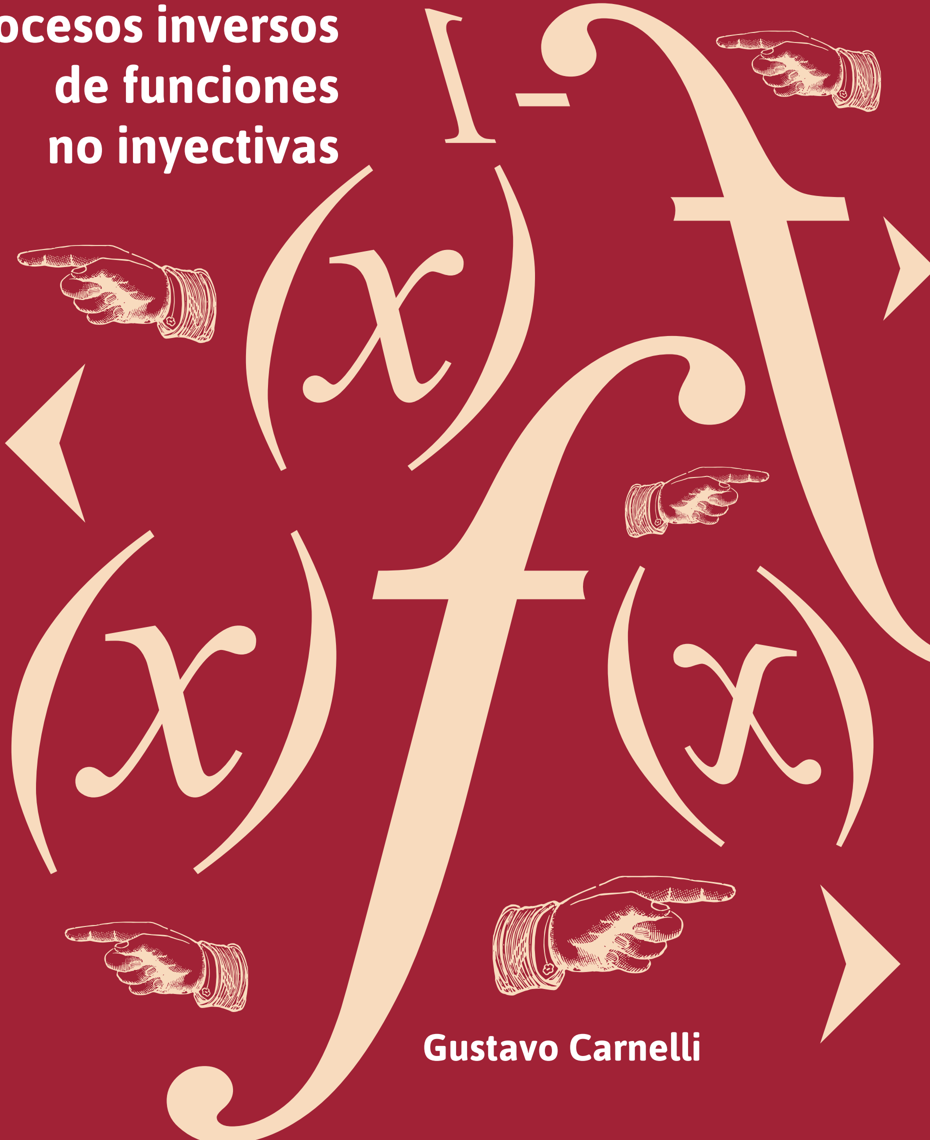
Procesos inversos de funciones no inyectivas



Gustavo Carnelli

EDICIONES UNGS
Universidad Nacional de General Sarmiento

Ideas para la clase de matemática

PROCESOS INVERSOS DE FUNCIONES NO INYECTIVAS

Gustavo Carnelli

Procesos inversos de funciones no inyectivas

EDICIONES UNGS

Universidad Nacional de General Sarmiento

Carnelli, Gustavo
Procesos inversos de funciones no inyectivas / Gustavo Carnelli. - 1a ed - Los Polvorines : Universidad Nacional de General Sarmiento, 2021.
Libro digital, PDF . - (Educación. Educación en ciencias ; 4)

Archivo Digital: descarga y online
ISBN 978-987-630-530-3

1. Matemática. 2. Educación Científica. I. Título.
CDD 510.7

EDICIONES **UNGS**

J. M. Gutiérrez 1150, Los Polvorines (B1613GSX)
Prov. de Buenos Aires, Argentina
Tel.: (54 11) 4469-7507
ediciones@campus.ungs.edu.ar
ediciones.ungs.edu.ar

