate, 2002; Hitt, 2003; Franco y Ochoviet, 2006, Mamolo, 2009; Pehkonen y Hamula, 2006). Generalmente estos dos infinitos son descriptos en términos intrínsecos a la matemática, según el tipo de proceso u objeto al que hacen referencia.

A los efectos de la presente investigación, esa descripción nos es insuficiente ya que no da cuenta de los móviles que conducen a la consideración, en uno u otro contexto, de uno u otro tipo de infinito, ni a lo que norma la construcción de dicho saber en los estudiantes. Es por eso que recurrimos a los constructos previamente presentados, el esquema de prácticas y la noción de contexto de significación, para describir lo que hemos identificado, siguiendo a Lestón (2011), como dos tipos de infinito que conviven tanto dentro como fuera de la escuela.

La descripción de Waldegg (1996) de ambos tipos de infinito nos brinda herramientas para identificar las actividades y prácticas asociadas a ellos:

Según ella, el infinito potencial es el que:

> Está asociada a la ausencia de límites o de fronteras, a la falta de conclusión o de término de un proceso que se repite o que progresa indefinidamente. Bajo esta significación, el infinito es, literalmente, *lo que no tiene fin*, lo que

> **siempre** (infinito temporal) se puede continuar. A este tipo de infinito lo llamamos *infinito potencial*, es el único infinito aceptado por Aristóteles y es el único infinito admitido en la ciencia hasta el siglo XIX. Un ejemplo claro de infinito potencial es la **serie** de los números naturales (los números "para contar"), en donde siempre es posible hallar el sucesor de un número dado, no importa qué tan grande sea este número, aunque siempre el número y el sucesor son **finitos. (**Waldegg, 1996, p 110)

Mientras que el infinito actual,

> Está asociado a la idea de totalidad, de completez y de unidad. Un proceso (potencialmente infinito en sus orígenes) se considera ahora *acabado* y los límites, *alcanzados*. Esta es la forma en la que el matemático piensa hoy en el *conjunto de* ***todos*** *los números*, sin que tenga la necesidad de nombrar o pensar cada uno de ellos, individualmente. Este infinito se llama *infinito actual* y ha jugado un papel capital en el desarrollo de la matemática moderna, a partir de la teoría de conjuntos creada por Georg Cantor a finales del siglo XIX. (Waldegg, 1996, p 110)

A partir de una investigación de corte socioepistemológico, Lestón (2011a) amplía estas descripciones de lo que llamaremos "tipos" de infinito haciendo uso del esquema de prácticas propuesto por Montiel (2011).

Para entender la práctica social y de referencia de cada uno de los tipos de infinito es necesario remitirnos aunque sea brevemente a su historia.

Tomando lo reportado en Acosta et al (2014)

> En una primera instancia el infinito surge exclusivamente como una noción filosófica o religiosa, como una propiedad asignada al espacio pero no como un elemento. Uno de los primeros registros que se tienen sobre discusiones en torno al concepto proviene de Grecia, ya en el siglo V a.C. se cuestionan sobre la posibilidad o no de realizar adiciones sucesivas sobre algo, en forma indeterminada. Zenón es uno de los primeros en enfrentarse con dicha inconsistencia al plantear su ya conocida paradoja de Aquiles y la tortuga.

> En el siglo XVII ubicamos a Isaac Newton cuya obra ha sido de gran importancia para el concepto en cuestión. Se ocupaba de concebir y medir el movimiento. (…) Newton necesitaba quitar los límites para explicar el movimiento, es por esto que aquí el análisis aparece como contexto de significación (el estudio de las curvas). Vale destacar que Newton compartía con Nicolás de Cusa (S. XV) que la extensión del espacio era infinita. (p15-16)
>
> Contemporáneamente a Newton, Joseph Raphson realiza una justificación axiomática de que el espacio es infinito, logrando así un avance en el *proceso de matematización* del mismo. En el siglo XVIII, si bien Bolzano no propone una definición de infinito matemático, propone críticas a las definiciones existentes que favorecen el desarrollo del concepto.
>
> Así se va conformando otra construcción del infinito que se basa en las cantidades (…). Esa construcción es la realizada en el siglo XIX por Georg Cantor, quien replantea la modelización del universo, pero no ya desde cuestiones relativas a la física sino a las cantidades. (p16-17)

Vemos que se puede identificar a lo largo de la historia un interés por dar respuesta a la pregunta ¿cuál es la extensión del espacio? Tanto Newton como Cantor dan respuesta a esta interrogante modelizando el universo, mediante un proceso que Lestón (2011a) denomina *matematización*[4].El primero se ocupa de los límites físicos, estudia la geometría del espacio y el segundo busca modelizar no sólo el universo en su conjunto sino todo aquello que fuera conocimiento de las ciencias naturales a partir de un sistema conceptual formal matemático mediante la atención a las cantidades.

El infinito de Newton y sus contemporáneos, es el que tradicionalmente se denomina infinito potencial, ellos se dedicaron a actividades específicas (predecir la posición de un móvil en un determinado momento, calcular la curvatura de un lente con aplicaciones para la óptica, etc.) las que estaban normadas por una práctica específica del paradigma de la época (relacionado más bien con fines prácticos, no interesaba la formalización). Esa práctica de referencia es la que Lestón (2011a) denomina *matematización del espacio*. A su vez, esa PR está normada por una práctica social, la

[4]"**Matematización**: proceso que permite el tratamiento matemático de un objeto o proceso que no es de naturaleza matemática, al menos en su origen." (Lestón, 2011a, p. 5)

geometrización del espacio[5]. El *contexto de significación* es el estudio de curvas (lo que hoy llamamos análisis).

Por otro lado, el infinito de Cantor es el que tradicionalmente se llama infinito actual. Él se dedicó a actividades específicas (contar y ordenar elementos como números y puntos; desarrollar una teoría para los números transfinitos tanto en su aspecto cardinal como ordinal) normadas por una práctica específica del paradigma de la época (tiene como propósito trabajar con el infinito como un objeto más de la matemática, bien definido, contenido en una estructura axiomático-deductiva, cuyas operaciones y relaciones con otros objetos están perfectamente determinadas). Esa práctica de referencia es la que Lestón (2011a) hadado en llamar *matematización de las cantidades*. A su vez, esa PR está normada por una práctica social, la *aritmetización de las cantidades*[6], el *contexto de significación* es el álgebra.

La siguiente tabla resume la descripción de cada tipo de infinito.

	Práctica Social	Práctica de referencia	Contexto de significación
Infinito Potencial	Geometrización del espacio.	Matematización del espacio.	Análisis
Infinito Actual	Aritmetización de las cantidades	Matematización de las cantidades	Álgebra

Figura 2. Esquema descriptivo de los tipos de infinito.

[5] "**Geometrización**: tratamiento geométrico de un objeto que no es una figura o cuerpo geométrico. En esta investigación, se entiende a la geometrización como el proceso que permite la matematización geométrica del espacio." (Lestón, 2011a, p. 4)

[6] "**Aritmetización**: tratamiento aritmético de un objeto o conjunto de objetos que no son un número. Se entiende en esta investigación como el proceso que lleva a permitir la operatoria con los números transfinitos, definidas en función a las operaciones aritméticas, de la manera en que lo hace Cantor con los números transfinitos." (Lestón, 2011a, p. 4)

3.3. Usos del conocimiento matemático escolar

Buendía (2012) plantea que "en el seno de una epistemología de prácticas -en este caso la del infinito- se manifiesta, necesariamente, el uso del conocimiento" (p. 14).Esto se contrapone con los fines de los sistemas educativos, ya que estos "se han preocupado por lo que sabe un estudiante o un docente, pero no por cómo se *usa* ese saber" (p.14).

Fregueiro (2014) sostiene que los usos buscan "dar explicaciones acerca del rol que tiene determinado saber en la construcción del conocimiento matemático" (p. 9). Los usos son los que nos permiten identificar "cómo es percibido un saber, cómo el sujeto actúa sobre este saber y qué función cumple este saber en un conjunto de tareas específicas que se organizan para resolver una situación determinada"(p.9). Hacen referencia a cómo funciona el conocimiento matemático utilizado por un grupo humano para resolver una situación específica.

Cordero y Flores, (2007) plantean que los usos tienen *funcionamientos* específicos que dependen de la situación y que conllevan *formas* específicas.

Basándonos en Buendía (2012) y en Cordero y Flores (2007), entendemos por *funcionamiento del conocimiento matemático* al conjunto de acciones, ejecuciones u operaciones que desempeña el conocimiento en una situación específica. Mientras que la *forma del conocimiento matemático* es su apariencia perceptible, como la manera en la que el sujeto actúa con ella y sobre ella en una cierta tarea. Se trata de un actuar en un sentido amplio, pues se consideran aspectos sobre cómo el sujeto calcula, cómo argumenta, cómo resuelve o incluso cómo representa, dependiendo de la tarea particular. Son las maneras en las que es percibido el conocimiento, cómo actúa el sujeto, cómo argumenta con el conocimiento matemático que se pone en juego para resolver una situación.

Fregueiro (2014) plantea que

> Los usos del conocimiento se manifiestan a través de la relación dialéctica forma-funcionamiento del saber en una situación específica. Cada forma-funcionamiento de un saber se transforma para dar lugar a nuevas formas-funcionamientos que generan nuevas situaciones específicas y viceversa,

> nuevas situaciones dan lugar a nuevas formas-funcionamientos que permiten identificar nuevos usos del saber en juego (2014, p. 42).

A continuación se muestran ejemplos de usos de los números reales detectados por Fregueiro (2014) en la obra de René Descartes con el fin de esclarecer, mediante la ejemplificación, las nociones previamente descriptas. Para cada uno identifica formas y funcionamientos asociados a situaciones específicas.

