

ANÁLISIS COMPARATIVO EN LA ESTIMACIÓN DE MODELOS DE REGRESIÓN[‡]

Juan Byron CORREA*
Departamento de Economía
Universidad del Valle (Cali, Colombia)
Grupo de investigación Economía Laboral y Sociología del Trabajo

1. Introducción

Las dos características más notables en las series de tiempo económicas agregadas son el crecimiento sostenido de largo plazo y sus fluctuaciones alrededor de su senda de crecimiento. La presencia de tendencias bien sea estocásticas o deterministas en las variables de series de tiempo puede conducir a inferencias erradas cuando son usadas las técnicas econométricas convencionales.

Los métodos de estimación que se usan habitualmente en los trabajos económicos aplicados suponen que las medias y varianzas de las variables son constantes, bien definidas e independientes del tiempo. Sin embargo, estas suposiciones no son satisfechas por un gran número de series temporales de tipo económico. Las variables cuyas medias y varianzas cambian a lo largo del tiempo se dicen no estacionarias o con raíces unitarias. Utilizar los métodos clásicos de estimación como mínimos cuadrados para estimar relaciones con variables no estacionarias produce inferencias erróneas. Si las medias y varianzas de las variables cambian a lo largo del tiempo, “raíz unitaria” todos los estadísticos computados en un modelo de regresión, que usa estas medias y varianzas, también dependen del tiempo y no convergen a su verdadero valor cuando el tamaño muestral aumenta. Incluso los contrastes convencionales de hipótesis estarán muy sesgados hacia el rechazo de la hipótesis nula de no relación entre las variables dependiente e independiente.

La teoría asintótica convencional para los estimadores de mínimos cuadrados asume la estacionariedad en las variables explicativas, siendo posible ésta alrededor de una tendencia determinista. Pero no todas las series económicas son estacionarias. Sin embargo el análisis de regresión a menudo aparenta ser efectivo cuando se analizan tales series

El estudio de las series temporales ha reconocido que el análisis de regresión puede ser altamente engañoso cuando es aplicado a series de datos agregados con presencia de tendencias estocásticas, el cual puede conducir a falsas conclusiones acerca de las variables analizadas. El

[‡] Proyecto presentado en la convocatoria docente del departamento de Economía de la Universidad del Valle en Agosto de 2002.

* Profesor del departamento de Economía de la Universidad del Valle. Cualquier error es de absoluta responsabilidad del autor.

Juan Byron CORREA. ANÁLISIS COMPARATIVO EN LA ESTIMACIÓN DE MODELOS DE REGRESIÓN. Documento de Trabajo no. 70. CIDSE (Centro de Investigaciones y Documentación Socioeconomica): Colombia. Enero 2004.

DOCUMENTOS DE TRABAJO

objetivo del documento es analizar los problemas que se pueden generar al estimar modelos de regresión en los cuales las variables de interés presentan tendencias estocásticas con base en las variables Consumo total e Ingreso personal disponible para el periodo 1950 – 1995, datos tomados de las bases de datos del banco de la República [Grupo GRECO].

El documento está organizado en siete secciones, donde la primera es esta introducción. En la siguiente sección se hace una revisión de la literatura tanto internacional como nacional del tema. Diversos resultados se han obtenido a partir de trabajos que han utilizado variables con tendencias y la utilización de modelos VAR. En la tercera sección se hace una estimación de la función consumo tomando las variables en primeras diferencias, en niveles y en logaritmos y con base en estas especificaciones se analiza una posible mala especificación en estos modelos, además se plantea como una posible solución al problema de mala especificación la utilización de modelos de rezagos distribuidos autorregresivos así como un modelo de ecuaciones simultaneas basado en el planteamiento de Friedman de la teoría del ingreso permanente. La sección cuatro presenta un análisis de estacionariedad de las variables objeto de estudio. La sección cinco presenta la teoría y construcción de los modelos VAR así como de los modelos de corrección de error, además de la determinación del orden del modelo VAR necesaria para estimar el modelo de corrección de error. La sexta sección contiene la estimación del modelo de corrección de error y las pruebas de cointegración de Johansen. Las conclusiones son presentadas en la última sección.

2. Antecedentes

La primera formulación de la función consumo corresponde a Keynes (1936) el cual propone un modelo de regresión lineal que explica el consumo agregado en función de la renta neta. Keynes hace una distinción clara entre la propensión a consumir de corto y de largo plazo, afirmando que los ajustes de los gastos a las alteraciones en los ingresos se hace imperfectamente en periodos cortos. Mas adelante señala que la propensión a consumir puede variar a lo largo de un ciclo ya que “una renta creciente ira con frecuencia acompañada de un ahorro mayor, y una renta en descenso de un ahorro menor”. Es decir, Keynes apunta a unos factores dinámicos.

Friedman (1957) en su teoría de la renta permanente, plantea una distribución conjunta del consumo y del ingreso caracterizada como un sistema estructural, descomponiendo la renta disponible en una componente permanente y una componente estacionaria. De la misma manera realiza un distinción entre el consumo observado y el consumo permanente. La componente permanente de la renta refleja el efecto de aquellos factores que determinan el valor de su capital o riqueza, los atributos personales de los preceptores del ingreso, los atributos de actividad económica, etc. El componente transitorio reflejan los demás factores los cuales serán probablemente tratados como acontecimientos accidentales o causales. En cuanto al consumo permanente Friedman lo define como el valor de los bienes corrientes y los servicios que se planean consumir en un periodo, excluyendo consumo de bienes duraderos y el consumo corriente o transitorio no planeado.

J. Davidson *et al.* (1978) proporcionan una importante motivación en el desarrollo del análisis de cointegración. Ellos desarrollan un modelo empírico de los gastos del consumidor para el Reino Unido en el periodo 1958:I – 1970:IV, en el cual el log del consumo y el log del ingreso están

cointegradas. Además utilizaron como variables exógenas el deflactor de los precios para el consumo y una variable dicotoma.

En (1988) James H. Stock y Mark W. Watson construyen una economía artificial simulando las variables consumo agregado, ingreso disponible y un índice de precios, y con base en estas realizan diferentes estimaciones de la proporción marginal a consumir además analizan los efectos que se presentan cuando las variables presentan tendencias estocásticas.

Más recientemente Bierens H. J. (1998) realiza una estimación de la función consumo tomando las variables en logaritmos e introduciendo en el modelo de corrección de error la restricción de elasticidad unitaria planteada por Friedman (1956) a partir del modelo de ecuaciones simultáneas.

3. La función consumo

Al pensar en la estimación de la función consumo, estamos pensando en estimar la propensión marginal a consumir tanto de corto como de largo plazo o en estimar la elasticidad ingreso del gasto en consumo cuando las variables son consideradas en logaritmos, dependiendo de lo que se desee es posible utilizar diferentes formas funcionales de los modelos. Además debemos considerar si los datos están expresados en desviaciones respecto a su media o en niveles.

3.1. Modelos estáticos

Comencemos este estudio analizando las relaciones de corto plazo entre el consumo y el ingreso personal disponible.

Al estimar la relación entre la variación del consumo en cada año menos su variación media respecto a la variación anual del ingreso personal disponible menos su variación media, es decir, las primeras diferencias de las variables consumo total e ingreso personal disponible en desviaciones respecto a sus medias. En cada regresión se obtiene la propensión marginal a consumir año a año o de corto plazo (PMCP). Dicho de otra forma, se estimó el modelo:

$$[\Delta C_t - E(\Delta C)] = [\Delta Y_t - E(\Delta Y)] + u_t \tag{1}$$

**Estimación de la PMC de corto plazo
(Tabla 1)**

	$\Delta Y_t - E(\Delta Y)$	R² ajustado	DW
$\Delta C_t - E(\Delta C)$	0.5560462	0.4349257	1.9909017
	(0.0955498)		

De las estimaciones, tabla 1, se observa una PMCP de aproximadamente 0.56, es decir, en el corto plazo por cada unidad adicional de dinero los individuos dedican al consumo cerca de 56 centavos. Un R^2 ajustado bastante bajo indicando que el ingreso personal disponible en primeras diferencias explica menos del 50% de la variación en el consumo. Por otro lado, el valor d de *Durbin-Watson* indica no autocorrelación entre los residuales de las regresiones.

DOCUMENTOS DE TRABAJO

El bajo valor en el coeficiente de ajuste, indica que aunque las variaciones de la renta disponible afectan claramente el consumo, éste experimenta también muchas variaciones que no pueden atribuirse a las variaciones actuales de la renta disponible. Podría pensarse entonces en ¿cuánto depende el consumo de los valores actuales del ingreso disponible y cuánto de los retardos de éste o del mismo consumo?

Por lo tanto, podría analizarse la dinámica de la propensión marginal a consumir introduciendo variables rezadas en los modelos.

Analicemos ahora la relación entre las variables consumo total e ingreso personal disponible en niveles, es decir, estimemos la propensión marginal a consumir de largo plazo (PMLP). Por tanto deseamos estimar el modelo

$$C_t = \alpha + \beta Y_t + u_t \quad (2)$$

Estimación de la PMC de largo plazo
(Tabla 2)

	Ingreso	R² ajustado	DW
Consumo	0.8907971	0.9983391	1.0854274
	(0.0054163)		

Al estimar (2), la relación entre el consumo y el ingreso en niveles, vemos que la propensión marginal a consumir de largo plazo (PMLP) es igual a 0.8908, es decir, por cada peso adicional en el ingreso, el consumo de los individuos se incrementa en proporción el 89% del aumento.

Adicionalmente se observa que el valor de R^2 ajustado es muy cercanos a la unidad, indicando un buen poder explicativo del ingreso personal disponible, pero, también se observa que el valor del estadístico d de *Durbin-Watson* es bastante bajo, lo cual indica la existencia de estructuras de correlación entre los residuales de la regresión.

Por lo tanto, podemos razonar igual que en el caso anterior y formular la pregunta ¿cuánto depende el consumo de los valores actuales del ingreso disponible y cuánto de sus valores rezagados?. Lo cual puede indicar que el problema existente, en este caso, puede ser debido a una mala especificación del modelo.