Diseño gráfico de colección: Andrés Espinosa
Diseño de tapa: Daniel Vidable
Diagramación: Eleonora Silva
Corrección: Gustavo Castaño

L U A
Libro
Universitario
Argentino

Serie
Educación en ciencias

Coordinación:
Mabel Rodríguez

Equipo editorial:
Gustavo Carnelli, Patricia Barreiro,
Tamara Marino y Paula Leonian

Esta serie reúne aportes del campo de la enseñanza de distintas ciencias. Enfocada principalmente en la educación matemática, contribuye con la comunidad académica brindando textos útiles, claros en su presentación y accesibles para un público de estudiantes que se están formando como profesores, para docentes de nivel medio y superior y para formadores de formadores e investigadores. La serie se articula en dos subseries: "Ideas para la clase de matemática" e "Investigaciones en educación matemática".

Ideas para la clase de matemática

Cada libro de esta subserie presenta un tema de enseñanza de la matemática de nivel secundario o superior. Primero se presenta una discusión sobre cuestiones referidas a la enseñanza de algún contenido matemático, que pueden incluir consignas para trabajar en el aula, con anticipación de posibles resoluciones y errores esperables, modos de aplicación y su adecuación a distintos grupos de estudiantes. Estos materiales también pueden sumar la consideración de los aportes de la educación matemática para su diseño y análisis, entre otros temas de interés. Se pueden incluir distintas resoluciones de consignas que contemplen el uso de recursos tecnológicos –si es pertinente– y presentar una discusión acerca de en qué contextos, con qué modalidad de trabajo y para qué objetivos podrían ser apropiados esos recursos.

La concepción de profesor que subyace es la de un profesional que debe tomar decisiones sobre contenidos, objetivos, recursos, etcétera, por eso no se incluyen secuencias ni planificaciones cerradas que marquen un camino a seguir. Tomando cuestiones teóricas de la educación matemática, pueden incluirse las fundamentaciones de algunas de las propuestas o aportes para encarar ciertos temas. Se espera que los libros de esta subserie contribuyan a fortalecer el rol docente por medio de una discusión académica, en la que el lector se encontrará involucrado e invitado a sumar herramientas para su quehacer cotidiano.

Índice

Introducción

La resolución de ecuaciones del tipo $x^2 = a$, con $a \in \mathbb{R}^+$, es un asunto privilegiado por la enseñanza en las primeras clases de cursos iniciales de matemática en el nivel superior. Suele partirse del supuesto de que los estudiantes tienen arraigado un procedimiento que contiene dos errores típicos: los cuadrados pasan como raíces cuadradas y la radicación de índice par y radicando positivo tiene dos resultados. Un ejemplo típico es el siguiente:

$$x^2 = 16$$

$$x = \sqrt{16}$$

$$x = \pm 4$$

Todo este libro está destinado a desentrañar la complejidad de este asunto, el cual no identificamos con la ausencia de conocimientos en los estudiantes, sino que lo entendemos como sumamente fértil en lo didáctico-matemático, pues da pie para hablar de un contenido matemático escolar, reflexionar acerca de su enseñanza y su aprendizaje y proponer ideas para mejorar su tratamiento en las aulas.

Antes de iniciar esta discusión, presentamos una ecuación de otro tipo cuya resolución también incurre en un procedimiento erróneo que, como veremos, es análogo al anterior:

$$sen\, x = \frac{1}{2}$$

$$x = arcsen\, \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{1}{6}\pi + 2k\pi \ \vee \ x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$$

Los procedimientos anteriores son ambos incorrectos pese a que los resultados obtenidos son correctos, lo que determina una dificultad para superarlos, ya que se muestran eficaces. La resolución incurre en dos errores que se compensan, lo que permite obtener todos los valores buscados. En ambos casos, podemos enmarcarlos en lo que llamamos la *reversibilidad de procesos no inyectivos.* Como aspecto central de este tema, tenemos las ecuaciones del tipo $f(x) = b$, siendo f una función que no es inyectiva y b un elemento del conjunto imagen de f. A lo largo de este trabajo, tomaremos como ejemplos de estas funciones la cuadrática, cuya expresión es $f(x) = x^2$, y las trigonométricas de expresiones $f(x) = sen\, x$ y $f(x) = \cos x$.[1]

El trabajo está organizado de la siguiente manera: en el primer capítulo, desarrollamos una discusión sobre el contenido matemático de referencia; en el segundo capítulo, llevamos la discusión al plano didáctico-matemático, y en el último capítulo, presentamos algunas ideas para el abordaje de esta problemática en las clases de matemática.