Uno de los funcionamientos que en la parte de la obra de René Descartes analizada por Fregueiro (2014) se pone en evidencia es el de los números en el contexto geométrico el cual está dado por la asignación de un segmento con un número real positivo. Por ello el uso de los números positivos está ligado solamente a números reales positivos construibles. Identificándose así los siguientes usos de los números.

1) ***Uso geométrico-aritmético***, asociado a la construcción de algoritmos geométricos para las operaciones aritméticas: multiplicación, división, extracción de la raíz cuadrada y potenciación de un número.

Las formas del número en este caso están vinculadas a segmentos de rectas, y algunos de sus funcionamientos se identifican en el segmento unidad, la multiplicación, el trabajo con números racionales positivos y números irracionales positivos construibles por el método euclidiano.

2) ***Uso geométrico-algebraico,*** asociado a la construcción de algoritmos geométricos para la resolución de determinadas ecuaciones algebraicas.

Las formas aquí son, además de las anteriores, la asociación de letras a los segmentos y a las operaciones definidas, y expresiones algebraicas definidas en el contexto geométrico. Los funcionamientos se relacionan con la construcción geométrica de soluciones.

3) ***Uso geométrico-analítico***, asociado a la representación algebraica de problemas originados en el contexto geométrico. Descartes busca presentar una solución general para el problema de Pappus.

Las formas están asociadas a segmentos vinculados por ciertas relaciones, letras y expresiones algebraicas definidas geométricamente y la presencia incipiente de ejes coordenados. Sus funcionamientos se perciben en la igualación de expresiones, identificación de relaciones de proporcionalidad, sustitución de expresiones equivalentes y construcción de soluciones para la expresión algebraica encontrada.

Nuestro objetivo consiste en identificar las diversas nociones de infinito presentes en libros de texto utilizados en el Profesorado de Matemática en Uruguay. Por un lado, entendemos que el análisis necesario para tal identificación nos conducirá a identificar los usos del infinito en esos textos, en el sentido de lo desarrollado en la sección 3.3.Por otro lado, esas nociones, presentes ya sea implícita o explícitamente, serán descriptas en términos de los "tipos" de infinito que caracterizamos en la sección 3.2.

Para lograr nuestro objetivo, nos proponemos analizar en concreto las *actividades* inherentes al diseño de los textos (introducción a los temas, definiciones adoptadas, enunciados de axiomas y propiedades, presentación o no de demostraciones, ejemplos y no ejemplos propuestos, actividades para el lector, entre otras). Tal análisis nos dará pautas para, por un lado, inferir qué prácticas sociales y de referencia norman la aparición del infinito en los textos, y por otro, identificar los usos que en ese contexto se le da a uno y otro tipo de infinito. En el siguiente capítulo desarrollamos la metodología empleada para lograr el objetivo propuesto.

Capítulo 4. Aspectos metodológicos

Este trabajo propone un marco teórico y metodológico para analizar cómo vive el concepto de infinito en libros de texto utilizados en asignaturas de la carrera de profesorado de Matemática. En particular proyectamos el análisis de tres libros de texto, basándonos para su selección en lo que algunos docentes a cargo de los cursos Análisis I, Análisis II y Topología en el IPA y Profesorado Semipresencial recomiendan como libros de referencia para los mismos. Ellos son: *Cálculo infinitesimal en una variable*, (De Burgos, 2007), *Problemas y Teoremas de Análisis Matemático. Integrales Impropias y Series*, (Borghi, 2005) y *Topología General* (Munkres, 2002), correspondientes a los cursos mencionados, respectivamente.

4.1. Texto seleccionado para analizar

Dado el alcance de esta tesina y con el objetivo de mostrar la viabilidad del proyecto, seleccionamos solo uno de los libros y realizamos sobre este un estudio exploratorio y descriptivo, donde se muestran fragmentos del libro que nos permiten visualizar qué tipo de infinito "vive" en ese texto y sugerir algunos usos socioepistemológicos del concepto.

El texto seleccionado fue el de Análisis I, "Cálculo infinitesimal de una variable" De Burgos (2007). Por un lado, seleccionamos un texto usado como referencia en el curso de Análisis I debido a que dicho curso demanda una concepción actual para el infinito, pero también involucra al infinito potencial al nutrirse de actividades que se guían por la matematización y geometrización del espacio. Por ejemplo, la actividad de graficar funciones que modelan fenómenos relativos al comportamiento de los cuerpos en el espacio. Newton desarrolló su trabajo precisamente con el fin de modelar ese tipo de fenómenos; y si bien lo realizado por Newton no está presente explícitamente en los cursos, sí puede pensarse como el germen de lo que hoy se enseña en Análisis.

En el curso de Análisis I, el infinito se usa tanto para teorizar y comprender conceptos abstractos como el de límite, como para simbolizar objetos como un intervalo no acotado. Suponemos a priori que en un texto que se use como referencia para ese curso deberían también hacerse presentes esos diferentes usos.

Por otro lado, seleccionamos en particular ese texto, dado que si bien no es un texto que se trabaje en clase con los estudiantes, muchas veces es utilizado por los docentes para la elaboración de fichas de trabajo para los alumnos. Para recabar esa información se realizó un sondeo preguntándole a algunos docentes que están a cargo o estuvieron a cargo del curso de Análisis I, observando que este libro es común en su bibliografía. Eso lo posiciona como un texto que influye fuertemente en la manera en que los profesores presentan los contenidos en clase. Otro factor que incidió para seleccionar este libro de texto fue el abordar, entre otros, los mismos contenidos del curso de Análisis I, estos son: Revisión de número real y su topología; Sucesiones y series numéricas; Funciones reales; Desarrollos de Taylor; Integral de Riemann e Integrales impropias.

Finalmente aclaramos que no realizamos un análisis exhaustivo del texto, sino que seleccionamos algunos fragmentos para ilustrar la pertinencia del marco teórico-metodológico creado y mostrar algunos hallazgos que consideramos interesantes.

4.2. Elementos a tener en cuenta para el análisis

En los libros de texto se buscará analizar las *actividades*, inherentes al diseño de los textos, única dimensión explícitamente observable del esquema de prácticas. Se mirará la introducción a los temas, definiciones adoptadas, enunciados de axiomas y propiedades, presentación o no de demostraciones, tipo de demostraciones, ejemplos y no ejemplos propuestos, actividades para el lector, entre otras, esto nos permitirá dar pautas para inferir qué práctica sociales y de referencia norman la aparición del infinito en los textos.

Como ya se planteó en el apartado4.1, se considera que el libro de texto seleccionado tendrá potencial para la identificación de los usos que en ese contexto se le da a uno y otro tipo de infinito, para esto se determinará las diferentes formas y funcionamientos del infinito para poder inferir sus usos.

A continuación esquematizamos la manera en que consideramos que los aspectos que se tienen en cuenta para el análisis pueden ayudarnos a distinguir entre uno u otro tipo de infinito.

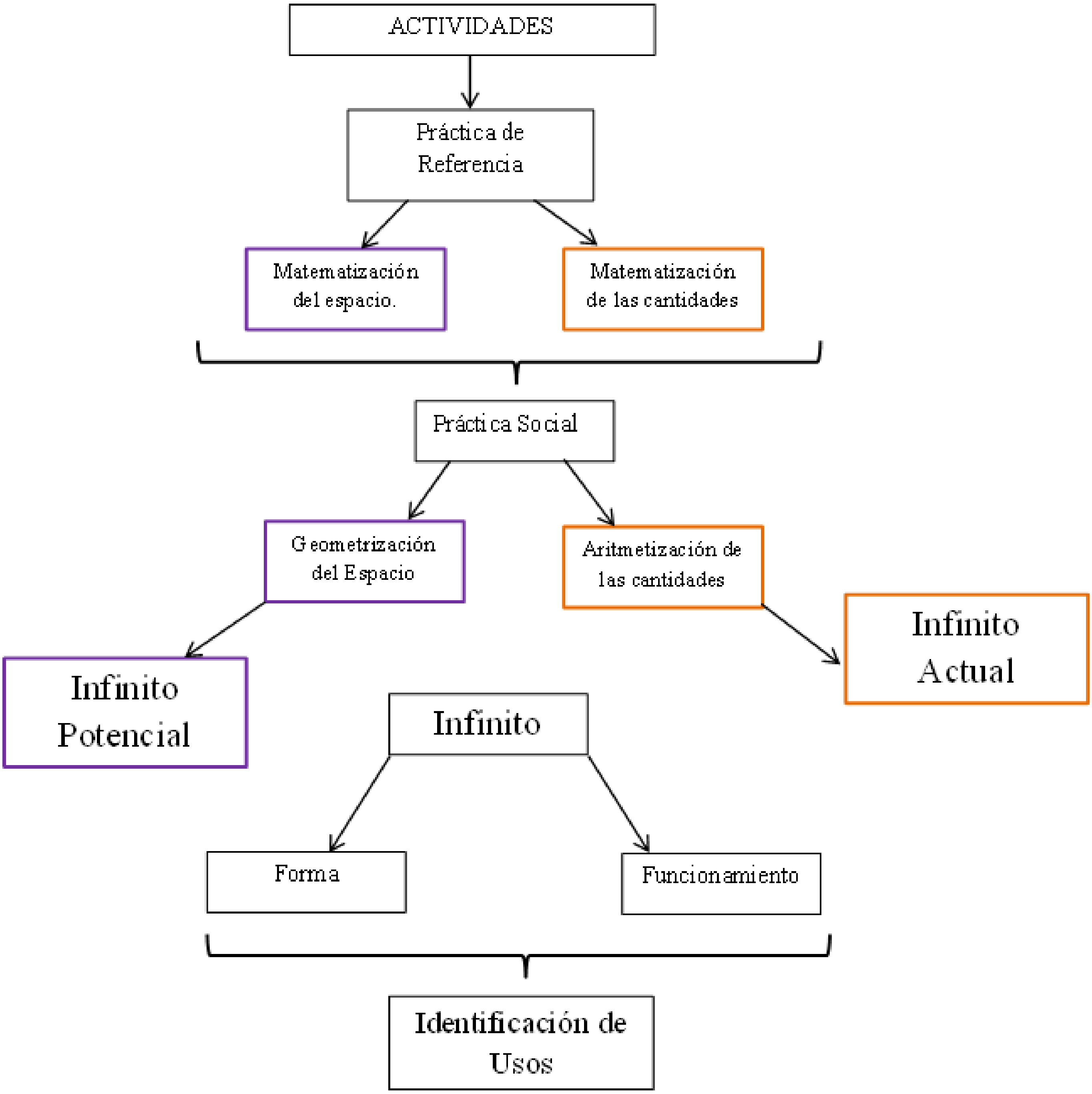


Figura 3 – Esquema teórico-metodológico de la investigación.