También, podemos estimar la función consumo tomando las variables consumo total e ingreso personal disponible en logaritmos, lo cual no lleva a obtener la elasticidad ingreso del gasto de consumo. Es decir, deseamos estimar el modelo

$$\text{Log}(C)_t = \alpha + \beta \text{Log}(Y)_t + u_t \quad (3)$$

donde, de acuerdo a la teoría del ingreso permanente de Friedman (1957) la propensión marginal del consumo de largo plazo para el ingreso permanente puede ser cercana a uno. En procesos en los cuales se toma el log del consumo en función del log del ingreso además de la deriva, la interpretación moderna del la hipótesis del ingreso permanente es que las diferencias en los log de dichas variables son estacionarias. Sin embargo, el ingreso en la teoría de Friedman es un

ingreso neto mas que un ingreso bruto, así que la PMLP del ingreso bruto podría ser menor que uno. De todos modos la teoría de Friedman predice que el log del consumo y el log del ingreso están cointegrados.

Al estimar la ecuación (3) se obtienen los siguientes resultados;

Estimación Elasticidades: Consumo vs Ingreso
(Tabla 3)

	Log(Ingreso)	R² ajustado	DW
Log(Consumo)	1.0497287	0.9983688	0.8192789
	(0.0063251)		

Se observa una elasticidad ingreso del gasto en consumo muy cercana a uno. La elasticidad ingreso de la demanda mide el cambio porcentual en la cantidad comprada de un artículo en la unidad de tiempo debido a un cambio porcentual dado en el ingreso de los consumidores, es decir, mide la sensibilidad de la cantidad demandada ante los cambios en los ingresos monetarios

Al realizar un contraste de elasticidad unitaria, se verifica que la elasticidades ingreso es mayor que la unidad, lo cual indica una alta sensibilidad de los consumidores a cambios en el ingreso.

Por otro lado, también se observa en la tabla 3 que el estadístico *d* de Durbin-Watson de la regresión es lo bastante bajo como para indicar la presencia de una estructura de autocorrelación en el término de perturbación. Posiblemente generada a partir de una mala especificación del modelo.

Es posible concluir que; en general todos los modelos anteriormente estimados presentan diferentes problemas, bien sea de falta de ajuste o de autocorrelación, problemas que en la mayor parte de las situaciones son causados por una mala especificación en el modelo. Analizando estos problemas bajo la estructura de los modelos econométricos dinámicos: modelos de rezagos distribuidos autorregresivos (ADL) [Hendry *et al* 1978], los modelos de vectores autorregresivos (VAR), además, de los modelos de corrección de error (ECM) () ya que las variables se encuentran cointegradas, como se ha venido induciendo en los pasos anteriores podemos corregir el problema.

3.2 Modelos Dinámicos

Un problema simple pero fundamental que se puede plantear es el siguiente: dada una variable la cual depende de sus propios valores pasados y de los valores de una o más variables exógenas, como podemos determinar la relación de equilibrio de largo plazo entre las variables endógenas y las exógenas?. Nosotros podríamos considerar un gran número de vías para estimar los multiplicadores de largo y corto plazo desde el modelo de regresión dinámico. Utilizaremos en este caso los modelos de rezagos distribuidos autorregresivos de primer orden que denotaremos como ADL(1,1).

DOCUMENTOS DE TRABAJO

Consideremos un modelo de rezagos distribuidos del tipo

$$C_t = \alpha_1 + \alpha_2 Y_t + \alpha_3 C_{t-1} + u_t \quad (4)$$

lo que indica que, el consumo del periodo presente depende del ingreso contemporáneo y que además depende del consumo del periodo anterior.

En la estimación del modelo (4) para la variable consumo total, tabla 4, se utilizan tres diferentes métodos: mínimos cuadrados ordinarios (MCO), variables instrumentales (VI) equivalente al método de los mínimos cuadrados en dos etapas (MC2E) y el método de Hatanaka. El método de estimación en dos etapas de Hatanaka, corrige el problema de autocorrelación a partir de la estimación hecha por variables instrumentales.

De los resultados se observa que los coeficientes estimados por los diferentes métodos son estadísticamente significativos, además el poder explicativo de las variables predeterminadas es muy cercano a la unidad, el valor h de *Durbin nos* muestra no autocorrelación en los modelo estimados bajo MCO y bajo el método de Hatanaka, mientras que bajo el método de variables instrumentales si se presenta el problema. Existen en estos modelos variaciones en la forma de estimar la propensión marginal a consumir tanto de corto como de largo plazo las cuales están definidas como α_2 y $\alpha_2 / (1 - \alpha_3)$ respectivamente.

Estimación PMC de corto y largo plazo. (Tabla 4)

Variable dependiente: Consumo total

Periodo (ajustado): 1951 1995

	<i>MCO</i>	<i>MC2E</i>	<i>Hatanaka</i>
<i>Ingreso</i>	0.356517	0.355511	0.441373
	(0.06953)	(0.09177)	(0.09637)
<i>Consumo(-1)</i>	0.613885		
	(0.08304)		
<i>Ingreso(-1)</i>		0.615087	0.513350
		(0.10962)	(0.11487)
<i>R² ajustado</i>	0.99894	0.99894	0.99898
<i>DW</i>	1.5223	1.5237	2.0922
<i>h de Durbin</i>	1.9293	2.3576	-0.4473
<i>Prueba LM (1)</i>	4.1026	1.8465	0.2029
<i>p-value (LM)</i>	0.12856	0.17418	0.65239
<i>PMLP</i>	0.9233	0.9236	0.9069

Errores estándar entre paréntesis.

En apariencia, los dos modelos estimados por MCO y MC2E no se diferencian, sin embargo hay una gran diferencia en las consecuencias de utilizar un determinado método de estimación como en la interpretación de los dos modelos. Dado que C_{t-1} se encuentra en el modelo como variable explicativa, puede estar correlacionada con el término de perturbación ocasionando que los estimadores MCO no solamente sean sesgados sino que además no son consistentes las estimaciones del modelo.

Dado que, el modelo de Ajuste Parcial no presenta el problema de autocorrelación, podríamos asumir en este caso que el comportamiento del consumo de los individuos esta caracterizado por los hábitos de los individuos. Luego, la interpretación de los parámetros sería: 0.3265 es la propensión marginal de corto plazo mientras que la de largo plazo es alrededor de 92 centavos, el coeficiente de ajuste $(1 - \alpha_3) = 0.3861$ sugiere que en cualquier periodo dado los consumidores solamente ajustan su consumo en un poco más de una tercera parte del camino hacia el nivel de largo plazo.

Si el comportamiento del consumo esta basado en el ingreso futuro esperado, entonces se tiene un modelo Expectativas Adaptativas, cuya forma funcional presenta el problema de autocorrelación, por lo tanto se aplica a la estimación de Hatanaka. Esto sugiere que 0.44 es la propensión marginal a consumir de corto plazo, es decir, que un incremento de \$ 1 en el ingreso disponible actual u observado aumentaría el consumo en alrededor 44 centavos en promedio. Si el incremento en el ingreso es sostenido la propensión marginal a consumir proveniente del ingreso permanente es 0.91 y podemos decir que cuando los consumidores han tenido tiempo de ajustarse a un cambio de \$ 1 en el ingreso, aumentarían su consumo en alrededor de 91 centavos.

Al comparar los resultados obtenidos en los modelos dinámicos y los estáticos (tablas 1, 2 y 4) se observa que la propensión marginal de corto plazo disminuye considerablemente en los modelos dinámicos. Sin embargo la variación en la propensión marginal de largo plazo es muy poco significativa de uno a otro modelo.

Además al calcular el rezago medio, definido como $\alpha_3 / (1 - \alpha_3)$, en los tres modelos se observa que éste es igual a 1.589, 1.597 y 1.055 respectivamente, indicando que en promedio los individuos tardan en ajustar su consumo por un incremento de \$ 1 en el ingreso un poco más de un periodo y medio si se considera la estimación por MCO y por MC2E, mientras que en aproximadamente un periodo al corregir autocorrelación mediante el método de Hatanaka.

Al realizar la estimación del modelo (4) para las variables en logaritmos (apéndice A) se observa que la elasticidad ingreso del gasto en consumo de largo plazo es consistente con la estimación realizada con el modelo estático, además que bajo los tres métodos de estimación propuestos se obtienen valores idénticos para esta.

Supongamos ahora un modelo dinámico el cual contiene como explicativas variables rezagadas del consumo total (C_t) como del ingreso disponible (Y_t);

$$C_t = \alpha_1 + \alpha_2 C_{t-1} + \alpha_3 Y_t + \alpha_4 Y_{t-1} + u_t \quad (5)$$

el estimar la ecuación (5) por mínimos cuadrados ordinarios, también es posible calcular la propensión marginal tanto de corto como de largo plazo de forma simultánea. Considerando el supuesto de que la economía tiende hacia un estado estacionario o de equilibrio, α_3 es la propensión marginal de corto plazo, mientras que $(\alpha_3 + \alpha_4) / (1 - \alpha_2)$ sería la largo plazo.

Estimación PMC de corto y largo plazo. (Tabla 5)

Variable dependiente: Consumo total

Periodo (ajustado): 1951 1995

<i>Ingreso</i>	0.486799
	(0.100884)
<i>Consumo(-1)</i>	0.612266
	(0.125307)
<i>Ingreso(-1)</i>	-0.127906
	(0.126924)
<i>R² ajustado</i>	0.9989
<i>DW</i>	1.7469
<i>PMLP</i>	0.9438
<i>h de Durbin</i>	1.1528

Errores estándar entre paréntesis.

En la tabla 5 se observa que el modelo presenta un buen ajuste así como no indicios de presencia de autocorrelación, además la variable rezagada del ingreso no es estadísticamente significativa, es decir, el consumo no depende del ingreso del periodo anterior. Así mismo si utilizamos un número mayor de rezagos de las variables consumo e ingreso en el modelo, éstas son no significativas estadísticamente. La escogencia del número de rezagos en los modelos dinámicos se hizo a través de los criterios de información SC y AIC y del coeficiente de determinación ajustado.