Una precisión: a lo largo de todo el libro, trabajaremos como universo con el conjunto de los números reales, por lo que solo tendremos en cuenta las soluciones reales de las ecuaciones.

[1] Tomaremos a las trigonométricas como funciones de variable real, sin interesarnos por el caso de la variable angular.

Capítulo 1
Las funciones no inyectivas

La noción de función inversa

Dada una función $f: A \to B$, sabemos que para cualquier $a \in A$, el valor $f(a)$ existe y es único, pero para cualquier $b \in B$ no siempre hay un $a \in A$ tal que $f(a) = b$ y, si lo hay, puede no ser único. Esto último está asociado directamente a la resolución de ecuaciones y a la noción de función inversa.

Toda función tiene asociada una relación inversa, pero esta no necesariamente es una función, es decir que no todas las funciones son inversibles; justamente lo serán cuando las ecuaciones de la forma $f(x) = b$ tengan solución única para cada $b \in B$. Veamos algunos ejemplos:

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 5x - 1$ es una función inversible, ya que su relación inversa $f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f^{-1}(x) = \frac{x+1}{5}$ es una función.

$g: \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R}, g(x) = \frac{5}{x-1} + 3$ es una función no inversible, porque su relación inversa $g^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R} - \{1\}, g^{-1}(x) = \frac{5}{x-3} + 1$ no es una función (porque 3 no tiene imagen).

En cambio, $h: \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R} - \{3\}, h(x) = \frac{5}{x-1} + 3$ es una función inversible, pues su relación inversa $h^{-1}: \mathbb{R} - \{3\} \to \mathbb{R} - \{1\}, h^{-1}(x) = \frac{5}{x-3} + 1$ es una función.

Precisemos la noción de función inversa. Una posible definición es la siguiente: dada una función $f: A \to B$, llamamos función inversa f^{-1} a su relación inversa sí y solo sí $f^{-1}: B \to A$ es una función. Otra posible definición es la siguiente: dada una función $f: A \to B$, que cumple que las ecuaciones de la forma $f(x) = b$ tienen solución única para cada $b \in B$, llamamos *función inversa* f^{-1} a su relación inversa. Estas dos definiciones se basan en el conocimiento de la noción de relación inversa.

Por su parte, la definición más aceptada en el ámbito matemático no usa la noción de relación inversa, y es la siguiente: dada una función $f: A \to B$, una función $g: B \to A$ es la *función inversa* de f sí y solo sí cumple que $gof = id_A$ y $fog = id_B$ (siendo $id_A: A \to A, id_A(x) = x$ y $id_B: B \to B, id_B(x) = x$ las funciones identidad definidas en cada uno de los dos conjuntos).

Como sabemos, la relación inversa puede ser una función o no. Si lo es, decimos que f es *inversible*. Para que una función sea inversible, debe tener dos propiedades: todos los elementos del dominio deben tener imágenes distintas (inyectividad), y todos los elementos del codominio deben tener preimagen (suryectividad).

Analicemos la inversibilidad de las llamadas funciones elementales. Tengamos presente que cuando no explicitamos el dominio y el codominio al definir una función, estos son el dominio natural (el subconjunto más amplio de los reales en el que la función puede definirse), y el codominio es $\mathbb{R}$. Por ejemplo: cuando hablamos de las funciones homográficas, estamos suponiendo que están definidas de $\mathbb{R} - \{a\}$ en $\mathbb{R}$, siendo a el valor que anula su denominador. A continuación se brinda una lista de funciones elementales, la cual es arbitraria, ya que podría incluir otras o tener menos.

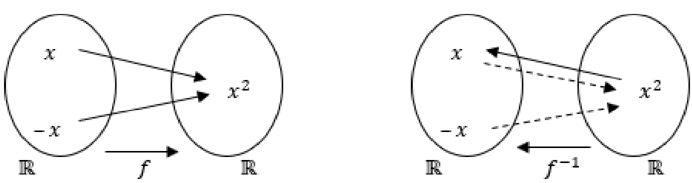
- Las funciones lineales que no son constantes son inversibles.
- Las funciones cuadráticas no son inversibles (ninguna lo es).
- Las funciones potenciales son inversibles solo si el exponente es impar.
- Las funciones homográficas no son inversibles (ninguna lo es).

- Las funciones polinómicas no son inversibles (aunque algunas sí lo son).
- Las funciones racionales no son inversibles (aunque algunas sí lo son).
- Las funciones exponenciales no son inversibles (ninguna lo es).
- Las funciones logarítmicas son inversibles.
- Las funciones trigonométricas no son inversibles (ninguna de las seis usuales lo es).
- La función módulo no es inversible.