Capítulo 5: Análisis del texto de *De Burgos* (2007) (Análisis I)

Como planteamos en la metodología, de los tres libros considerados relevantes para implementar la investigación, optamos por mostrar la viabilidad de la misma mediante el análisis del texto *Cálculo infinitesimal de una variable* (De Burgos, 2007). Este libro es utilizado por algunos docentes de profesorado de matemática para la elaboración de sus fichas de trabajo del curso de Análisis I: si bien no es un libro que los docentes recomienden a sus alumnos para estudiar de él, es utilizado al momento de planificar las clases.

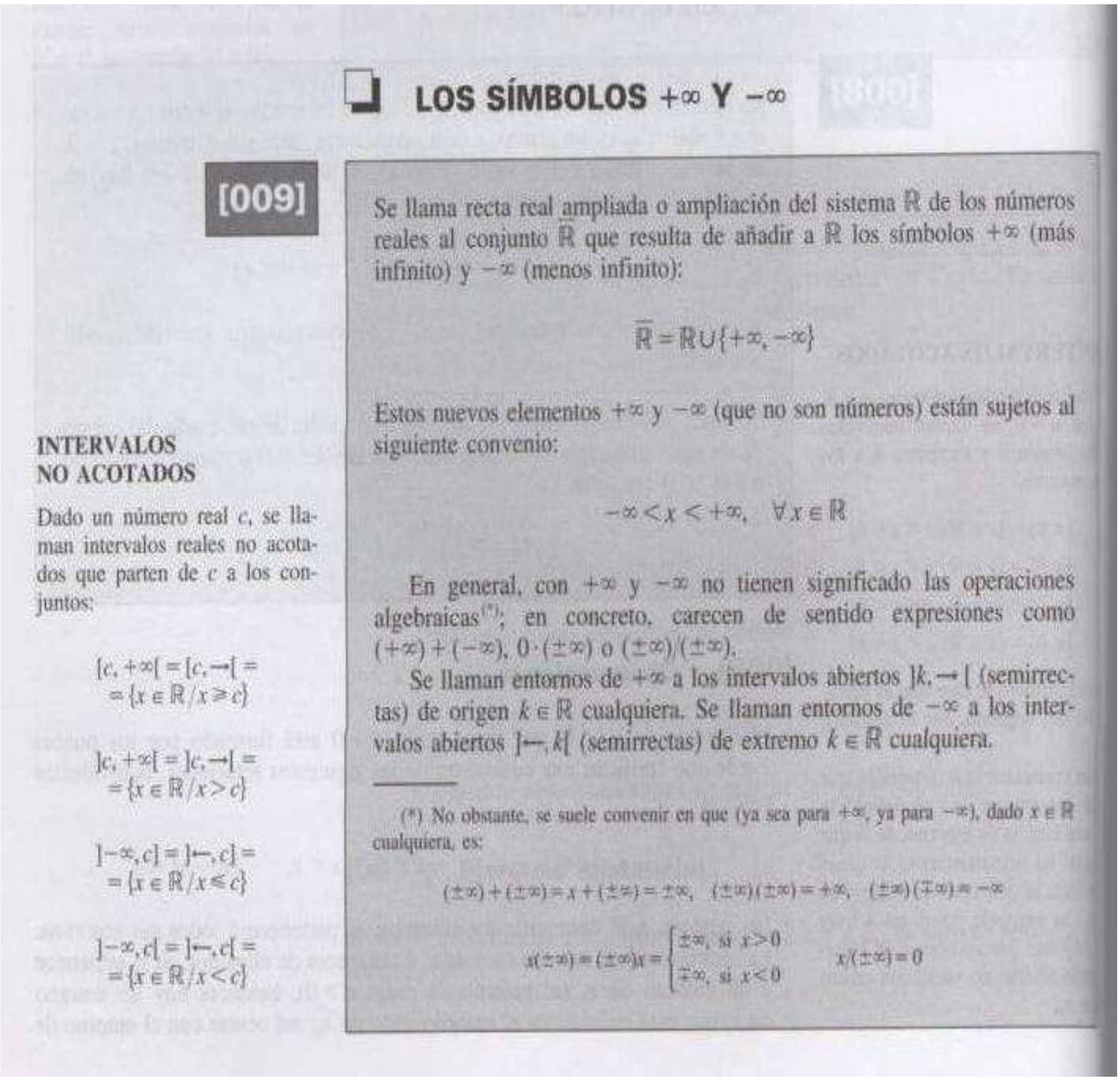
El libro seleccionado presenta los mismos contenidos que se abordan en el curso de Análisis I del profesorado de Matemática, estos son: Revisión de número real y su topología; Sucesiones y series numéricas; Funciones reales; Desarrollos de Taylor; Integral de Riemann e Integrales impropias.

Basándonos en el hecho de que el contexto de significación de este texto es, esencialmente, el estudio de las curvas (Análisis), previo al análisis supusimos que el tipo de infinito que predominaría sería el potencial. Sin embargo, un análisis detallado nos permitió identificar dos tipos de situaciones: unas en las que los tipos actual y potencial de infinito se superponen, pueden detectarse simultáneamente, dependiendo de la lectura que se hace, y otro grupo de situaciones en las que detectamos explícitamente el tipo de infinito actual. Desarrollamos ambos tipos de situaciones en el apartado 5.1. A su vez, logramos detectar a partir del análisis propuesto, una serie de usos que pensamos pueden ser también detectados en otros textos u otros componentes del dme, esto lo desarrollamos en el apartado 5.2.

5.1. Sobre los “tipos” de infinito

5.1.1. Situaciones en las que conviven ambos tipos de infinito

En esta sección mostramos distintas imágenes del libro de texto, donde dependiendo de la lectura que se realice estamos frente a uno u otro tipo de infinito.



LOS SÍMBOLOS $+\infty$ Y $-\infty$

[009]

Se llama recta real ampliada o ampliación del sistema $\mathbb{R}$ de los números reales al conjunto $\overline{\mathbb{R}}$ que resulta de añadir a $\mathbb{R}$ los símbolos $+\infty$ (más infinito) y $-\infty$ (menos infinito):

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$$

Estos nuevos elementos $+\infty$ y $-\infty$ (que no son números) están sujetos al siguiente convenio:

$$-\infty < x < +\infty, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

En general, con $+\infty$ y $-\infty$ no tienen significado las operaciones algebraicas(*); en concreto, carecen de sentido expresiones como $(+\infty)+(-\infty)$, $0\cdot(\pm\infty)$ o $(\pm\infty)/(\pm\infty)$.

Se llaman entornos de $+\infty$ a los intervalos abiertos $]k, \rightarrow[$ (semirrectas) de origen $k \in \mathbb{R}$ cualquiera. Se llaman entornos de $-\infty$ a los intervalos abiertos $]\leftarrow, k[$ (semirrectas) de extremo $k \in \mathbb{R}$ cualquiera.

(*) No obstante, se suele convenir en que (ya sea para $+\infty$, ya para $-\infty$), dado $x \in \mathbb{R}$ cualquiera, es:

$$(\pm\infty)+(\pm\infty) = x + (\pm\infty) = \pm\infty, \quad (\pm\infty)(\pm\infty) = +\infty, \quad (\pm\infty)(\mp\infty) = -\infty$$

$$x(\pm\infty) = (\pm\infty)x = \begin{cases} \pm\infty, & \text{si } x>0 \\ \mp\infty, & \text{si } x<0 \end{cases} \qquad x/(\pm\infty) = 0$$

INTERVALOS NO ACOTADOS

Dado un número real c, se llaman intervalos reales no acotados que parten de c a los conjuntos:

$$[c, +\infty[= [c, \rightarrow[= \{x \in \mathbb{R} / x \geq c\}$$

$$]c, +\infty[=]c, \rightarrow[= \{x \in \mathbb{R} / x > c\}$$

$$]-\infty, c] =]\leftarrow, c] = \{x \in \mathbb{R} / x \leq c\}$$

$$]-\infty, c[=]\leftarrow, c[= \{x \in \mathbb{R} / x < c\}$$

Figura 4 - De Burgos, 2007, p. 22.

En la figura 4 se observa que se realiza una separación del infinito entre más y menos infinito, el hecho de asignarles el símbolo de $+\infty$ y $-\infty$ se podría entender que es para darle una ubicación espacial en la recta numérica. A su vez, no solo aparece la distinción de $+\infty$ y $-\infty$ sino también se propone una relación de orden en el conjunto unión de los reales con estas dos nuevas entidades. Es decir, además de darle una ubicación espacial al infinito, este es usado para dar una ubicación espacial a los números reales. Al principio menciona que considerará a la "recta real ampliada", lo que nos sugiere un interés explícito por encontrar un modelo geométrico para el conjunto nuevo a definir (el de los reales unión esos dos nuevos objetos, $+\infty$ y $-\infty$).