Es posible que en la estimación del modelo (5) por MCO se generen estimaciones sesgadas e inconsistentes en el evento de presentarse correlación entre la variable rezagada del consumo y el termino de error estocástico, pero al estimar vemos que no esta presente el problema de autocorrelación. Además se observa que los valores estimados de las propensiones tanto de corto como de largo plazo no varían demasiado con respecto a las obtenidas bajo el anterior modelo.

En la estimación de los modelos dinámicos vemos que se corrigen los problemas antes planteados de falta de ajuste y de autocorrelación entre los residuales, pero que al comparar la propensión marginal estimada tanto de corto como de largo plazo con la estimada en los modelos estáticos estas no varían sustancialmente. Adicionalmente vemos que el ajuste en las estimaciones dinámicas es muy cercana a la unidad, lo anterior ocasionado por la presencia de tendencias estocásticas en ambas variables.

Para explicar porque los resultados espurios desaparecen cuando son estimados los modelos dinámicos consideremos la especificación dinámica (5) estimada para la variable consumo total.

$$c_t = a_0 + a_1 c_{t-1} + a_2 y_t + a_3 y_{t-1} + u_t \quad (6)$$

donde las variable en minúsculas representa el logaritmo de las variables originales. Esta especificación tiene interesantes propiedades dinámicas. Primero, la elasticidad de corto plazo con respecto al ingreso es diferente de la elasticidad de largo plazo. La elasticidad de corto plazo es a_2 mientras que la de largo plazo es $(a_2 + a_3)/(1 - a_1)$. La última es hallada haciendo todas las variables en el modelo dinámico (6) iguales a sus valores en el estado estacionario, es decir, haciendo: $c_{t+i} = \bar{c}$ y $y_{t+i} = \bar{y}$. Para ver esto consideremos la siguiente reparametrización.

$$\Delta c_t = a_0 + a_2 \Delta y_t - \alpha(c_{t-1} - \beta_1 y_{t-1}) + u_t \quad (7)$$

donde $\alpha = (1 - a_1)$ y $\beta_1 = (a_2 + a_3)/(1 - a_1)$

El modelo (7) es conocido como modelo de Mecanismos de Corrección de Error (ECM) el cual puede ser obtenido a partir del modelo de rezagos distribuidos autorregresivos (ADL).

El modelo (6) incluye, tanto variables en primeras diferencias como en niveles. La presencia de las variables en niveles generan una solución de largo plazo, derivada de hacer todas las primeras diferencias bien sea iguales a cero (caso de estado estacionario con tendencia no determinista) o iguales a una constante (caso de estado estacionario sin tendencia). Notemos el papel de los términos en niveles: podemos interpretar a $\beta_1 Y_{t-1}$ como el nivel de equilibrio de largo plazo c^* para el logaritmo de consumo c . Cuándo $\alpha < 0$ el consumo se incrementa en el periodo t siempre que $c_{t-1} < c_{t-1}^*$ y decrece cuando $c_{t-1} > c_{t-1}^*$. El sistema se equilibra bajo la presencia de desequilibrios (es decir, una discrepancia entre c y c^*).

La inclusión de ambas variables en diferencias y en niveles en la relación estimada es el factor clave para la solución al problema de no estacionariedad. La solución del problema de no estacionariedad puede también revelar al economista las propiedades de largo plazo del modelo estimado

Como mostramos, tenemos un conjunto de variables no estacionarias lo cual implica que sus tendencias estocásticas pueden estar enlazadas ya que la relación lineal de equilibrio significa que las variables no pueden moverse una independiente de la otra.

A la luz de la discusión del modelo dinámico, analicemos la regresión estática inicial

$$c_t = \alpha_0 + \beta y_t + e_t \quad (8)$$

Y suponiendo el PGD (6)

$$c_t = a_0 + a_1 c_{t-1} + a_2 y_t + a_3 y_{t-1} + u_{1t}$$

y asumiendo que y_t sigue un proceso autorregresivo de orden 1, es decir que

$$y_t = b_1 y_{t-1} + u_{2t} \quad (9)$$

DOCUMENTOS DE TRABAJO

$$\text{donde } \begin{pmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} \end{pmatrix} \sim NID \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_{u_{1t}} & 0 \\ 0 & \sigma_{u_{2t}} \end{pmatrix} \right)$$

Al estimar el modelo (9) por MCO, se obtiene que

$$\hat{\beta} = \frac{\sum y_t c_t}{\sum y_t^2}$$

y tomando $p \lim \hat{\beta}$ se tiene que

$$p \lim \hat{\beta} = p \lim \left[a_1 \frac{\sum y_t c_{t-1} / T}{\sum y_t^2 / T} + a_2 + a_3 \frac{\sum y_t y_{t-1} / T}{\sum y_t^2 / T} + \frac{\sum y_t u_{1t} / T}{\sum y_t^2 / T} \right]$$

Luego, bajo la hipótesis de que (9) es estacionario, ($|b_1| < 1$) es posible expresar a y_t en función de y_{t-1} y de u_{2t} , aplicando los teoremas de Slutsky y Cramer se derivan los siguientes resultados

$$p \lim \hat{\beta} = \frac{a_2 + a_3 b_1}{1 - a_1 b_1},$$
$$a_2 \leq p \lim \hat{\beta} \leq \frac{a_2 + a_3}{1 - a_1}$$

Se puede ver que si b_1 se aproxima a cero, la elasticidad de c respecto a y obtenida a partir de la regresión estática tiende asintóticamente a la elasticidad verdadera de corto plazo, mientras que si b_1 se aproxima a uno, tal elasticidad converge a la elasticidad de largo plazo. Técnicamente hablando no es posible mostrar que pasa cuando b_1 es igual a uno ya que esto viola la condición de estacionariedad la cual fue usada para derivar el comportamiento asintótico del estimador MCO.

3.3 Sistema de ecuaciones

Otra forma de analizar la relación consumo ingreso es conjuntamente como un sistema de ecuaciones.

Partiendo de la hipótesis del ingreso permanente (HIP) el comportamiento conjunto del consumo y del ingreso puede ser ilustrado como un modelo de Vectores Autorregresivos, representación VAR, además suponiendo que ambas variables tienen tendencias comunes y que los términos de perturbación estocásticos se distribuyen independientes e idénticamente en forma Gaussiana.

Supongamos que Y_t , Y_t^p y C_t denotan respectivamente, el ingreso disponible agregado, ingreso permanente y el consumo. Bajo la HIP la distribución conjunta del consumo y el ingreso puede ser caracterizada como un sistema estructural:

$$\begin{aligned} Y_t &= Y_t^p + v_t \\ Y_t^p &= \mu_y + Y_{t-1}^p + u_t \\ C_t &= Y_t^p \end{aligned} \quad (10)$$

El ingreso disponible consiste de dos partes según la terminología de Friedman (1957), ingreso transitorio y permanente. La componente permanente del ingreso disponible es asumida que sigue un paseo aleatorio, mientras la componente transitoria v_t es una variable aleatoria independiente e idénticamente distribuida que es independiente de la componente permanente. Por lo tanto asumimos que el ingreso disponible se compone de una tendencia estocástica más una componente estacionaria, esto es, que la correlación entre la tendencia y las innovaciones estacionarias es cero.

Las innovaciones son asumidas mutuamente independientes y por conveniencia se distribuyen normales con media cero y varianza uno. De acuerdo a (10) el ingreso disponible es la suma de sus componentes transitoria y estacionaria. La tercera ecuación dice que el consumo es igual a la componente permanente del ingreso, así que la propensión marginal a consumir del ingreso permanente es igual a uno.

Dado que el consumo y el ingreso disponible están cointegrados, ellos forman una tendencia común no observable en el sistema.

Eliminando la tendencia estocástica no observable del sistema, se tiene una representación estructural bivalente:

$$\begin{aligned} Y_t &= C_t + v_t \\ C_t &= \mu_y + C_{t-1} + u_t \end{aligned} \quad (11)$$

luego, se obtiene una representación VAR(1) sustituyendo C_t de la segunda ecuación en la primera ecuación.

$$\begin{aligned} Y_t &= \mu_y + Y_{t-1} + v_t \\ C_t &= \mu_y + C_{t-1} + u_t \end{aligned} \quad (12)$$

El sistema (12) expresado en forma analítica toma la forma

$$\begin{pmatrix} Y_t \\ C_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_y & 1 & 0 \\ \mu_y & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ Y_{t-1} \\ C_{t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_t \\ u_t \end{pmatrix} \quad (13)$$

DOCUMENTOS DE TRABAJO

o en una representación VAR(1) de la forma

$$X_t = \Pi X_{t-1} + \varepsilon_t \quad (14)$$

$$\text{donde } X_t = \begin{pmatrix} Y_t \\ C_t \end{pmatrix}, \quad X_{t-1} = \begin{pmatrix} 1 \\ Y_{t-1} \\ X_{t-1} \end{pmatrix}, \quad \Pi = \begin{pmatrix} \mu_y & 1 & 0 \\ \mu_y & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } \varepsilon_t = \begin{pmatrix} v_t \\ u_t \end{pmatrix}$$

Para obtener la generalización multivariante del modelo dinámico de una ecuación, es decir, un modelo de vectores autorregresivos (VAR) para la serie no estacionaria X_t , consideremos la ecuación:

$$X_t = A_1 X_{t-1} + A_2 X_{t-2} + \dots + A_n X_{t-n} + u_t \quad (15)$$

procediendo en la misma dirección de un modelo dinámico simple, es posible reparametrizar el VAR en niveles en un modelo expresado en niveles y primeras diferencias de las variable.