Cuando una función no es inversible, podemos redefinirla mediante cambios en su dominio y/o codominio que la transformen en una nueva función, ahora sí inversible. Ejemplifiquemos con uno de los casos que nos interesan particularmente aquí.

$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2$ no es una función inversible, y tiene los dos problemas que puede tener una función al analizar su inversibilidad: a) no todos los elementos del dominio tienen imágenes distintas (no es inyectiva), ya que, por ejemplo, $f(3) = f(-3) = 9$; y b) no todos los elementos del codominio tienen preimagen (no es suryectiva), ya que, por ejemplo, -6 está en el codominio, pero no hay ningún elemento del dominio cuya imagen sea ese número.

En los esquemas siguientes se ilustra de modo simplificado la no inyectividad de la función cuadrado f. Se ve esta característica de *2 a 1* que tiene y el problema de la relación inversa, que debería volver por uno solo de los caminos para ser función. En esto está encerrada la complejidad del tema que desarrollamos en este libro.



Esta función cuadrática, la más sencilla, no es inversible. Sin embargo, todos conocemos la raíz cuadrada y sabemos de su relación de inversibilidad con el cuadrado. Claro, si bien la función así definida no es inversible, podemos redefinirla de modo que lo sea.

La función $f^*: [0,+\infty) \to [0,+\infty), f^*(x) = x^2$ es inversible. Esta nueva función comparte con f la fórmula, pero no tiene el mismo dominio ni el mismo codominio. Veamos que estas son las restricciones mínimas que podíamos hacerle a f para hacerla inversible. El gráfico de f^* no es una parábola, sino que nos hemos quedado con una de sus ramas. También podríamos habernos quedado con la otra rama, si tomábamos como dominio los números reales no positivos. Siempre hablamos de restricciones mínimas, ya que nuestra intención es rescatar la mayor cantidad de pares ordenados de la función original. Si no, podríamos haberla redefinido así: $f^{\blacklozenge}: \{4\} \to \{16\}, f^{\blacklozenge}(x) = x^2$, pero luego solo podríamos hablar de la raíz cuadrada de 16.

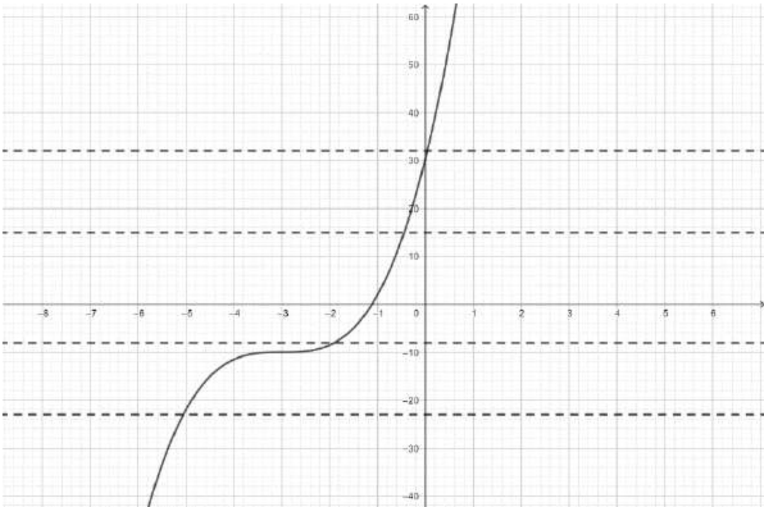
Conviene precisar que esta actividad de redefinir funciones no inversibles para lograr otra que sí lo sea no siempre tiene sentido. La función signo (que podría haberse incluido en la lista de las elementales)

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 1, & si\ x > 0 \\ 0, & si\ x = 0 \\ -1, & si\ x < 0 \end{cases}$$

no es inyectiva ni suryectiva, y redefinirla para que sea inversible requeriría realizarle tantos cambios que poco y nada quedaría de la función original.