La actividad que aquí describimos nos permitiría inferir que la práctica de referencia es la matematización del espacio y la práctica social que norma esta actividad, presentación de los símbolos de + ∞ y – ∞, es la geometrización del espacio. Es por esto que consideramos que el infinito potencial subyace en estas actividades. Por otra parte, cuando aparece "$-\infty < x < +\infty$, $\forall x \in$ R", nuevamente aparecería una noción apegada a lo potencial dado que esa x varía entre esos "extremos". Sugiere la idea de que dado un real x cualquiera, siempre hay otro mayor que él y que a su vez es menor que +∞. Por otra parte, el texto aclara que "con +∞ y -∞ no tienen significado las operaciones algebraicas", cuestión distinta, por ejemplo, a lo que hace Cantor, que es justamente operar con esos transfinitos, actividad para la cual sería necesaria la consideración de la concepción actual del infinito. Esa afirmación nos da más herramientas sobre la consideración de la concepción potencial del infinito.

Por último mencionamos algo que es lo que más nos llama la atención de esta página: la manera de introducir al concepto de infinito en el texto prioriza lo simbólico, sin explicitación alguna sobre el significado del término. Se "añaden" dos símbolos a un conjunto de números, conformando un nuevo conjunto conformado por números y otros dos nuevos objetos no definidos (sólo se los caracteriza mediante el "convenio" $-\infty < x < +\infty$, para todo x real). No se presenta significado asociado a los símbolos + ∞ y – ∞. Simplemente los describe como "símbolos". Esto nos invita a reflexionar que se introduce un infinito a manera de símbolo para completar algo que supuestamente será útil matemáticamente pero que deja al descubierto que no se le asigna un significado claro para el estudiante. El infinito se conforma así como una especie de concepto primitivo, sin una definición formal o de ningún tipo explícita para el estudiante. Podríamos afirmar que es una noción transparente, en el sentido de que el autor no considera relevante su definición, asume que los estudiantes ya saben su significado o no tiene interés en explicitarlo.

Esto nos conduce a una interrogante: ¿por qué si funcionan simplemente como símbolos se les atribuyen los símbolos de +∞ y –∞? ¿No bastaría con un sólo símbolo? Consideramos que la respuesta a esta interrogante está relacionada con la geometrización del espacio, el autor precisa poner + ∞ y – ∞ para poder describir geométricamente la posición de x, le da una forma a algo que es abstracto, que es el conjunto de los reales. Esta notación le permite modelar geométricamente el conjunto de los números reales.

Por otro lado también se puede realizar la siguiente lectura, se utiliza al infinito como algo nuevo, como un objeto (sólo definido como un símbolo) que es considerado comparable con cualquier real, mediante una relación de orden que opera como la generalización para el espacio $\overline{\mathrm{R}}$ de la relación de orden en R.

Si bien existe una ubicación espacial (es ineludible ya que los ubica en la recta numérica), al incluirlos a manera de elementos de un conjunto, los está tratando como números (si bien sabemos que no lo son y queda claro en el texto), esto es, como objetos comparables con los números reales, al escribir los elementos de un conjunto. En esa actividad no hay una visión potencial, es la representación del infinito actual que el autor toma e incluye a manera de elemento de un conjunto. De alguna manera hay un interés por encontrar un modelo para un conjunto de números, esto es, modelizar las cantidades. No para comparar la cantidad de elementos de R con otro (como podría ser en la teoría de los transfinitos), pero sí para comparar los elementos a la interna del propio conjunto R. De ahí que sugerimos que esta actividad también está guiada por otro tipo de práctica, la aritmetización de las cantidades, y por eso sugerimos que la concepción que subyace a ella es la del infinito actual.

Aquí es importante resaltar cómo a pesar de estar bajo el contexto de significación del estudio de las curvas, típico del infinito potencial, "vive" de alguna manera en el texto el infinito actual.

SUPREMO E ÍNFIMO DE CONJUNTOS NO ACOTADOS

Si un conjunto $C \neq \varnothing$, de números reales, no está acotado superiormente (acotado inferiormente), se dice que su supremo es $+\infty$ (su ínfimo es $-\infty$).

Observación

El hecho de que C no esté acotado superiormente (inferiormente) significa que, para cualquiera que sea $k>0$, existe algún elemento $c \in C$ tal que $k<c$ (tal que $c<-k$). Si tenemos en cuenta que $x<+\infty$ (que $-\infty<x$) para cualquier $x \in \mathbb{R}$, la anterior definición de supremo e ínfimo, para conjuntos no acotados, puede expresarse en la forma:

$$[+\infty \text{ es el supremo de } C] \Leftrightarrow \begin{cases} c<+\infty,\ \forall c \in C \\ \forall k>0,\ \exists c \in C / k<c \end{cases}$$

$$[-\infty \text{ es el ínfimo de } C] \Leftrightarrow \begin{cases} -\infty<c,\ \forall c \in C \\ \forall k>0,\ \exists c \in C / c<-k \end{cases}$$

La anterior observación pone de manifiesto que esta generalización de los conceptos de supremo y de ínfimo responde a la misma idea que animó la definición anterior (véase [034]), esto es, la de extremos de los conjuntos acotados.

Figura 5 - De Burgos, 2007, p. 79.

Analizando la figura 5 nuevamente identificamos la separación del infinito entre $+\infty$ y $-\infty$, por lo que podemos realizar las mismas observaciones que las realizadas para la figura 4 respecto a la superposición de las concepciones actual y potencial del infinito. Además, el concepto en sí continúa sin definirse, se utiliza solamente el símbolo que lo representa para cubrir necesidades de notación y generalización del concepto de supremo, pero sin atribuirle un significado explícito. Se prioriza una necesidad del autor de presentar formalmente el contenido por sobre la necesidad del estudiante de comprender de qué se les está hablando.

Por otra parte esta página tiene particularidades que consideramos interesante subrayar. Se propone que $+\infty$ puede ser el supremo de un conjunto de reales. La actividad de considerar al infinito como un objeto, representado mediante un símbolo, que incluso podría ser, en determinado contexto, operable (en particular comparable) con los números reales, le está dando estatus de cantidad. Ello nos conduce a pensar que la práctica de referencia es la matematización de las cantidades (el móvil sería modelar la cantidad de números reales) y la práctica social que norma estas actividades es la aritmetización de las cantidades.

Por ende en la figura 5 podemos decir que conviven ambas concepciones de infinito, la actual y la potencial.

SUCESIONES DIVERGENTES O «INFINITOS»(**)

Le ha llegado el turno a las «sucesiones con límite infinito» (más infinito o menos infinito). Se trata de las sucesiones en las que el valor de su término n-ésimo llega a ser tan grande como se quiera (en el caso de «más infinito») con tal de tomar un valor para n suficientemente avanzado. A estas sucesiones las llamaremos divergentes y diremos que son «infinitos».

[014]

Definición.—Diremos que una sucesión (x_n), de números reales, es divergente o que es «un infinito» si tiene límite $+\infty$ (se pone $\lim x_n = +\infty$) o si tiene límite $-\infty$ (se pone $\lim x_n = -\infty$), de acuerdo con el siguiente convenio (condición «$k:\nu$»):

$$\begin{cases} \lim x_n = +\infty & \text{significa que:} \quad \forall k>0,\ \exists \nu \in \mathbb{N} / n \geq \nu \ \Rightarrow\ x_n > k \\ \lim x_n = -\infty & \text{significa que:} \quad \forall k>0, \exists \nu \in \mathbb{N} / n \geq \nu \ \Rightarrow\ x_n < -k \end{cases}$$

I. Dadas dos sucesiones de números reales, (x_n) e (y_n), se verifica que:

a) $\lim x_n = +\infty$ equivale a $\lim(1/x_n) = 0^+$
$\lim(x_n) = -\infty$ equivale a $\lim(1/x_n) = 0^-$

b) Si $\lim x_n = +\infty$ o $-\infty$, si $(1/|y_n|)$ esta acotada(*) y si $x_n y_n$ tiene signo constante, entonces $\lim(x_n y_n) = +\infty$ o $-\infty$.

c) Si $\lim x_n = +\infty$ e (y_n) está acotada inferiormente, entonces $\lim(x_n + y_n) = +\infty$.
Si $\lim x_n = -\infty$ e (y_n) está acotada superiormente, entonces $\lim(x_n + y_n) = -\infty$.

II. Si (x_n) es una sucesión creciente (decreciente) y no acotada superiormente (inferiormente), entonces (x_n) tiene límite $+\infty$ (límite $-\infty$). Se dice que este límite es el supremo (ínfimo) de la sucesión (no acotada).

(*) Esta condición significa que existe un $k>0$ tal que $|y_n| \geq k > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (basta con que lo sea «a partir de cierto índice»). Esta condición se cumple, por ejemplo, si (y_n) tiene límite no nulo.

No se dice aquí que tengan límite infinito aquellas sucesiones (x_n) de signo cambiante que en valor absoluto tienden a infinito; es decir, aquéllas en las que x_n es positivo y «muy grande» para unas $n \to \infty$ y es negativo y «muy grande» para otros valores de $n \to \infty$. Para decir que (x_n) es «un infinito» no es, pues, suficiente con que, dada $k>0$, «a partir de un cierto índice» sea $|x_n| > k$; se exige también que x_n tenga signo constante a partir de un índice.

(**) La expresión «sucesión divergente» se suele usar también con el significado de sucesión no convergente. Nosotros llamamos sucesión divergente a la que tiene límite $+\infty$ o $-\infty$; a las sucesiones que carecen de límite (finito o infinito) las llamaremos oscilantes.