Comenzando por sustituir X_{t-1} a ambos lados del VAR (15) se obtiene,

$$\Delta X_t = (A_1 - I)X_{t-1} + A_2 X_{t-2} + \dots + A_n X_{t-n} + u_t \quad (16)$$

Sustraendo $(A_1 - I)X_{t-2}$ a ambos lados de (16) se obtiene

$$\Delta X_t = (A_1 - I)X_{t-1} + (A_1 + A_2 - I)X_{t-2} + \dots + A_n X_{t-n} + u_t \quad (17)$$

Repitiendo este procedimiento hasta $n-1$, se obtiene

$$\begin{aligned} \Delta X_t &= \Pi_1 \Delta X_{t-1} + \Pi_2 \Delta X_{t-2} + \dots + \Pi_n X_{t-n} + u_t \\ \Delta X_t &= \sum_{i=1}^{n-1} \Pi_i \Delta X_{t-i} + \Pi X_{t-n} + u_t \end{aligned} \quad (18)$$

donde

$$\Pi_i = I - \sum_{j=1}^i A_j \quad \Pi = I - \sum_{i=1}^n A_i \quad (19)$$

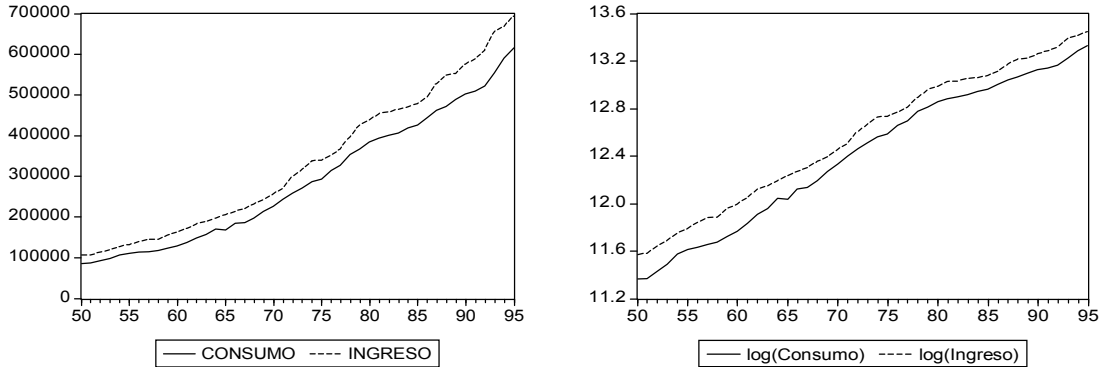
Antes de comenzar el análisis VAR es necesario analizar la estructura de las variables objeto de estudio: consumo total e ingreso personal disponible.

4. Análisis estructural de las variables

Los datos a considerar en este estudio como se han venido trabajando son las variables consumo total e ingreso personal disponible, obtenidas de los archivos del Banco de la Republica para el periodo 1950–1995. en primer lugar se realizara una análisis exploratorio de los datos para

determinar tendencias de tipo deterministas o estocásticas y por tanto no estacionariedades tanto en media como en varianza.

Figura 2. Grafico de las series en niveles y en logaritmos



Por lo tanto la primera pregunta a formular es: ¿Son las series analizadas estacionarias?. De la gráfica de las series, tanto en niveles como en logaritmos, se observa la presencia de una clara tendencia en los datos, indicando una no estacionariedad en media, además a partir del diagrama Rango-Media (Apéndice B, gráfico B1), se detecta que los datos son no estacionarios en varianza. La siguiente pregunta es si esta tendencia presente en los datos de ambas series es estocástica o determinista. Para responder a esta pregunta utilizaremos pruebas formales de raíces unitarias.

4.1. Pruebas de raíces unitarias

El análisis de raíces unitarias puede comenzarse mirando la estructura dinámica de cada una de las variables ingreso personal disponible y consumo total, tomadas en logaritmos. Estimando el modelo

$$X_t = \rho X_{t-1} + u_t \quad (20)$$

con $u_t \sim iid(0, \sigma^2)$, y donde X_t representa las variables objeto de estudio, es posible determinar si el coeficiente estimado ($\hat{\rho}$) es igual a la unidad y si además los residuales no presentan al tipo de estructura de autocorrelación, entonces podemos concluir una raíz unitaria en la serie analizada.

De la estimación de la ecuación (20) se puede aceptar la hipótesis de raíz unitaria. Además se observa que no hay presencia de falta de ajuste ni de autocorrelación. A pesar de la simplicidad de los modelos para el logaritmo de las series consumo total e ingreso disponible, vemos que ellas pueden ser aproximadas por modelos (random walk) paseo aleatorio.

A las variables analizadas se les aplicara antes del análisis de estacionariedad la transformación logarítmica, con el fin de corregir cualquier tipo de no estacionariedad en varianza. Luego se

DOCUMENTOS DE TRABAJO

procederá a realizar las pruebas de estacionariedad en media o determinar de una manera más formal la presencia de tendencias estocásticas en las series analizadas.

Desde el punto de vista econométrico la no estacionariedad de las series de tiempo es un problema que podría generar regresiones espurias y esto no permite el uso de la teoría de muestras grandes para validar la estimación e inferencia en el modelo lineal. Desde el punto de vista económico la presencia de raíces unitarias significa que el efecto de un shock persiste por siempre y por tanto las fluctuaciones cíclicas no pueden ser estudiadas por separado de los componentes de largo plazo además las tendencias de largo plazo no son fijas.

Estimación univariante.

(Tabla 6)

	$\text{Log}(\text{Consumo})_{t-1}$	R^2 ajustado	DW
$\text{log}(\text{Consumo})_t$	1.003498	0.998286	1.893932
	(0.000297)		
	$\text{log}(\text{Ingreso})_{t-1}$	R^2 ajustado	DW
$\text{Log}(\text{Ingreso})_t$	1.003306	0.998502	1.605532
	(0.000261)		

Las pruebas de Dickey-Fuller (*DF*), Dickey-Fuller Aumentada (*ADF*) (1988), Phillips-Perron (1988), entre otras, han servido para probar la hipótesis de no estacionariedad de una serie de datos agregados.

Las pruebas de Dickey-Fuller (*DF*) y Dickey-Fuller Ampliado (*DFA*) para el logaritmo de las series Consumo total e Ingreso disponible se resumen en la siguiente tabla.

Pruebas de raíces unitarias

(Tabla 7)

Serie	Estad. DFA	Valor crítico	Prob.	Tend.	Cons.	Rezag.	DW	Ljung Box(12)	Result
Lcons	-1.2575	-2.9314	0.6405	No	Si	2	1.8365	0.559	<i>I</i> (1)
Ling	-1.3855	-2.9281	0.5810	No	Si	0	1.9327	0.162	<i>I</i> (1)

De la tabla 7 se pueden analizar varias cosas, como conclusión primordial es que las series Consumo total e Ingreso disponible en logaritmos son integradas de orden 1 *I*(1), es decir, presentan una raíz unitaria. Adicionalmente ambas series no presentan tendencia determinista, mientras que si presentan termino constante o deriva. El número de rezagos (dos) en serie logaritmo del consumo hace pensar que el proceso generador de los datos (PGD) de la misma presenta una estructura ARMA. Los valores de los estadísticos *d* de Durbin-Watson y *Q* de Ljung Box (12) hacen suponer no autocorrelación en los residuales del PGD seleccionado.

Para analizar la estructura del proceso generador de datos (PGD) de las series analizadas partamos del modelo,

$$X_t = \alpha_t + X_{t-1} + u_t \quad (21)$$

el cual es conocido como paseo aleatorio con deriva, caso particular del modelo AR(1) donde $|\rho| = 1$, luego por la condición de invertibilidad de los procesos AR(1) y al aplicar sustituciones recursivas¹ al modelo (21), se tiene que éste puede describirse como un modelo de medias móviles de orden infinito,

$$X_t = \alpha_t t + X_0 + \sum_{i=1}^t u_{t-i} \quad (22)$$

el hecho de que la ecuación (21) presente término constante (deriva) implica que la serie analizada presenta tanto tendencia determinista ($\alpha_t t$) como tendencia estocástica, definida como las variaciones sistemáticas (ascendentes o descendentes) presente en los datos. La variable X_0 puede considerarse como un valor inicial el cual debe ser definido al momento de realizar la estimación del modelo.

5. Vectores Autorregresivos (VAR) y Mecanismos de Corrección de Error (MCE).

La primera forma general que examinaremos es el modelo de corrección de error, el cual fue usado por Sargan (1964), Hendry y Anderson (1977) y por Davidson et al (1978) como una vía para capturar los ajustes en la variable dependiente los cuales no dependen de alguna de las variables explicativas en niveles pero mide hasta que punto la variable explicativa se desvió de la relación de equilibrio con la variable dependiente.

5.1. Determinación del orden del proceso VAR

Para llevar a cabo la estimación de un modelo VAR restringido o no restringido, previamente se debió haber determinado el orden del proceso. Para hacer esto vamos a describir las pruebas necesarias a utilizar en esta tarea.

Supongamos un proceso autorregresivo p-dimensional X_t definido por

$$X_t = \Pi_1 X_{t-1} + \dots + \Pi_k X_{t-k} + \Phi D_t + \varepsilon_t \quad t = 1, 2, \dots, T \quad (23)$$

para valores fijos de X_{-k+1}, \dots, X_0 y término de error ε_t independiente e idénticamente distribuido normal con media cero y varianza constante Ω .

El término determinista D_t puede contener una constante, un término lineal, dummies estacionales o dummies de interacción, o otros regresores considerados fijos y no estocásticos.

Los resultados y las condiciones sobre el modelo VAR son expresados en términos del polinomio característico

$$A(z) = I - \sum_{i=1}^k \Pi_i z^i \quad (24)$$

¹ Por el teorema de descomposición de Wold

DOCUMENTOS DE TRABAJO

La solución X_t del VAR como una función de los valores iniciales y de ε determina las propiedades de X_t dados sus valores iniciales. Es de anotar que el resultado no impone ninguna condición sobre los parámetros.

La solución esta dada por

$$X_t = \sum_{s=1}^k C_{t-s} (\Pi_s X_0 + \dots + \Pi_{s+k-1} X_{1-k}) + \sum_{j=0}^{k-1} C_j (\varepsilon_{t-j} + \Phi D_{t-j}) \quad (25)$$

donde $C_0 = I$ y C_n esta definido recursivamente por

$$C_n = \sum_{j=1}^{\min(k,n)} C_{n-j} \Pi_j \quad n = 1, 2, \dots \quad (26)$$

dado que los errores ε_t son independientes e idénticamente gaussianos, los valores iniciales (X_{-k+1}, \dots, X_0) son fijos y los parámetros a estimar $(\Pi_1, \dots, \Pi_k, \Phi, \Omega)$ no están restringidos.