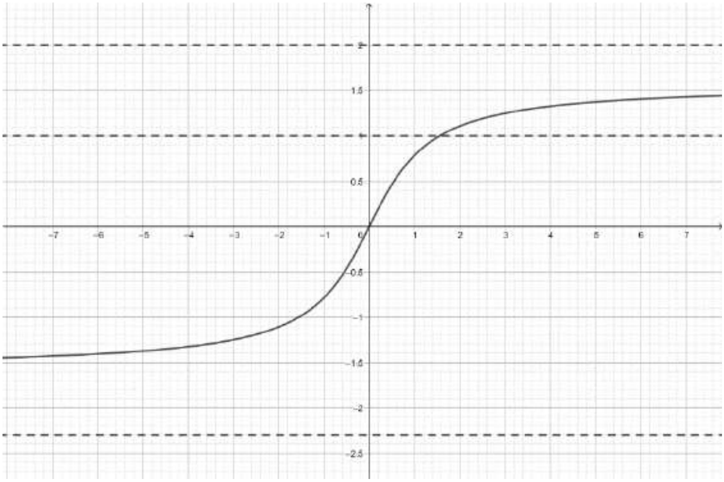
Funciones no inversibles

Sabemos que si una función $f: A \to B$ es inversible, cada ecuación del tipo $f(x) = b$, con $b \in B$, tiene solución única. Esto se ve, por ejemplo, en la función que aparece graficada debajo. La cantidad de puntos de intersección de la curva con cada recta horizontal es la cantidad de soluciones de la ecuación correspondiente.

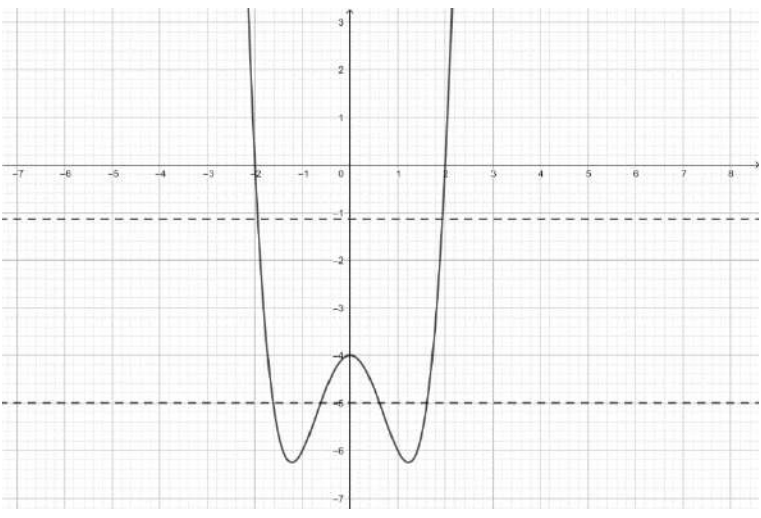


Pero no es esta situación la que nos interesa aquí. Si una función $f: A \to B$ no es inversible, esto significa que no es inyectiva o que no es suryectiva (o que no es ninguna de las dos). A los efectos de estudiar los procesos inversos, esto es, la resolución de ecuaciones del tipo $f(x) = b$, con $b \in B$, son distintas las situaciones que se presentan según falle la inyectividad o la suryectividad.

Si la función no es suryectiva, habrá al menos un valor de $b \in B$ para el cual la ecuación $f(x) = b$ no tenga solución. Esto se ve, por ejemplo, en la función que aparece graficada debajo: de los tres valores mostrados, hay dos para los que la ecuación no tiene solución.



Pero tampoco es este el caso que pretendemos desarrollar en este libro. Si la función no es inyectiva, habrá al menos un valor de $b \in B$ para el cual la ecuación $f(x) = b$ tenga más de una solución. En la función que aparece graficada debajo se indican dos valores para los cuales la ecuación tiene dos y cuatro soluciones, respectivamente.



Esta sí es la situación en la que nos interesa ahondar. En general, al no ser $f: A \to B$ inversible por no ser inyectiva (vamos a suponer que sí es suryectiva), podemos pensar en redefinirla de modo que la nueva función sea inyectiva y se parezca lo más posible a f, esto es, que tenga la mayor cantidad posible de pares ordenados de la relación cuya primera componente pertenece a A y cuya segunda componente pertenece a B. Para ello, tomemos todos los valores de $b \in B$ para los cuales la ecuación asociada $f(x) = b$ tiene más de una solución y quedémonos con una sola de esas soluciones. ¿Cuál de ellas? Cualquiera, o la que nos convenga por algún motivo. Esto significa que la restricción la tenemos que hacer en el conjunto A, ya que las soluciones de esas ecuaciones son elementos de A.