Demostración

a) Consideremos el caso de $+\infty$; para $-\infty$ se razona de igual modo:

- Si $\lim x_n = +\infty$, y dado arbitrariamente $\varepsilon > 0$, según la condición «$k:\nu$» de límite infinito (en la que tomamos $k = 1/\varepsilon$), se sabe que es $x_n > k = 1/\varepsilon > 0$ «a partir de cierto índice», luego es $0 < 1/x_n < \varepsilon$ «a partir de cierto índice», es decir, se verifica que $\lim(1/x_n) = 0^+$.
- Si $\lim(1/x_n) = 0^+$, y dado arbitrariamente $k>0$, según la condición «$\varepsilon:\nu$» de límite (en la que tomamos $\varepsilon = 1/k$), se sabe que $0 < 1/x_n < \varepsilon$ «a partir de cierto índice», luego $x_n > 1/\varepsilon = k > 0$ «a partir de cierto índice», es decir, se verifica que $\lim x_n = +\infty$.

b) Supongamos que x_n e y_n son ambos positivos; para los demás casos se razona de modo análogo. Como $\lim x_n = +\infty$, por la propiedad anterior se sabe que $\lim(1/x_n) = 0^+$; como, además, $(1/y_n)$ está acotada, de la propiedad [012],*c* (de los infinitésimos) se desprende que $(1/(x_n y_n))$ es un infinitésimo y, como $1/x_n y_n > 0$, resulta que $\lim(1/x_n y_n)) = 0^+$, o sea $\lim(x_n y_n) = +\infty$, como había que comprobar.

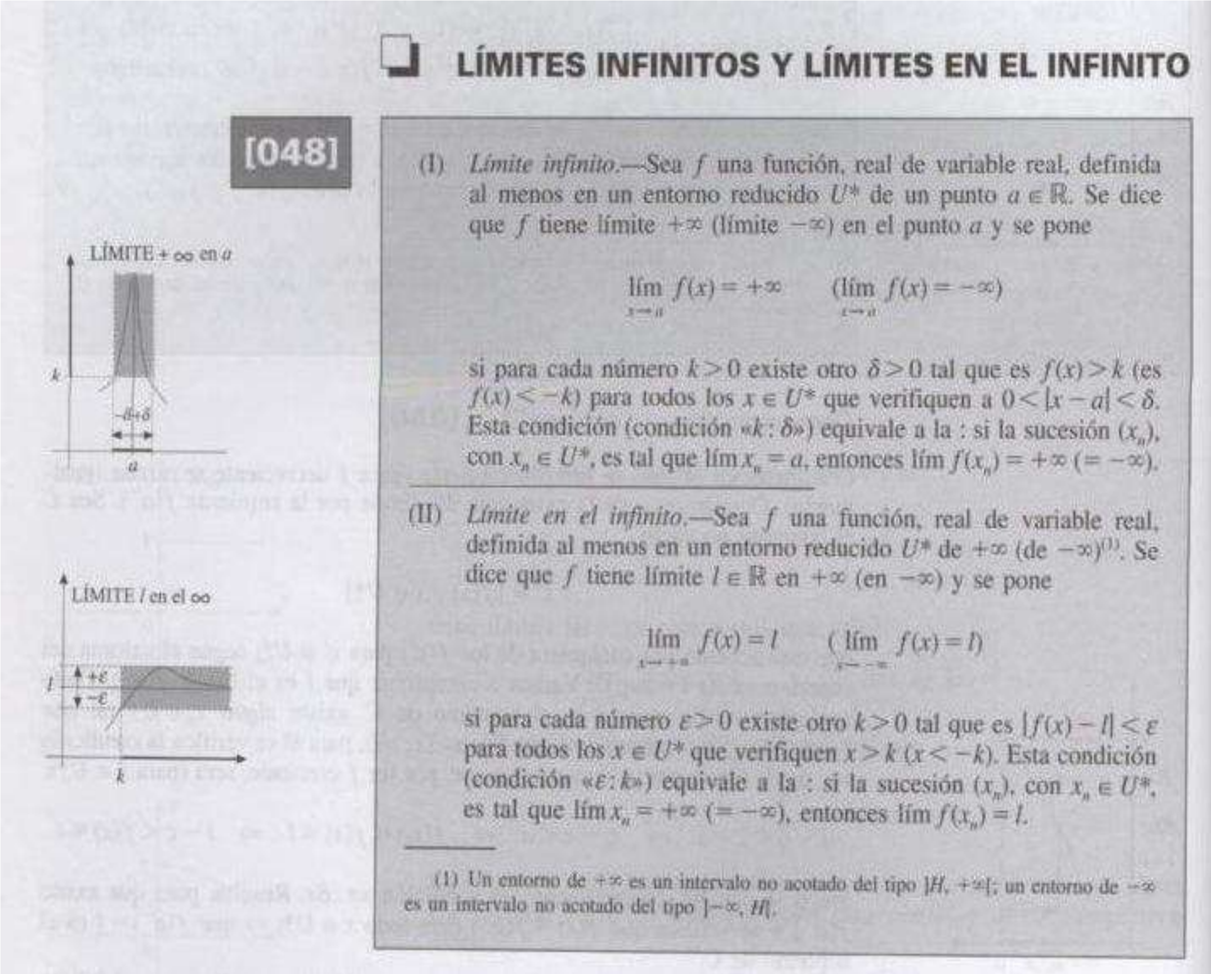
c) Sólo vamos a considerar el caso de $+\infty$; para $-\infty$ se puede razonar de manera similar. Llamemos $h<0$ a una cota inferior de (y_n), de manera que es $h \leq y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Dado arbitrariamente $k>0$, según la condición «$k:\nu$» de límite infinito (aplicada a (x_n) y tomando $k-h$, en lugar de k), se sabe que es $x_n > k-h$ «a partir de cierto índice», luego «a partir de cierto índice» se verifica que

$$x_n + y_n > (k-h) + h = k$$

lo cual significa que $\lim(x_n + y_n) = +\infty$.

II. Consideremos el caso de ser (x_n) creciente (para decreciente se razona de modo análogo). Dado arbitrariamente $k>0$, como (x_n) no está acotada superiormente, existe algún elemento de la sucesión, el x_ν, tal que $x_\nu > k$; como (x_n) es creciente, para todo $n \geq \nu$ es $x_n \geq x_\nu$, luego también es $x_n > k$, resultando, pues, que para (x_n) se verifica la condición «$k:\nu$» de límite $+\infty$.

Figura 6- De Burgos, 2007, p. 32-33.



LÍMITES INFINITOS Y LÍMITES EN EL INFINITO

[048]

(I) *Límite infinito.*—Sea f una función, real de variable real, definida al menos en un entorno reducido U^* de un punto $a \in \mathbb{R}$. Se dice que f tiene límite $+\infty$ (límite $-\infty$) en el punto a y se pone

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty \qquad (\lim_{x \to a} f(x) = -\infty)$$

si para cada número $k > 0$ existe otro $\delta > 0$ tal que es $f(x) > k$ (es $f(x) < -k$) para todos los $x \in U^*$ que verifiquen a $0 < |x - a| < \delta$. Esta condición (condición «$k : \delta$») equivale a la : si la sucesión (x_n), con $x_n \in U^*$, es tal que $\lim x_n = a$, entonces $\lim f(x_n) = +\infty$ $(= -\infty)$.

(II) *Límite en el infinito.*—Sea f una función, real de variable real, definida al menos en un entorno reducido U^* de $+\infty$ (de $-\infty$)(1). Se dice que f tiene límite $l \in \mathbb{R}$ en $+\infty$ (en $-\infty$) y se pone

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l \qquad (\lim_{x \to -\infty} f(x) = l)$$

si para cada número $\varepsilon > 0$ existe otro $k > 0$ tal que es $|f(x) - l| < \varepsilon$ para todos los $x \in U^*$ que verifiquen $x > k$ $(x < -k)$. Esta condición (condición «$\varepsilon : k$») equivale a la : si la sucesión (x_n), con $x_n \in U^*$, es tal que $\lim x_n = +\infty$ $(= -\infty)$, entonces $\lim f(x_n) = l$.

(1) Un entorno de $+\infty$ es un intervalo no acotado del tipo $]H, +\infty[$; un entorno de $-\infty$ es un intervalo no acotado del tipo $]-\infty, H[$.

Figura 7- De Burgos, 2007, p. 118.

Presentamos juntas las figuras 6 y 7 porque a pesar de estar en capítulos diferentes del libro, refieren a actividades similares respecto al concepto de infinito: en ambas se definen funciones de límite infinito. En el primer caso se trata de funciones de dominio natural –sucesiones-, y en el segundo se tratan funciones de dominio real. Además, en la figura 6 se presentan enunciados de proposiciones y sus demostraciones relativas a sucesiones de límite infinito.

En la figura 6 previo a la definición está el siguiente comentario:

Le ha llegado el turno a las "sucesiones con límite infinito" (más infinito o menos infinito). Se trata de sucesiones en las que el valor su término n-ésimo llega a ser tan grande como se quiera (en caso del "más infinito") con tal de tomar un valor para n lo suficientemente avanzado. A estas sucesiones las llamaremos divergentes y diremos que son "infinitos".

En este comentario podemos ver una noción intuitiva del límite de una sucesión divergente, esta se nos presenta previo a la definición formal de límite de una sucesión divergente, nos permite visualizar la idea de proceso dinámico, se plantea que el valor del término n-ésimo puede ser tan grande como se quiera.