Introduciendo la notación $Z_t' = (X_{t-1}', \dots, X_{t-k}', D_t')$ para los vectores y $B' = (\Pi_1, \dots, \Pi_k, \Phi, \Omega)$ para los parámetros. Aquí Z_t es un vector de dimensión $pk + m$ y B' de $p \times (pk + m)$.

El modelo VAR puede ser expresado como

$$X_t = B' Z_t + \varepsilon_t \quad t = 1, 2, \dots, T \quad (27)$$

el cual puede ser estimado por el método de máxima verosimilitud.

Por tanto, los estimadores de máxima verosimilitud del parámetro $B' = (\Pi_1, \dots, \Pi_k, \Phi, \Omega)$ presentan distribución asintótica Gaussiana, la cual, para cualquier par de vectores ξ y η , esta dada por

$$\frac{\sqrt{T} \xi' (\hat{B} - B) \eta}{\sqrt{\xi' \hat{\Sigma}^{-1} \xi \eta' \hat{\Omega} \eta}} \approx N(0,1) \quad (28)$$

5.2. Pruebas de Especificación

Para poder chequear que los supuestos bajo el modelo se satisfacen es necesario definir el modelo más adecuado. Es decir, es importante determinar la longitud k del modelo a estimar y chequear que los residuales estimados no presenten correlación serial, no presentan heteroscedasticidad condicional y que no se desvíen mucho de un ruido blanco *Gaussiano*.

**Orden de rezagos del modelo VAR para la variable consumo total
(Tabla 8)**

Rezagos	LogL	LR	FPE	AIC	SC	HQ
0	63.0704	NA	0.00019	-2.9081	-2.8254	-2.8778
1	213.3019	279.0015*	1.77E-07*	-9.8715*	-9.6233*	-9.7805*
2	214.0698	1.3529	2.07E-07	-9.7176	-9.3038	-9.5659
3	217.9369	6.4451	2.09E-07	-9.7113	-9.1321	-9.4989
4	220.2996	3.7129	2.28E-07	-9.6333	-8.8886	-9.3603

* Indica el orden de rezago seleccionado por el criterio
 LR: Prueba estadística LR (cada prueba al nivel del 5%)
 FPE: Error de predicción final
 AIC: Criterio de información de Akaike
 SC: Criterio de información de Schwarz
 HQ: Criterio de información de Hannan-Quinn

5.2.1. Determinación de la longitud de rezago k .

La longitud de retraso k , puede ser determinada por medio de los criterios de información de Akaike (AIC) y de Schwartz (SC) y el de Hannan-Quinn (HQ). Otros importantes criterios para la escogencia del valor de k es el error de predicción final (EPF) y las pruebas estadísticas LR, además que los residuales en cada modelo no estén correlacionados.

De la tabla 8, se determina que la estimación del modelo consumo total en función del ingreso depende de ella misma y del ingreso, ambas rezagadas un periodo, es decir que el valor de k es igual a la unidad.

5.2.2. Heteroscedasticidad condicional autorregresiva

Para cada una de las series individuales una prueba de efectos ARCH puede ser calculada regresándolos los cuadrados de los residuales $\hat{\varepsilon}_i^2$ sobre una constante y valores rezagados de los cuadrados de los residuales. La distribución asintótica de la prueba es χ^2 con grados de libertad igual al número de rezagos en la regresión auxiliar.

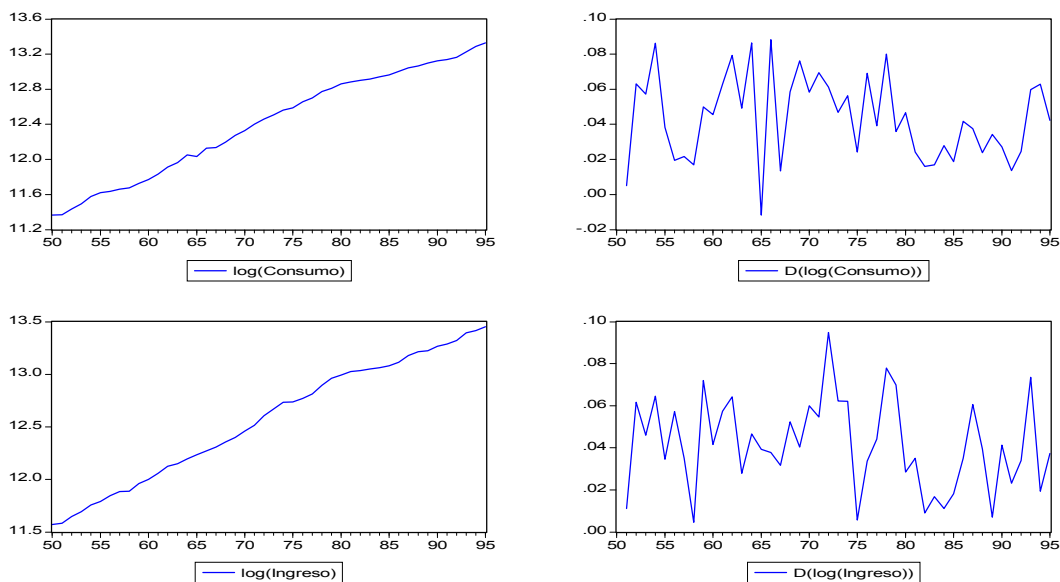
5.2.3. Errores Gaussianos

La distribución marginal de los residuales puede ser chequeada por histogramas y calculando los momentos tercero y cuarto, los coeficientes de asimetría y de curtosis

$$g_1 = \frac{m_3}{m_2^{3/2}} \quad \text{y} \quad g_2 = \frac{m_4}{m_2^2} \quad (29)$$

y a partir de estos calcular el estadístico de Jarque - Bera (JB)

Figura 3. Datos en Niveles y en Diferencias



$$JB = (T - pk - m) \frac{g_1}{6} + \frac{(g_2 - 3)^2}{24} \quad (30)$$

5.3. Estimación del modelo VAR

Para los datos considerados consistentes de $t=1950, \dots, 1995$, se probaron distintos tipos de rezagos $k=0,1,2,3$ y 4 , manteniéndose en cada caso las primeras observaciones como valores iniciales 1950–1953 según el caso. Esto conduce a situaciones de $t=46,45, \dots$ observaciones respectivamente.

Los datos son graficados en niveles y en diferencias en la figura 3. En la gráfica las variables aparecen no estacionarias con diferencias estacionarias.

Se escribió el modelo en la forma de mecanismos corrección de error como:

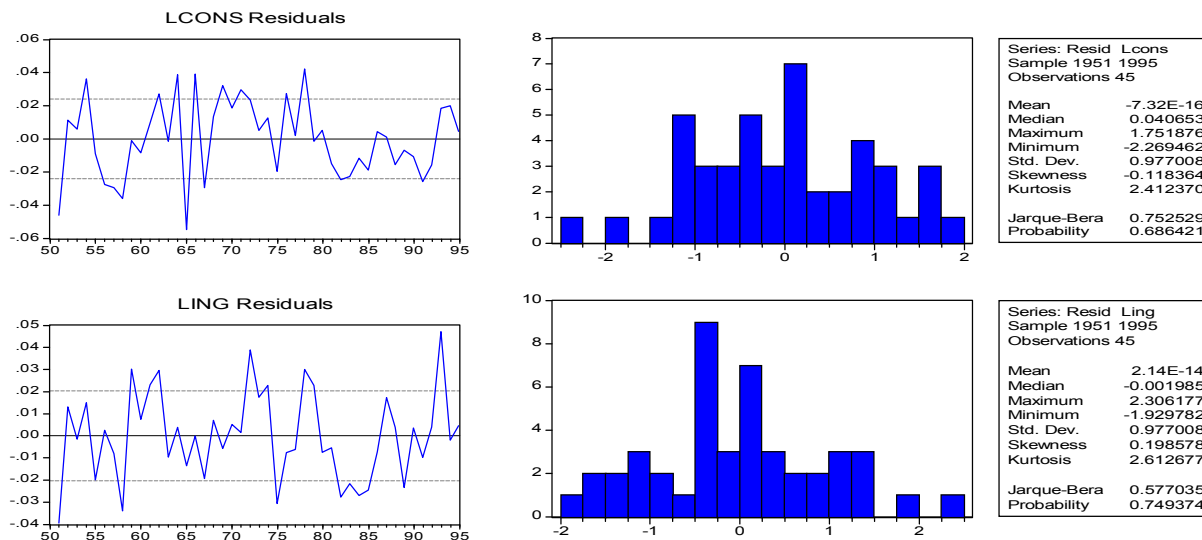
$$X_t = \Pi_1 X_{t-1} + \Gamma_1 \Delta X_{t-1} + \Phi D_t + \varepsilon_t \quad (31)$$

luego se tienen 2×45 observaciones. La ecuación es ajustada con dos parámetros para $k=1$, con $43 = 45 - 2$, grados de libertad para la varianza. Las matrices Π y Γ_1 de coeficientes estimados pueden calcularse en el caso de $k > 1$, mientras que, para el caso de $k=1$ solo es posible calcular los coeficientes de Π , estas están dadas en la tabla 9, además, de la matriz de correlación y la de desviaciones estándar de los errores dados en la tabla 10.

Primero se analizo el orden de autocorrelación de los residuales para chequear que se tiene una descripción consistente de los datos bajo el supuesto de que los errores se distribuyen ruido blanco.

La figura 4, muestra los residuales estandarizados y sus histogramas así como las medidas descriptivas necesarias para probar los supuestos del modelo. Estos están dados para cada una de las series.

Figura 4. Residuales estandarizados e histogramas de los modelos estimados



Se observa, figura 4, que los valores de las medias de los residuales son aproximadamente cero, la varianza es cercana a la unidad, además los coeficientes de curtosis y de asimetría así como las pruebas asintóticas de normalidad *Jarque-Bera*, indican que los residuales son *Gaussianos*. Es decir, se puede concluir que ninguna de las series analizadas se desvía de los supuestos previamente planteados al modelo.