Llamemos C a un conjunto formado por todos los elementos $k \in A$ para los cuales las ecuaciones del tipo $f(k) = b$ tienen como máximo una solución (si la f original es suryectiva, no ocurrirá el caso de que no tengan solución). Luego, definimos una nueva función $g: C \to B, g(x) = f(x)$, para todo $x \in C$. Esta función g y la función f inicial tienen las siguientes particularidades:

- $Dom\ g \subset Dom\ f$ (la inclusión es estricta porque estamos suponiendo que f no es inyectiva).
- $Codom\ g = Codom\ f$ (porque estamos suponiendo que f es suryectiva).
- Si f viene dada por su expresión analítica, la comparte con g; si f viene dada por su representación gráfica en $\mathbb{R}^2$, todos los puntos de la representación gráfica de g pertenecen a la de f, pero habrá al menos un punto de la de f que no pertenece a la de g. En otros términos, podemos decir que $gr(g) \subset gr(f)$ (también es una inclusión estricta), entendiendo por *gráfica de una función* al conjunto de todos los pares ordenados pertenecientes a la relación cuya primera componente pertenece al dominio y su segunda componente pertenece al codominio de la función.

Veamos algunos ejemplos de funciones elementales que no son inyectivas. Aclaramos que en todos los ejemplos que analicemos, definimos las funciones de modo que sean suryectivas para que la no inversibilidad se deba a la no inyectividad, asunto que nos interesa aquí.

La función $f\colon \mathbb{R} \to [0, +\infty), f(x) = x^2$ no es inyectiva porque las ecuaciones del tipo $f(x) = b$ tienen dos soluciones distintas (y opuestas) para todo $b \in B$, excepto para $b = 0$, que tiene una sola:

$$f(x) = b \to x^2 = b \leftrightarrow x = \sqrt{b} \text{ ó } x = -\sqrt{b}$$

¿Cómo podemos redefinir esta función? De varias formas: una es dejando todos los pares ordenados de la forma $(\sqrt{b}; b)$, esto es, $C = [0, +\infty)$. Así, resulta $g\colon [0, +\infty) \to [0, +\infty), g(x) = x^2$. También podríamos quedarnos con los pares de la forma $(-\sqrt{b}; b)$, es decir, tomar $C = (-\infty, 0]$; la función resultaría $g_1\colon (-\infty, 0] \to [0, +\infty), g_1(x) = x^2$. O también podríamos tomar un conjunto C que tome algunos pares de la forma $(\sqrt{b}; b)$ y otros de la forma $(-\sqrt{b}; b)$, como podría ser $C = (-\infty, -10] \cup (3{,}10) \cup [-3{,}0]$, una elección quizás sin utilidad, pero posible.

Es usual tomar la primera opción porque es la que contiene todos números positivos. Así, la función $g\colon [0, +\infty) \to [0, +\infty), g(x) = x^2$ es inyectiva. Al haberla tomado suryectiva, es biyectiva y, por lo tanto, inversible. Ahora estamos en condiciones de definir la inversa de esta función. La llamamos –como es sabido– *radicación de índice 2* o *raíz cuadrada*, y la simbolizamos $\sqrt{}$.

$$g^{-1}\colon [0, +\infty) \to [0, +\infty), g^{-1}(x) = \sqrt{x}$$

Por ser g y g^{-1} inversas, vale que gog^{-1} y $g^{-1}og$ son la función identidad.

$$g^{-1}og\colon \underbrace{[0,+\infty)}_{Dom\ g} \to \underbrace{[0,+\infty)}_{Codom\ g^{-1}},\ g^{-1}og(x) = g^{-1}\big(g(x)\big) = g^{-1}(x^2) = \sqrt{x^2} \underbrace{=}_{(1)} x$$

$$gog^{-1}\colon \underbrace{[0,+\infty)}_{Dom\ g^{-1}} \to \underbrace{[0,+\infty)}_{Codom\ g},\ gog^{-1}(x) = g\big(g^{-1}(x)\big) = g\big(\sqrt{x}\big) = \big(\sqrt{x}\big)^2 \underbrace{=}_{(2)} x$$

(1) Podemos afirmar que $\sqrt{x^2} = x$ porque $x \geq 0$.

(2) Podemos afirmar que $\left(\sqrt{x}\right)^2 = x$ porque $x \geq 0$.

El análisis realizado es similar para cualquier función potencial par, es decir, $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^{2n}$ $(n \in \mathbb{N})$. Las potenciales impares, entendidas como $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^{2n-1}$ $(n \in \mathbb{N})$ son biyectivas, por lo que no presentan complejidades al pensar en su inversa.

Este trabajo combina aspectos funcionales y numéricos del tema. Así, podemos presentar la definición de radicación para cualquier índice aceptada por la comunidad matemática, compatible con el enfoque funcional que hemos dado.

Definición de radicación

Dados $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ y $n = 2k, k \in \mathbb{N}$: $\quad \sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow (b \geq 0 \wedge b^n = a)$

Dados $a \in \mathbb{R}$ y $n = 2k-1, k \in \mathbb{N}$: $\quad \sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$

Vayamos ahora a las trigonométricas. También se necesita disponer de una definición de arco seno de un número real (y del resto de las trigonométricas inversas).