Luego plantea una definición formal:

> *(...) una sucesión, de números reales, es divergente si tiene límite +∞ de acuerdo con el siguiente convenio:*
>
> $$lím\ x_n = +\infty\ significa\ que: \forall k > 0\ \ \exists v \in \mathbb{N}; n \geq v \Rightarrow x_n > k$$

El proceso dinámico es evidenciado también en la definición: que una sucesión tenga límite $+\infty$ implica que para un *k* dado, existe un *v* que nos garantiza que $x_n > k$ para los *n* mayores que *v*. Para otro *k* obtengo otro *v* y así sucesivamente.

Esta misma idea del proceso se la puede observar en las demostraciones que aparecen en la Figura 6 ya que utilizan la condición $\ll k, v \gg$ que se desprende de las definiciones de sucesiones divergentes.En ellas se plantea que a partir de cierto índice se cumple que $x_n > k$, por lo que el proceso dinámico lo observamos al ir tomando valores de k cada vez mayores, este proceso nunca se termina.

La misma idea de proceso dinámico se puede observar en las definiciones de límite de una función que se muestran en la Figura 7. En la definición I vemos nuevamente la dinámica de que cada número *k* determina otro número en este caso *δ* que cumple que *f(x)>k*. Como *k* y δ son reales positivos, tenemos infinitos valores de *k* que determinarán infinitos valores de δ, lo que hace que el proceso dinámico continúe. Lo mismo sucede en la definición II.

Con esta descripción podemos decir que, en estas definiciones, enunciados y demostraciones, detectamos el infinito potencial pues es notoria la consideración dinámica del infinito, como proceso y no como objeto.

Por otro lado vale resaltar que las funciones, a su vez, son las que permiten modelizar fenómenos concretos relativos a ciencias naturales o sociales, permiten cuantificar la variación que una determinada magnitud puede tener respecto de otra. De ahí que entendamos que la PR que norma estas actividades es la matematización del espacio y la PS la geometrización del mismo, ya que en cierta forma el modelizar fenómenos concretos fue lo realizado por Newton.

Pero por otro lado al utilizar el signo $+\infty$ después del igual de límite, el infinito aparece como objeto, no como proceso: es igual a infinito, por lo que también está presente el infinito actual. En las demostraciones también aparece el infinito como objeto al igual que en la definición, por lo que está también presente el infinito actual.

En la misma línea, podemos analizar los títulos "sucesiones divergentes o infinitos" (infinito como sustantivo que refiere a un conjunto de sucesiones que cumplen que su límite es infinito) y "límites *en el* infinito" (como sustantivo que refiere a un lugar concreto): ellos nos dan la idea de que el infinito es un objeto, conjunto de sucesiones o lugar físico, el cual es tangible y es posible encontrarse ahí. Esto nos permite inferir que se utiliza el término de infinito como un todo, podríamos decir que la concepción de infinito que subyace es la del actual dado que no se lo está viendo como un proceso sino como un objeto de carácter estático, ya sea un conjunto o lugar físico. Además como planteamos previamente la utilización del infinito como objeto, no como proceso: es igual a infinito, nos permite inferir que la práctica social y de referencia que también norman esta actividad es la Matematización y Aritmetización de las cantidades, pues interpretar al infinito como conjunto de sucesiones que cumplen que su límite es infinito podría ser el germen de lo que más adelante se realiza que es la comparación de infinitos (por ejemplo al comparar órdenes de infinitos).

5.1.2. Situaciones en las que se hace presente el infinito actual

En esta sección mostramos algunos pasajes del texto en donde detectamos que el tipo de infinito que vive en las actividades allí reflejadas es el actual.

$[011]_3$ Ejercicio

Dada una sucesión (x_n), se dice que otra sucesión (y_n) es una *reordenación* de (x_n) si ambas sucesiones tienen los mismos elementos pero los tienen en distinto orden.

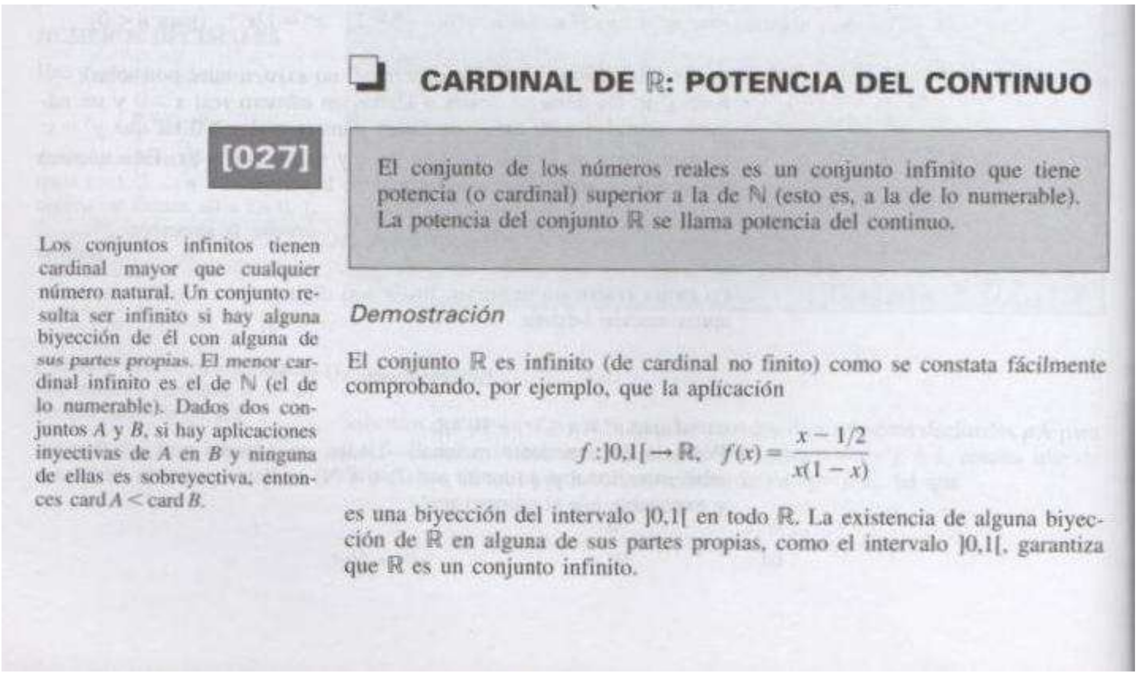
a) Si (x_n) tiene límite $l \in \mathbb{R}$ y si (y_n) es una reordenación de (x_n), compruébese que (y_n) tiene límite l.

b) Si (x_n) tiene límite l y para todo $n \in \mathbb{N}$ es $x_n < l$ (respectivamente, $x_n > l$), pruébese que hay una reordenación de (x_n) que es creciente (respectivamente, decreciente).

c) Si (x_n) tiene límite l y (x_n) tiene infinitos elementos menores que l e infinitos elementos mayores que l, todos distintos de l, entonces (x_n) se puede dividir en dos subsucesiones (x'_n) y (x''_n) tales que (x'_n) admite una reordenación creciente y (x'_n) admite una reordenación decreciente.

Figura 8- De Burgos, 2007, p. 26.

En la figura 8 se muestra un ejercicio, el cual fue seleccionado por la parte c) del mismo, aquí podemos ver cómo el enunciado del ejercicio aborda al infinito desde un aspecto de cantidad: utiliza el término infinito para hacer referencia a la cantidad de elementos que cumplen la condición que buscan. Esto nos permite ver cómo se utiliza el término infinito asociado a la cardinalidad de un conjunto, pudiendo así identificar que la práctica de referencia que subyace es la matematización de las cantidades ya que se está asociando al infinito como característica de un conjunto de elementos que cumplen cierta condición. Es por esto que consideramos que en este fragmento del texto subyace la concepción actual del infinito.



CARDINAL DE $\mathbb{R}$: POTENCIA DEL CONTINUO

[027]

Los conjuntos infinitos tienen cardinal mayor que cualquier número natural. Un conjunto resulta ser infinito si hay alguna biyección de él con alguna de sus partes propias. El menor cardinal infinito es el de $\mathbb{N}$ (el de lo numerable). Dados dos conjuntos A y B, si hay aplicaciones inyectivas de A en B y ninguna de ellas es sobreyectiva, entonces $\operatorname{card} A < \operatorname{card} B$.

El conjunto de los números reales es un conjunto infinito que tiene potencia (o cardinal) superior a la de $\mathbb{N}$ (esto es, a la de lo numerable). La potencia del conjunto $\mathbb{R}$ se llama potencia del continuo.

Demostración

El conjunto $\mathbb{R}$ es infinito (de cardinal no finito) como se constata fácilmente comprobando, por ejemplo, que la aplicación

$$f:]0,1[\to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x - 1/2}{x(1-x)}$$

es una biyección del intervalo $]0,1[$ en todo $\mathbb{R}$. La existencia de alguna biyección de $\mathbb{R}$ en alguna de sus partes propias, como el intervalo $]0,1[$, garantiza que $\mathbb{R}$ es un conjunto infinito.

Figura 9- De Burgos, 2007, P. 62.

En esta página vemos por primera vez una definición explícita sobre “conjuntos infinitos”. Lo primero que nos llama la atención de ello es que no se define al concepto de infinito en sí, sino a los conjuntos infinitos. Es decir, el concepto en sí puede estar aún vacío de significado para los estudiantes. Lo otro que observamos es que no es esta la primera vez que aparece el término en el texto, es decir, ya fue utilizado previamente sin que se explicite qué es lo que los estudiantes deben entender por él.