Estimaciones de Π para la variable Consumo (Tabla 9)

	$\text{Log(Consumo)}_{t-1}$	$\text{log(Ingreso)}_{t-1}$
$D(\text{Log(consumo)})_t$	-0.120288	0.118219
$D(\text{Log(Ingreso)})_t$	0.275844	-0.297421

Desviaciones estándar (σ_{ii}) y correlaciones (ρ_{ij}) (Tabla 10)

	Log(Consumo)_t	log(ingreso)_t
σ_{ii}	0.0241	0.0204
ρ_{ij}	1.00	
	0.6054	1.00

DOCUMENTOS DE TRABAJO

Para un modelo autorregresivo de orden uno AR(1) las propiedades están dadas por las raíces del polinomio característico, o equivalentemente por los valores propios de la matriz de coeficientes, los resultados están dados en la tabla 11. Esta indica que los valores propios están todos dentro del círculo unitario indicando que el tipo de no estacionariedad es una que puede ser removida por diferenciación, esta inspección de las raíces indica que el modelo VAR satisface las condiciones de estabilidad, es decir, que la estructura establecida es la más adecuada.

Pruebas de raíces unitarias para el modelo: Consumo total – ingreso (Tabla 11)

Raíces	Módulos
$\rho_1 = 0.982277$	0.982277
$\rho_2 = 0.590013$	0.590013

La prueba de heteroscedasticidad condicional ARCH (de orden 1) arrojó un valor de 0.9773, para el modelo. Este valor, la componente de largo plazo, indica que la convergencia al estado estacionario en el caso del consumo total es bastante lenta.

Las correlaciones y correlaciones cruzadas de los residuales son analizadas a partir de la figura 5. Estas indican no autocorrelación en los residuales, y no correlaciones cruzadas entre las variables.

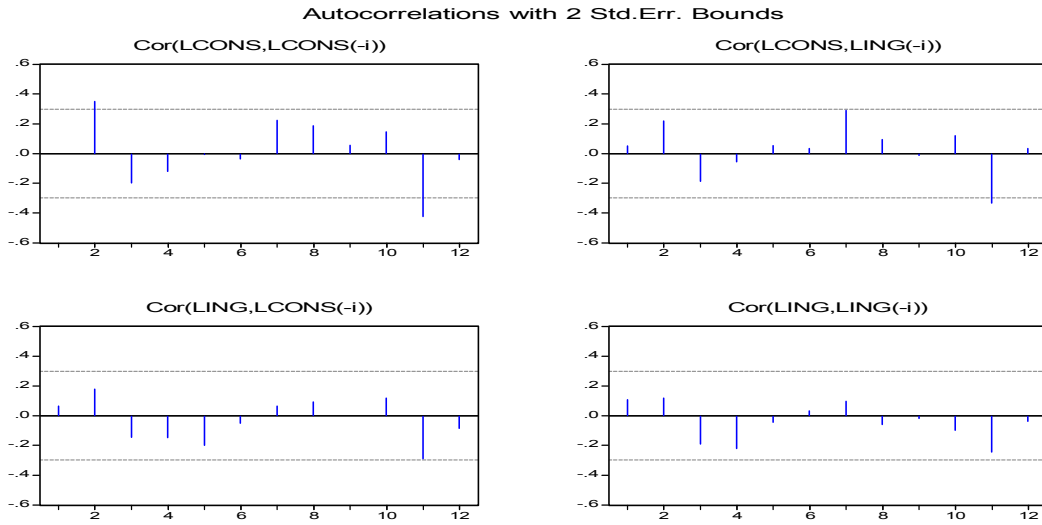
6. Estimación del modelo de corrección de error

Supongamos que dos variables $I(1)$, digamos x_t y z_t están cointegradas y que el vector de cointegración es $[1, -\beta]$, entonces las tres variables Δx_t , Δz_t y $(x_t - \beta z_t)$ son $I(0)$. Luego el modelo de mecanismos de corrección de error

$$\Delta x_t = \gamma \Delta z_t + \alpha (x_{t-1} - \beta z_{t-1}) + u_t$$

describe la variación de x_t al rededor de su tendencia de largo plazo del conjunto de factores exógenos, la variación de z_t alrededor de su tendencia de largo plazo y el error de corrección $(x_t - \beta z_t)$ el cual es el error de equilibrio en el modelo de cointegración. La utilidad de esta representación es que ésta sugiere una vía para construir un modelo que explique la variación de largo plazo en x_t tanto como una prueba de cointegración.

Figura 5. Funciones de Autocorrelación y Autocorrelaciones cruzadas para los residuales de un VAR(1) para los modelos estimados



La cointegración parece ser una caracterización plausible de la relación entre series de tiempo económicas. Desde un punto de vista teórico, el poder del equilibrio económico puede forzar a diferentes variables a moverse juntas en el largo plazo aunque esto no se de en el corto plazo y aun siendo individualmente no estacionarias.

El modelo de corrección de error de forma reducida esta dado por la ecuación

$$\Delta X_t = \alpha \beta' X_{t-1} + \mu + \varepsilon_t \quad t = 1, 2, \dots, T \quad (32)$$

definida a partir de la ecuación (32), haciendo $\Pi = \alpha \beta'$ y dado que $\Gamma_1 = 0$, además, haciendo $\Phi D_t = \mu$ constante, donde α y β son matrices $p \times r$. Es posible considerar la relación $\beta' X_t = c$ como una definición de la relación económica y asumir que los agentes reaccionan a desequilibrios del tipo $\beta' X_t - c$ a través del coeficiente de ajuste α .

Dado que la inspección de los datos indican que estos no presentan tendencia determinista, utilizamos el modelo $H_1^*(r)$, con r el número de relaciones de cointegración. Este modelo define que los datos en niveles no tienen tendencia determinista y que la ecuación de cointegración tiene intercepto.

DOCUMENTOS DE TRABAJO

La tabla 12, presenta los estadísticos Trace y Máximo valor propio, los cuales determinan: que entre las variables consumo total e ingreso personal disponible en logaritmos, existe una relación de cointegración.

**Pruebas de cointegración: Relación Consumo total – Ingreso
(Tabla 12)**

Hipotesis No. of CE(s)	Valore Propios	Estadístico Trace	Valor critico 5 %	Valor critico 1 %
$r = 0$ **	0.467254	35.17470	19.96	24.60
$r = 1$	0.156094	7.467402	9.24	12.97

*(**) denotes rejection of the hypothesis at the 5%(1%) level

Trace test indicates 1 cointegrating equation(s) at both 5% and 1% levels

Hipotesis No. of CE(s)	Valore Propios	Estad. Máximo Valor propio	Valor critico 5 %	Valor critico 1 %
$r = 0$ **	0.467254	27.70730	15.67	20.20
$r = 1$	0.156094	7.467402	9.24	12.97

*(**) denotes rejection of the hypothesis at the 5%(1%) level

Max-eigenvalue test indicates 1 cointegrating equation(s) at both 5% and 1% levels

La hipótesis de $r = 0$ en favor de $r \neq 0$ proporciona valores de 35.175 y 27.707 para los estadísticos Trace y Máximo valor propio respectivamente, mucho mayores que los respectivos valores al 99%, por lo tanto se rechaza la hipótesis de no cointegración.

Los coeficientes de cointegración de largo plazo de β no restringidos definidos en la tabla 13 proporcionan la base para obtener la relación de cointegración normalizada respecto a la variable consumo total, a partir de la primera fila, definida en la ecuación (33).

**Estimadores de los parámetros β de largo plazo.
(Tabla 13)**

	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$
<i>LCONS</i>	9.590293	-45.21192
<i>LING</i>	-10.70201	47.42887
<i>C</i>	17.88662	-34.92133

$$\hat{\beta}^{*1} = (1.00, -1.1159, 1.8651) \tag{33}$$

La ecuación (33) se utiliza para interpretar el vector de cointegración en términos de los mecanismos de corrección de error los cuales miden el exceso de demanda de consumo. El correspondiente vector de coeficientes de ajuste normalizados (α) ecuación (30) los cuales miden el efecto de un cambio en el error de desequilibrio corregido por las diferencias rezagadas.

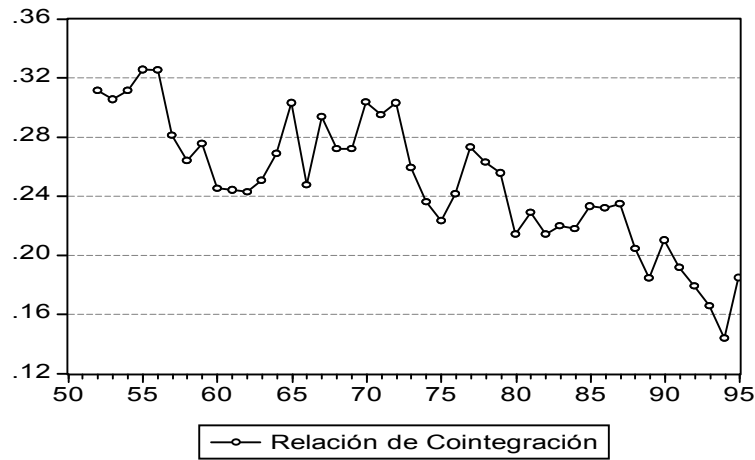
$$\hat{\alpha}^* = (0.1684, 0.1542) \tag{34}$$

D(LCONS)	0.017555	0.005135
D(LING)	0.016082	-0.003213

$$D(lcons_t) = 0.3140 + 0.169(lcons_{t-1} - 1.116ling_{t-1}) - 0.226D(lcons_{t-1}) + 0.288D(ling_{t-1})$$

Al construir la grafica de los $\beta'X$, se obtienen los valores de ajuste $(1-\alpha_i)$ al equilibrio en la relación de cointegración entre el consumo total y el ingreso personal disponible en el periodo 1950–1995.

Figura 6. Relación de Cointegración de largo plazo



Los puntos en la grafica representan las velocidades de ajuste en cada periodo, es decir, que en cualquier periodo de tiempo i los consumidores solo ajustan su consumo en una proporción $(1-\alpha_i)$ respecto a su nivel de largo plazo. Es decir, las desviaciones del equilibrio recogen el retardo en la respuesta de la variable dependiente ante cambios en la variable explicativa.