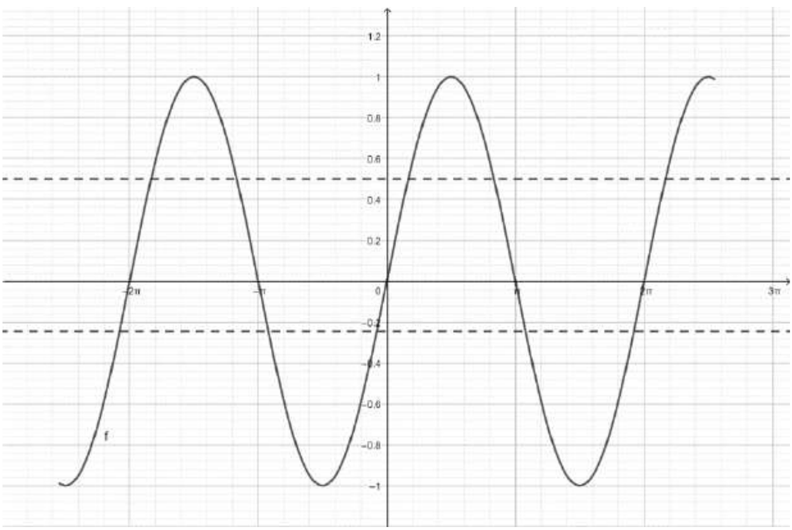
Definición de arco seno

Dado $a \in [-1,1]$: $\quad arcsen\ a = b \Leftrightarrow \left(b \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \wedge sen\ b = a\right)$

Definición de arco coseno

Dado $a \in [-1,1]$: $\quad arcos\ a = b \Leftrightarrow (b \in [0,\pi] \wedge cos\ b = a)$

Siguiendo la misma idea, se definen el resto de las trigonométricas inversas. Tomemos el caso de la función seno para analizar su función inversa. La tomamos definida como $f: \mathbb{R} \to [-1,1], f(x) = sen\ x$ para asumir la suryectividad. Es importante tener presente que esta función es periódica, de período 2π, lo que significa que 2π es el menor número positivo, tal que $\forall x \in \mathbb{R}: sen\ x = sen\ (x + 2\pi)$, lo que implica que $sen\ x = sen\ (x + k.2\pi)$ para cualquier $k \in \mathbb{Z}$. De esto se desprende inmediatamente que esta función no es inyectiva y que las ecuaciones de la forma $sen\ x = b$, con $b \in [-1,1]$, tienen infinitas soluciones para cada b. Esto puede interpretarse en el siguiente gráfico, en el que se muestra la representación gráfica de la función seno y dos representantes de la familia de rectas de ecuación $y = b$ que intersecan la curva infinitas veces.



Las soluciones de las ecuaciones de la forma $sen\ x = b$, con $b \in [-1,1]$, son:

$$f(x) = b \rightarrow sen\ x = b \leftrightarrow$$

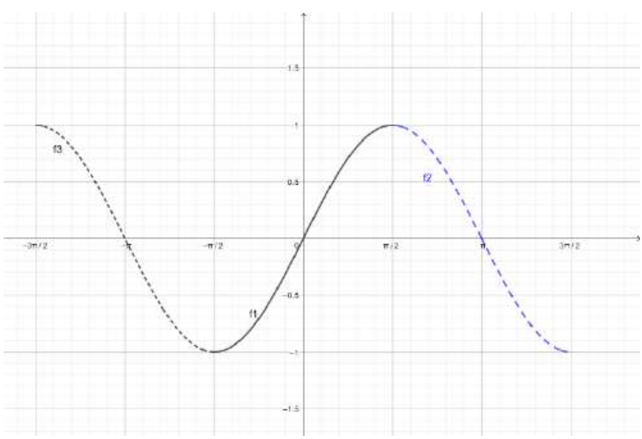
$$\begin{cases} si\ 0 < b < 1: x = (arcsen\ b + 2k\pi)\ \vee (x = \pi - arcsen\ b + 2k\pi), con\ k \in \mathbb{Z} \\ si - 1 < b < 0: x = (2\pi - arcsen\ b\ + 2k\pi) \vee (x = \pi + arcsen\ b + 2k\pi)\ con\ k \in \mathbb{Z} \\ si\ b = 0 \vee b = 1: x = (arcsen\ b + 2k\pi)\ con\ k \in \mathbb{Z} \\ si\ b = -1: (x = \pi + arcsen\ b + 2k\pi)\ con\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Para redefinir la función y transformarla en otra que sea inversible con modificaciones mínimas, debemos restringir el dominio. Teniendo en cuenta las soluciones de la ecuación, podemos tomar como dominio alguno de los siguientes conjuntos:

$C_1 = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $C_2 = \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, $C_3 = \left[-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right]$, etcétera. Las posibles funciones asociadas a esos ejemplos son:

$f_1: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}, f_1(x) = sen\ x$, $f_2: \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}, f_2(x) = sen\ x$

y $f_3: \left[-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}, f_3(x) = sen\ x$, cuyas representaciones gráficas se muestran a continuación.