Por otro lado, en la figura se presenta una propiedad muy significativa (y su correspondiente demostración) respecto a los conjuntos infinitos: el cardinal de R es superior al cardinal de N. Aquí vemos que al estar comparando dos cardinales de conjuntos como son R y N, el contexto de significación presente en esta sección no es el estudio de las curvas, como lo venía siendo en otras instancias sino que claramente es el álgebra. Al afirmar que el menor cardinal infinito de un conjunto es el cardinal de N y al realizar una distinción entre cardinales de conjuntos infinitos, se le está otorgando un estatus de objeto manipulable a la vez que se establecen las bases para una aritmética de “números infinitos”. Es la primera vez en el texto que se utiliza el infinito en el sentido formal en que lo concibió Cantor, y con la misma intencionalidad. Al utilizarse la noción de cardinalidad, en particular la comparación entre cardinales de conjuntos infinitos, podemos inferir que la práctica de referencia que norma estas actividades es la Matematización de las cantidades y la práctica social que la norma, la aritmetización de cantidades, esto es, la concepción de infinito que subyace es la actual. En este sentido, vemos que de alguna manera el infinito actual es usado para matematizar el potencial: permite comparar entre sí todos esos conjuntos que, aun siendo infinitos (con un pensamiento potencial podríamos decir "siempre puedo imaginar otro elemento más"), se distinguen por la cantidad de sus elementos.

Entendemos que en este momento es conveniente realizar una aclaración. Estamos utilizando el término "cantidades" en un sentido amplio: cuando el cardinal de un conjunto es finito, sería correcto hablar de la cantidad de sus elementos. Ahora, cuando es infinito, ya no se habla de "cantidad" sino de "cardinal". Sin embargo, optamos por el uso del término "cantidad" para ambos casos para apegarnos al marco teórico de referencia (Lestón, 2011).

5.2 Sobre los usos del infinito

En la sección anterior observamos que un mismo tipo de actividades (por ejemplo la definición de sucesiones convergentes, límites en el infinito o límites infinitos presentes en las figuras 6 y 7) pueden conducirnos, según cómo las interpretemos, a la identificación de cualquiera de los dos tipos de infinito considerados, el potencial o el actual. Es por eso que entendemos que la sola descripción de los tipos de infinito mediante el esquema de prácticas propuesto por Montiel (2011) puede ser insuficiente para responder la pregunta que nos planteamos al inicio del trabajo. Ello nos conduce a considerar otro constructo de la investigación en ME, los *usos socioepistemológicos*, en este caso del concepto de infinito, y específicamente en el texto analizado.

A continuación presentamos un análisis que nos permite sugerir la existencia de algunos usos del infinito. Un análisis más profundo de este mismo texto y otros aspectos del discurso matemático escolar, en futuras investigaciones, permitirían confirmar o no estos usos que aquí insinuamos.

En las primeras cuatro figuras seleccionadas (4, 5, 6 y 7) se introduce el símbolo del infinito, unido a un signo de + o –, constituyendo así la forma del infinito $+\infty$ y $-\infty$. Bajo esta forma, el símbolo adopta el funcionamiento de dar una orientación a la recta numérica y a la vez una ubicación espacial concreta a cualquier real respecto a $+\infty$ y a

$-\infty$. Esto lo observamos por ejemplo en la figura 4 al introducir estos símbolos y al plantear $-\infty < x < +\infty$. Esta forma para el infinito y con este funcionamiento no es exclusiva de este texto, es ampliamente difundida en todo el dme. Consideramos que de esta manera se podría estar conformando un uso del conocimiento matemático "infinito" propio del dme, el cual denominamos *geométrico-espacial*, el infinito es usado para dar una ubicar números en la recta, como elemento de comparación.

Por otro lado, utilizando el concepto de orden en el conjunto de los reales (el orden determinado por la relación <), que es generalizado para definir orden en el conjunto $\overline{\mathbb{R}}$, detectamos que esa misma forma del infinito habilita otros funcionamientos del símbolo: la comparación con reales y la definición de intervalos no acotados. Así, por ejemplo, la forma $[c,+\infty[$ es usada para referirse al conjunto $\{x \in R \ / \ c \leq x\}$. Podemos detectar que al presentar a $+\infty$ como el supremo de un conjunto (Figura 5) o como un elemento que considerado con los reales forma otro conjunto, (Figura 4), en el que se puede establecer una relación de orden, entonces detectamos lo que podría constituir otro *uso* (socioepistemológico) del infinito el cual denominamos *aritmético*.

En las figuras 6 y 7 también aparecen las formas del infinito $+\infty$ y $-\infty$ como resultados posibles de la "operación" *límite de una sucesión,* esto es otro funcionamiento del infinito, que nos permite identificar otro posible *uso* (socioepistemológico) del infinito el cual denominamos *analítico.*

También detectamos otra forma del infinito, el de sustantivo que tiene como funcionamiento el nombrar o definir un determinado objeto, ya sea un conjunto de sucesiones o lugar físico, (Figuras 6 y 7) esto nos permite sugerir otro *uso* (socioepistemológico) del infinito denominado *nominativo* porque es usado para dar nombre a un determinado conjunto de objetos. Por ejemplo en el título de la figura 6 al decir: Sucesiones divergentes o "Infinitos" o en el título de la figura 7: Límites infinitos y límites en el infinito.

Por otro lado en las figuras 8 y 9 detectamos otra forma del infinito: la de adjetivo, ya que se está dando una característica sobre cierto conjunto: el ser o no infinito. El funcionamiento es comparar conjuntos en relación a la cantidad de elementos y definir el cardinal de un conjunto no finito. Esto nos permite insinuar otro *uso* (socioepistemológico) del infinito el cual denominamos *descriptivo* porque describe a un tipo particular de conjuntos. Esto es visible al definir el cardinal del conjunto de los números reales.

Hasta acá presentamos un conjunto de usos que hemos detectado en las figuras seleccionadas para su análisis. No pretendemos ser exhaustivos pero consideramos que los usos encontrados son suficientemente representativos de lo que pueda identificarse en otros textos o incluso en otros aspectos del dme, en relación al concepto de infinito. Ello requerirá mayor investigación.

Capítulo 6.Consideraciones finales

La pregunta central que dio pie a la presente investigación fue ¿por qué conviven en los estudiantes de profesorado de Matemática diferentes concepciones del infinito? Con ella en mente, nos propusimos identificar qué tipos de infinitos viven en los libros de texto de formación docente así como diferentes usos del mismo.

Para ello, y utilizando diferentes insumos, elaboramos un marco teórico-metodológico que entendemos puede ser usado para lograr el objetivo propuesto. Ese marco se basa en el esquema de actividades, prácticas de referencia y prácticas sociales de Montiel (2011) así como en los usos socioepistemológicos (Cordero y Flores, 2007; Buendía, 2012; Fregueiro, 2014)

A la luz de dicho marco teórico analizamos algunas actividades explícitas en un libro de texto relativas al concepto de infinito, intentando identificar cuál es el móvil y qué prácticas son las que norman dichas actividades, que finalmente conducen a la generación y construcción de conocimiento en torno al infinito. Ello nos permitió inferir sobre la práctica social que norman las actividades para finalmente poder visualizar el tipo de infinito que está en juego. Una vez identificado el tipo de infinito, observamos que tal descripción podría ser insuficiente dado que para unas mismas actividades, pueden identificarse diferentes tipos de infinito según la mirada con la que se las considere. Analizamos por ello la forma y el funcionamiento de ese tipo de infinito para poder identificar los usos del mismo. Ese proceso nos permitió abordar los objetivos planteados.

Vale destacar que dados los alcances de este trabajo de final de diploma, se analizaron solo algunos pasajes de un libro de texto para mostrar la viabilidad del marco teórico y de la metodología planteada. Consideramos que igualmente las observaciones realizadas son significativas: logramos identificar diferentes tipos de infinito conviviendo en fragmentos de un mismo texto, así como fragmentos en los que vive mayoritariamente el infinito actual. A su vez, sugerimos la existencia de cinco usos diferentes del infinito: geométrico-espacial, aritmético, analítico, descriptivo y nominativo.

Algo que nos llamó la atención del texto y que proponemos como primera observación es que si bien el término “infinito” es ampliamente usado a lo largo del texto, no es definido en forma explícita. Sí se define el concepto de "conjuntos infinitos", pero después de ya haber utilizado el término con anterioridad. Además, tampoco hay una distinción explícita por parte del autor de la consideración de dos "tipos" de infinito, o dos maneras de conceptualizarlo: el potencial y el actual. Esto implica que el estudiante tiene que "lidiar" no sólo con la construcción autónoma de un significado para el término, sino también con el hecho de que no siempre se lo utiliza con el mismo sentido.

Por otra parte, dado que el contexto de significación del texto analizado es el Análisis, a priori supusimos que detectaríamos mayormente al infinito potencial pero ello no fue así. Si bien el infinito potencial estuvo presente, identificamos también el infinito actual, en varias ocasiones. De hecho, cuando el infinito detectado era el potencial, otra manera de interpretar el texto nos conducía a detectar también el infinito actual. Sin embargo, encontramos situaciones en las que estaba presente únicamente el infinito actual.

Encontramos que esto puede ser un problema a la hora de la enseñanza, debido a que mayoritariamente los estudiantes tienen una concepción potencial o finitista (reportado en el trabajo de Acosta et al (2014)) pero los textos, incluso el que podía prestarse para una mayor cantidad de situaciones en los que el potencial fuera el tipo de infinito presente, priorizan la concepción actual. Este hallazgo nos permite afirmar que encontramos un divorcio entre lo que los estudiantes traen como ideas previas y lo que los textos plantean sobre el concepto de infinito.

Lo anterior nos conduce a reflexionar sobre las siguientes interrogantes, ¿qué significados están asociados a lo que se plantea para el estudiante lector, ese símbolo?, ¿tiene un significado asociado?, ¿cuál?, ¿cómo interpreta un estudiante un cierto "símbolo" que se introduce para cerrar brechas, para formalizar mejor? No es nuestro objetivo investigar cómo el estudiante lo conceptualiza porque excedería el alcance de la tesina. Pero consideramos importante resaltar que en el texto no se trabaja conceptualmente ni el infinito potencial ni el actual y al alumno se le exige trabajar con ambos. Dejamos en evidencia el divorcio que existe entre los contenidos que en cierta medida se exigen como conocimientos previos (a pesar que en ningún año de formación media básica y media superior se aborda) y los contenidos que se plantean sobre el infinito en este libro.