Es importante anotar, que así las variables hallan sido tomadas en logaritmos en la relación de cointegración, los coeficientes de la relación de cointegración no son usualmente interpretados como elasticidades, dado que un shock sobre una variable indica un shock sobre todas las variables en el largo plazo. Lütkepohl (1994)

La figura 6 además nos muestra los ajustes al equilibrio en la relación consumo total - ingreso disponible durante el periodo de análisis. Es decir, el grafico muestra la evolución de largo plazo que ha tenido la propensión marginal a través de los 45 años de estudio.

El grafico nos permite analizar diferentes ciclos que se presentan según los individuos ajustan su consumo causado por variaciones en sus ingresos. Es posible mediante una revisión histórica del

DOCUMENTOS DE TRABAJO

comportamiento de la economía colombiana verificar que los diferentes periodos de expansión y recesión que se han presentado en ésta coinciden con los diferentes ciclos que presenta el grafico.

7. Conclusiones

Se confirma lo expuesto por la teoría, las estimaciones donde las variables presentan tendencias pueden generar problemas en este caso del tipo de mala especificación en los modelos propuestos para calcular la propensión marginal a consumir.

Se verifican los objetivos planteados, los modelos lineales en dos variables ocasionan problemas en las estimaciones bien sea de falta de ajuste o problemas de autocorrelación en los residuales del modelo estimado indicando esta la falta de mas variables explicativas en la regresión, razón por la cual se proponen los modelos dinámicas en la estimación corrigiéndose estos problemas.

Es de resaltar que al estimar los modelos de rezagos distribuidos autorregresivos estos corrigen los problemas planteados pero no alteran significativamente los valores estimados de las pensiones marginales a consumir tanto de corto como de largo plazo.

Vemos que la corrección de los problemas planteados se realiza básicamente con los modelos de rezagos distribuidos autorregresivos, pero que a partir de estos se llega a la formulación de los modelos VAR y por ende a los modelos de mecanismos de corrección de error, igualmente esto sucede cuando se plantea una solución al problema a partir de un sistema de ecuaciones.

La relación de cointegración de largo plazo estimada, mediante el modelo de mecanismos de corrección de error, nos muestra que la propensión marginal ha presentado un fuerte variación a través del periodo de análisis.

Algo de resaltar en este estudio es que la propensión marginal de largo plazo estimada por los diferentes métodos utilizados es muy cercana, esto podría ser debido a al estructura de los variables que se están estudiando, ambas variables presentan tendencias con características similares.

Bibliografía

Banerjee A., Dolado J.J., Galbraith J.W. and Hendry D. F. Co-integration, Error Correction and The Econometric Analysis of Non-Stationary Data. Oxford University Press.

Bierens Herman J. (1998). *Cointegration Analysis*. Pennsylvania State University, and Tilburg University.

Durlauf, S. and Phillips, P.C.B. (1988). *Trends vs Random Walks in the Time Series Analysis*. *Econometrica*, 56, pp. 1333 - 1354.

Enders, Walter. *Applied Econometric Time Series*. John Wiley & Sons, Inc. 1995.

Engle, R.F. and Granger, C.W.J. (1991) *Cointegration and Error Correction: Representation, estimation and Testing*. *Econometrica*, 55.

Engle, R.F. and Granger, C.W.J. (1991). *Long-Run Economic Relationships: Readings in Cointegration*.

Favero, Carlo A. *Applied Macroeconometrics*. Oxford University Press 2001.

G.S. Maddala and In - Moo Kim, *Unit Roots, Cointegration and Structural Change*. Cambridge University Press 1998

Greene William H., *Econometric Analysis*, Five Edition. Ed Prentice Hall 2002

GRECO: Grupo de Estudios de Crecimiento Económico. *El crecimiento económico colombiano en el siglo XX*. Banco de la República 2002.

Hatanaka, M. *An Efficient Estimator for the Dynamic Adjustment Model with Autocorrelated Errors*. *Journal of Econometrics*, 2, 1974, pp. 199 – 200.

James H. Stock, Mark W. Watson *Variable Trends in Economic Time Series*, pp. 147-174 *The Journal of Economic Perspectives*, Vol. 2, No. 3, Summer, 1988

Johnston J., and DiNardo J. *Econometric Methods*. Fourth Edition, The McGraw-Hill Companies, Inc. 1997.

Nelson C.R. and Charles I. Plosser, *Trends and Random Walks in macroeconomic time series*. pp. 139- 162 *Journal of Monetary Economics*. Vol 10, 1982

Raymond J. L. y Uriel Ezaquiel. *Investigación econometrica aplicada: Un caso de estudio*. Editorial AC. 1987.

Robert G. King, Charles I. Plosser, James H. Stock, Mark W. Watson *Stochastic Trends and Economic Fluctuations*, pp. 819-840 *The American Economic Review*, Vol. 81, No. 4, Sep., 1991

DOCUMENTOS DE TRABAJO

Soren Johansen. *Likelihood-based Inference in Cointegrated Vector Autoregressive Models*. Oxford University Press 1995.

Soren Johansen. (1992). Testing Weak Exogeneity and the Order of Cointegration in UK Money Demand Data. *Journal of Policy Modeling*. Vol. 14, N° 3. p 313 – 334.

Surinach J. C., Artís, O. M., López Bravo M., Sansó Roselló A. *Análisis Económico Regional, Nociones básicas de la teoría de Cointegración*. Antoni Bosch Editor. 1995.

APÉNDICE A

Estimación de los modelos dinámicos, ecuaciones (4) y (5), para las series Consumo total e Ingreso disponible en logaritmos. Estimación de las elasticidades tanto de largo como de corto plazo.

Estimación de las Elasticidades de corto y largo plazo. (Tabla A1)

Variable dependiente: logaritmo del Consumo total

Periodo (ajustado): 1951 1995

	<i>MCO</i>	<i>MC2E</i>	<i>Hatanaka</i>
<i>Log(Ingreso)</i>	0.493743	0.932461	0.583179
	(0.119453)	(0.262555)	(0.138297)
<i>Log(Consumo(-1))</i>	0.526105		
	(0.112859)		
<i>Log(Ingreso(-1))</i>		0.111174	0.440253
		(0.248249)	(0.130405)
<i>R² ajustado</i>	0.99882	0.99844	0.99914
<i>DW</i>	1.5784	0.9194	2.0588
<i>h de Durbin</i>	2.1644		-0.4076
<i>Prueba LM (2)</i>	7.8820	15.5091	0.7346
<i>p-value (LM)</i>	0.02125	0.00043	0.69261
<i>PMLP</i>	1.04188	1.04909	1.04186

Errores estándar entre paréntesis.

Estimación PMC de corto y largo plazo. (Tabla A2)

Variable dependiente: Log(Consumo total)

Periodo (ajustado): 1951 1995

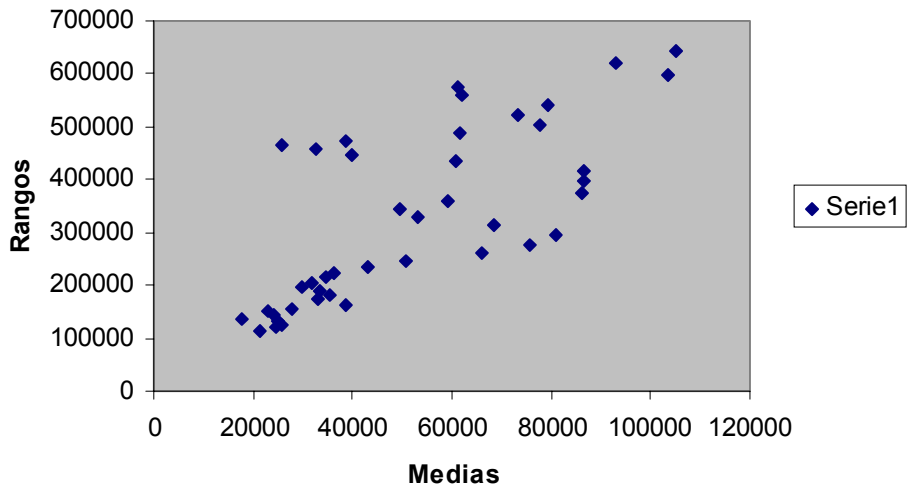
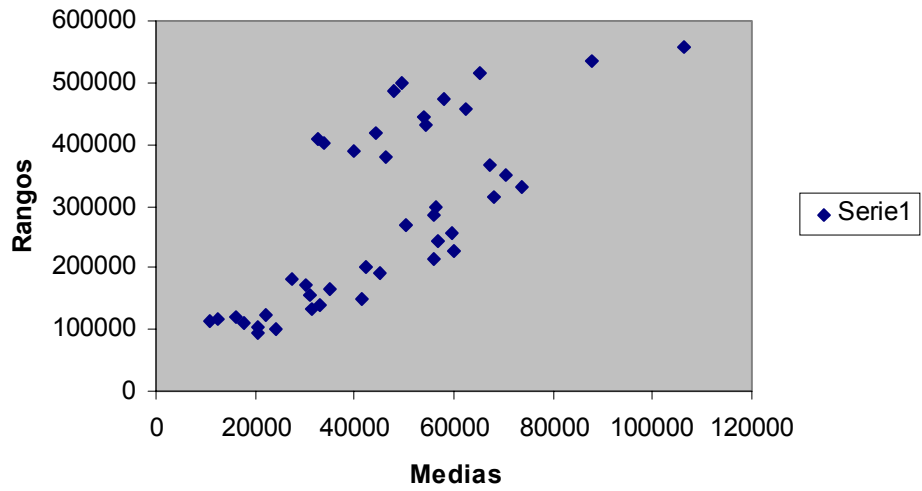
<i>Log(Ingreso_t)</i>	0.682072
	(0.125621)
<i>Log(Consumo_{t-1})</i>	0.716489
	(0.147113)
<i>Log(Ingreso_{t-1})</i>	-0.385171
	(0.162151)
<i>R² ajustado</i>	0.9989
<i>DW</i>	2.0868
<i>PMLP</i>	1.0472
<i>h de Durbin</i>	-1.8029

Errores estándar entre paréntesis.

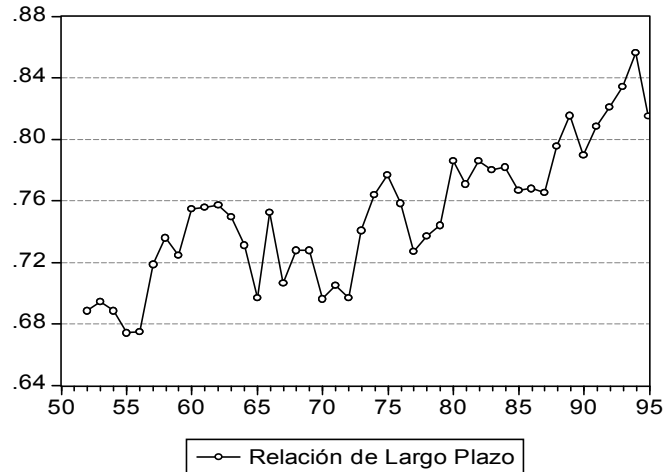
APÉNDICE B

Gráfico Rango – Media (\bar{X}, R) para las variables consumo total e ingreso personal, utilizado para analizar la no estacionariedad en varianza de las series.

Análisis de Varianza de las series Consumo e Ingreso
(Gráfico B1)



APÉNDICE C



En este apéndice se aprecia el grafico de $1 - (1 - \alpha)$, es decir, uno menos las velocidades de ajuste, éste nos muestra

APÉNDICE D

Macro en Eviews de los modelos estimados incluidos en el Informe.

Análisis de la función consumo para Colombia en el periodo 1950 - 1995

Workfile a 1950 1995

Read(e,b2) c:\consumo.xls Ingreso consumo

' Transformación de las variables

Genr lcons = Log(consumo)

Genr ling = Log(ingreso)

' Estimación de modelos en niveles

Equation cons.ls consumo c ingreso

Equation lcons.ls lcons c ling

' Estimación de la PMC de cortoplazo

Genr dconsumo = d(consumo) - @mean(d(consumo))

Genr dingreso = d(ingreso) - @mean(d(ingreso))

Equation PMCPcons.ls dconsumo dingreso

Genr respmpccons = resid

' Tabla 1: PMCP, Error .Std., R2, y DW

table(7,4) tabla1

tabla1(1,1)="V. Dep"

tabla1(2,1)="V. Explic "

tabla1(4,1)="d(ingreso)"

DOCUMENTOS DE TRABAJO

```
tabla1(5,1)="Error Std"  
tabla1(6,1)="R2 ajustado"  
tabla1(7,1)="DW"  
tabla1(1,3)="d(Consumo)"  
tabla1(4,3)=pmcpcons.c(1)  
tabla1(5,3)=pmcpcons.@stderrs(1)  
tabla1(6,3)=pmcpcons.@rbar2  
tabla1(7,3)=pmcpcons.@dw
```

```
' Estimación MCO en Niveles y Prueba de cointegración a partir de los residuales  
Equation lincons.ls consumo c ingreso  
Genr reslin = resid  
Equation rlin.ls d(reslin) reslin(-1)
```

```
' Tabla 2: PMLP, Error .Std., R2, y DW  
table(7,4) tabla2  
tabla2(1,1)="V. Dep"  
tabla2(2,1)="V. Explic  "  
tabla2(4,1)="Ingreso"  
tabla2(5,1)="Error Std"  
tabla2(6,1)="R2 ajustado"  
tabla2(7,1)="DW"  
tabla2(1,3)="Consumo"  
tabla2(4,3)=lincons.c(2)  
tabla2(5,3)=lincons.@stderrs(2)  
tabla2(6,3)=lincons.@rbar2  
tabla2(7,3)=lincons.@dw
```

```
' Estimación MCO en Logaritmos y Pruebas de cointegración a partir de los residuales  
Equation logcons.ls lcons c ling  
Genr reslogcons = resid  
Equation rlog.ls d(reslogcons) reslogcons(-1)
```

```
' Tabla 3: Elasticidades, Error .Std., R2, y DW  
table(7,4) tabla3  
tabla3(1,1)="V. Dep"  
tabla3(2,1)="V. Explic  "  
tabla3(4,1)="Iog(ingreso)"  
tabla3(5,1)="Error Std"  
tabla3(6,1)="R2 ajustado"  
tabla3(7,1)="DW"  
tabla3(1,3)="log(Consumo)"  
tabla3(4,3)=logcons.c(2)  
tabla3(5,3)=logcons.@stderrs(2)  
tabla3(6,3)=logcons.@rbar2  
tabla3(7,3)=logcons.@dw
```

CIDSE

' Estimación dinámica: MCO, MC2E y Hatanaka

Equation kconsumo.ls consumo c ingreso consumo(-1)

Equation kconsumo1.tsls consumo c ingreso consumo(-1) @ ingreso ingreso(-1)

Equation kconsumo11.tsls consumo c ingreso consumo(-1) ar(1) @ ingreso ingreso(-1)

' Tabla 4: MCO, MC2E y Hatanaka

table(10,4) tabla4

tabla4(1,1)=" "

tabla4(2,1)="Ingreso"

tabla4(4,1)="Consumo(-1)"

tabla4(6,1)="Ingreso(-1)"

tabla4(8,1)="R2 ajustado"

tabla4(9,1)="DW"

tabla4(10,1)="PMC"

tabla4(1,2)="MCO"

tabla4(1,3)="MC2E"

tabla4(1,4)="Hatanaka"

tabla4(2,2)=kconsumo.c(2)

tabla4(3,2)=(kconsumo.@stderrs(2))

tabla4(4,2)=kconsumo.c(3)

tabla4(5,2)=(kconsumo.@stderrs(3))

tabla4(8,2)=kconsumo.@rbar2

tabla4(9,2)=kconsumo.@dw

tabla4(10,2)=kconsumo.c(2)/(1-kconsumo.c(3))

tabla4(2,3)=kconsumo1.c(2)

tabla4(3,3)=kconsumo1.@stderrs(2)

tabla4(6,3)=kconsumo1.c(3)

tabla4(7,3)=kconsumo1.@stderrs(3)

tabla4(8,3)=kconsumo1.@rbar2

tabla4(9,3)=kconsumo1.@dw

tabla4(10,3)=kconsumo1.c(2)/(1-kconsumo1.c(3))

tabla4(2,4)=kconsumo11.c(2)

tabla4(3,4)=kconsumo11.@stderrs(2)

tabla4(6,4)=kconsumo11.c(3)

tabla4(7,4)=kconsumo11.@stderrs(3)

tabla4(8,4)=kconsumo11.@rbar2

tabla4(9,4)=kconsumo11.@dw

tabla4(10,4)=kconsumo11.c(2)/(1-kconsumo11.c(3))

' Estimación dinámica: Pruebas de AR(1)

Equation dincons.ls lcons c lcons(-1)

Equation dining.ls ling c ling(-1)

' Tabla 5: Estimación de modelos AR(1)

table(2,5) tabla5

tabla5(1,1)="lcons(-1)"

tabla5(1,2)="Error Std"

DOCUMENTOS DE TRABAJO

```
tabla5(1,3)="R2 ajustado"  
tabla5(1,4)="DW"  
tabla5(2,1)=dincons.c(2)  
tabla5(2,2)=dincons.@stderrs(2)  
tabla5(2,3)=dincons.@rbar2  
tabla5(2,4)=dincons.@dw
```

```
' Tabla 6 Estimación de modelos AR(1)
```

```
table(2,5) tabla53  
tabla6(1,1)="ling(-1)"  
tabla6(1,2)="Error Std"  
tabla6(1,3)="R2 ajustado"  
tabla6(1,4)="DW"  
tabla6(2,1)=dining.c(2)  
tabla6(2,2)=dining.@stderrs(2)  
tabla6(2,3)=dining.@rbar2  
tabla53(2,4)=dining.@dw
```

```
‘ Estimación del sistema de ecuaciones por MCO
```

```
system sistema1  
sistema1.append d(lcons)=c(1)+c(2)*lcons(-1)+c(3)*ling(-1)  
sistema1.append d(ling)=c(4)+c(5)*lcons(-1)+c(6)*ling(-1)  
sistema1.ls  
show macro1.results
```

```
‘ Estimación del sistema de ecuaciones
```

```
Equation Eq11.ls d(lcons) c lcons(-1) ling(-1)  
genr res11 = resid  
genr res11std = res11/eq11.@se  
genr res112 = res11*res11  
Equation Eq12.ls d(ling) c lcons(-1) ling(-1)  
genr res12 = resid  
genr res122 = res12*res12
```

```
' Tabla 71 Determinación de k - Niveles
```

```
table(4,5) tabla71  
tabla71(2,1)="d(lcons)"  
tabla71(3,1)="d(ling)"  
tabla71(1,2)="lcons(-1)"  
tabla71(1,3)="ling(-1)"  
tabla71(2,2)=eq11.c(2)  
tabla71(2,3)=eq11.c(3)  
tabla71(3,2)=eq12.c(2)  
tabla71(3,3)=eq12.c(3)
```

```
' Prueba de Heteroscedasticidad Condicional ARCH
```

```
Equation arch1.arch(1,0,a) res112 c
```

CIDSE

' Estimación modelo de mecanismos de corrección de error (ECM)

Group x1 lcons ling

var x11.ec(b,1) 1 1 lcons ling

' Análisis de tendencias deterministas en las series en logaritmos

Equation tcons.ls lcons c t

Equation tlingr.ls ling c t

' Modelación Box – Jenkins para las series analizadas

Equation BJling.ls ling c ar(1)

Equation BJlcons.ls log(consumo) c ar(1) ma(2)

' Pruebas de raíces unitarias de las variables. Prueba de ADF

Equation Cons4.ls d(Lcnd) Lcnd(-1) d(Lcnd(-1)) c t

Equation Cons41.ls d(Lcnd) Lcnd(-1) d(Lcnd(-1)) c

Equation Cons42.ls d(Lcnd) Lcnd(-1) d(Lcnd(-1))

Equation ingr3.ls d(log(ingreso)) log(ingreso(-1)) d(log(ingreso(-1))) c t

Equation ingr31.ls d(log(ingreso)) log(ingreso(-1)) d(log(ingreso(-1))) c

Equation ingr32.ls d(log(ingreso)) log(ingreso(-1)) d(log(ingreso(-1)))

' Prueba de Causalidad de Granger

group coning consumo ingreso

coning.cause(2)