Consideramos que no es una casualidad que el libro de texto seleccionado haya reflejado una de las conclusiones mencionadas en Acosta, et al. (2014) respecto a la

convivencia de ambos tipos de infinitos (en este caso, no en las concepciones de estudiantes sino en los libros de texto). El hecho de que en los estudiantes coexistan esas diferentes concepciones es fruto, en parte, de cómo es presentado el dme. Si esas diferentes concepciones coexisten en los textos e incluso sin hacerse explícitas, entonces será de esperar que se transfieran a los estudiantes.
Por otro lado se evidenció que no está presente la concepción finitista del infinito en este libro de texto. Si bien explicar la existencia de esa concepción en los estudiantes requeriría de otro estudio, pensamos que la misma podría explicarse por los aspectos extraescolares del infinito.
Respecto a los usos del infinito, vale aclarar que fue un gran desafío intentar identificarlos. Los usos del infinito que observamos como posibles a partir del acotado análisis realizado son: *aritmético* (utilizado para comparar o bien como un elemento de un conjunto), *nominativo* (utilizado como sustantivo que nos permite nombrar o definir objetos), *descriptivo* (utilizado como adjetivo para brindar características), *geométrico-espacial* (brinda una ubicación espacial) y *analítico* (aparece como resultado a posibles operaciones).

Entendemos que con este proyecto brindamos herramientas para seguir explicitando parte de lo que se pone en juego cuando el infinito aparece, escondido, en el aula. Y así reflexionar sobre cómo los diferentes tipos conviven en el dme. Lo que presentamos fue solo con el fin de ejemplificar y mostrar que "funciona" el modelo creado, pero queda mucho por hacer.

Confiamos en que este trabajo sirva como base para futuras investigaciones en las que se amplíe el estudio de textos o se analicen otros componentes del dme, lo que permitiría confirmar, o no, la pertinencia de los tipos de infinito y los usos detectados en textos y otros aspectos del dme.

Consideramos, además, que este tipo de investigaciones genera aportes no solo a la interna de la comunidad de investigadores de ME sino también para la enseñanza. Al momento de diseñar textos u otros componentes del dme, se debería tener en cuenta que el concepto de infinito admite diferentes usos, que responden, a su vez, a diferentes tipos o concepciones del infinito. En los estudiantes está presente mayoritariamente el infinito potencial, si queremos ampliar sus concepciones respecto al infinito, es importante tomar eso en cuenta para no generar más divorcios entre lo que los estudiantes “traen” y lo que se presenta en el dme.

Referencias Bibliográficas

Acosta, S., Figares, G., Hanusz, S., López, V., Mesa, V., Molfino, V. y Rivero, F. (2012). Concepto de Infinito: Mitos y ¿Realidades? *Revista reloj de Agua*. N° 7, 5-21. Uruguay: Consejo de Formación en Educación, Departamento de Matemática.

Acosta, S., Figares, G., López, V., Mesa, V., Molfino, V. y Rivero, F. (2014). Infinito, Límite de lo ilimitado En G, Buendía, V, Molfino y C. Ochoviet, (Eds). *Estrechando lazos entre investigación y formación en Matemática Educativa.* (pp. 11-30), Uruguay: Consejo de Formación en Educación, Departamento de Matemática.

Buendía, G (2012). El uso de las gráficas cartesianas. Un estudio con profesores. *Educación Matemática, vol. 24, núm. 2,* pp. 9-35. Grupo Santillana México. Distrito Federal, México

Borghi, J (2005). *Problemas y Teoremas de Análisis Matemático. Integrales Impropias y Series* .Uruguay. Tradinco.

Brousseau, G. (1987). Fondements et méthods de la didactique des mathématiques. *Recherches endidactique des mathématiques*, 7(2), 33-115.

Cantoral, R., Farfán, R. (2003). Matemática educativa: Una visión de su evolución. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, *vol. 6 núm. 001*, pp. 27-40. México.

Cantoral, R., Farfán, R., Lezama, J. y Martínez-Sierra, G. (2006). Socioepistemología y representación: algunos ejemplos. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, *Número especial*, 83-102.

Cantoral, R., Reyes-Gasperini, D., y Montiel, G. (2014). Socioepistemología, Matemáticas y Realidad. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, 7(3), 91-116.

Castañeda, A. (2002). Estudio de la evolución didáctica de los puntos de inflexión: una aproximación socioepistemologica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa.* Vol 5. 27-44. México.

Castañeda, A. (2004). *Un acercamiento a la construcción social: estudio de la evolución didáctica del punto de inflexión.* Tesis doctoral no publicada, Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN. México.

Castañeda, A. (2006a). Formación de un discurso escolar: El caso del máximo de una función en la obra de L´Hopital y María. G. Agnesi. *Revista Latinoamericana de investigación en Matemática Educativa.* Vol 9. N°2. 253-265. México.

Castañeda, A. (2006b). *El discurso escolar. Aspectos de su formación.* En G. Martínez Sierra (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 19,* 733-738. México Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A.C.

Castañeda, A., Rosas, A. y Molina, G. (2010). El discurso matemático escolar de los logaritmos en libros de texto. *Revista Premisa*. Año 12. N°44. 3-18. Argentina: Sociedad Argentina de Educación Matemática.

Chevallard Y. (1985). *La transposición didáctica*. Gernoble, Francia: La pensé Sauvage.

Chevallard, Y. (1991). *La transposición didáctica: del saber sabio al saber enseñado.* Buenos Aires: Aique.

Covián, O. (2005). *El papel del conocimiento matemático en la construcción de la vivienda tradicional: El caso de la Cultura Maya.* Tesis de maestría no publicada. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN. México.

Cordero, F. y Flores, R. (2007). El uso de las gráficas en el discurso matemático escolar. Un estudio socioepistemologico en el nivel básico a través de los libros de texto. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. Vol 10. 7-38. México.

De Burgos, J. (2007). *Cálculo infinitesimal de una variable*. Madrid: Mcgraw-Hill / Interamericana de España.

Espinoza Ramírez, L. (2009). *Una evolución de la analiticidad de las funciones en el siglo XIX. Un estudio socioepistemológico.* Tesis de maestría no publicada. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN. México

Fregueiro, M. (2014). *Usos y resignificación del número real en la obra matemática de René Descartes.* Tesis de maestría no publicada. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN. México.

Franco, G. y Ochoviet, C. (2006). Dos concepciones acerca del infinito. El infinito actual y el infinito potencial. En G. Martínez Sierra (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 19,* 509-513. México Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A.C.

Garbin y Azcárate (2002). *Infinito actual e inconsistencias: acerca de las incoherencias en los esquemas conceptuales de alumnos de 16-17 años.* Enseñanza de las ciencias, 20 (1), 87-113.

Hitt, F. (2003). El concepto de infinito: obstáculo en el aprendizaje de límite y continuidad de funciones. En Filloy, E. (Ed), *Matemática Educativa. Aspectos de la investigación actual,* (pp 91 - 111). México DF, México: Fondo de Cultura Económica.

Lestón, P. (2011a). Concepciones del espacio geométrico y su relación con el infinito. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 24,* 853-861. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Lestón, P. (2011b). *El infinito en el aula de matemática. Un estudio de sus representaciones sociales desde la socioepistemología*. Tesis de Doctorado no publicada. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN. México.

López, C. (2014) Análisis de la noción de límite infinito en los libros de cálculo de las carreras de ingeniería. *Acta de Congreso Iberoamericano de ciencia, tecnología, innovación y educación.* Artículo 495. Buenos Aires. Argentina.

Maldonado, M., Rodríguez, M. y Tuyub, J. (2007) *Un estudio sobre el discurso en los libros de texto de Matemática. Su relación con la práctica escolar.* Tesis grupal no publicada Licenciatura de Enseñanza de las Matemáticas. México.

Mamolo, A (2009).Intuitions of “infinite numbers”: Infinite magnitude vs. infinite representation. *The Montana Mathematics Enthusiast.*Vol.6, Nº 3.305-330.

Montiel, G. (2011). *Construcción de conocimiento trigonométrico. Un estudio socioepistemológico*. México: Ediciones Díaz de Santos.

Montiel, G. y Buendía, G (2012). Propuesta metodológica para la investigación socioepistemológica. En L. Sosa, R. Rodríguez y E. Aparicio (Eds.) *Memoria de la XIV Escuela de Invierno en Matemática Educativa*. Red Cimates, México, pp. 444-451.

Molfino, V (2010). *Procesos de institucionalización del concepto de límite: un análisis socioepistemológico.* Tesis de Doctorado no publicada. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN. México.

Molfino, V. y Buendía, G. (2014). Un Modelo de Prácticas para analizar el Proceso Social de Institucionalización Escolar del Conocimiento Matemático. *Revista Bolema, V. 28, N. 50,* 1217-1238.

Munkres, J.R. (2002). *Topología.* Madrid. Pearson Educación, S.A.

Pehkonen, E y Hamula, M (2006). Infinity of numbers: a complex concept to be learnt? *Proceddings PME-NA* Vol 2-152

Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. *En: Tall, D. (Ed.). Advanced mathematical thinking.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Waldegg, G. (1996). Identificación de obstáculos didácticos en el estudio del infinito actual. *Revista Mexicana de Investigación Educativa*. Vol. 1, núm. 1. 107-122. Consejo Mexicano de Investigación Educativa, A.C. México