Tomaremos $C = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, pues es el que contiene el 0. Así, redefinimos la función seno de la siguiente manera:

$$g: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1], g(x) = sen\, x$$

Esta función es inyectiva y biyectiva, y, por lo tanto, inversible. Una observación: en concordancia con lo dicho anteriormente, cuando decimos *la función seno*, ella está definida de ℝ en ℝ. La que hemos definido recién es una *restricción de la función seno*.

Ahora podemos definir la inversa de esta función. Como es conocido, la llamamos *arco seno* y la simbolizamos $arcsen$.

$$g^{-1}: [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], g^{-1}(x) = arcsen\, x \text{ (1)}$$

Por ser g y g^{-1} inversas, vale que gog^{-1} y $g^{-1}og$ son la función identidad.

$$g^{-1}og: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], g^{-1}og(x) = g^{-1}\big(g(x)\big) = g^{-1}(sen\, x)$$
$$= arcsen\,(sen\, x) \underbrace{=}_{(2)} x$$

$$gog^{-1}: [-1,1] \to [-1,1], gog^{-1}(x) = g\big(g^{-1}(x)\big) = g(arcsen\, x)$$
$$= sen\,(arcsen\, x) \underbrace{=}_{(2)} x$$

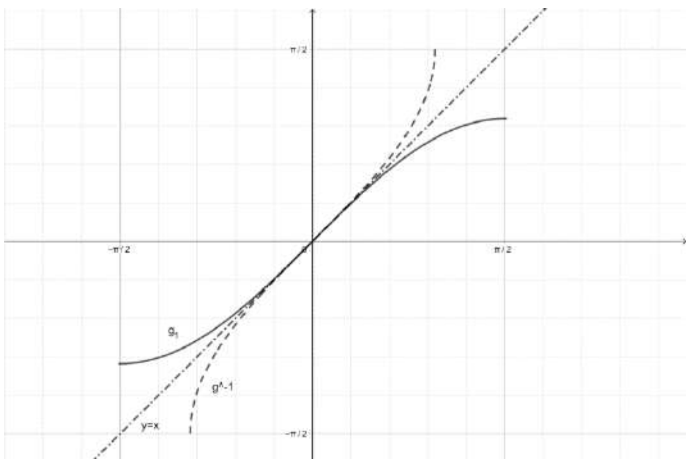
(1) Esta elección de dominio es compatible con lo que consideran las calculadoras cuando se usa la tecla sen^{-1}.

(2) Podemos decir que $arcsen\,(sen\, x) = x$ porque $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

Tomemos un número que no pertenezca al intervalo y veamos que no se cumple la igualdad. Por ejemplo: si $x = \pi$, vemos que $arcsen\,(sen\,\pi) = arcsen(0) = 0 \neq \pi$.

(3) Podemos afirmar que $sen\,(arcsen\,x) = x$ porque $-1 \leq x \leq 1$.

Tomemos un número que no pertenezca al intervalo y veamos que no se cumple la igualdad. Por ejemplo: si $x = 2$, vemos que $sen\,(arcsen\,2)$ no es un número real. En el gráfico siguiente representamos el seno (g), el arco seno (g^{-1}) y la recta de ecuación $y = x$.



Un punto cualquiera del gráfico de g es de la forma $(a; sen\,a)$ y su punto asociado en g^{-1} es $\big(sen\,a; arcsen\,(sen\,a)\big) = (sen\,a; a)$.

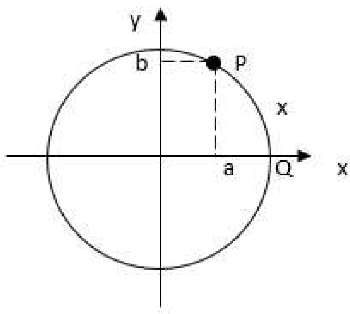
La recta r que los contiene tiene pendiente $\frac{a-sen\,a}{sen\,a-a} = -1$

y su ecuación es $r: y = -1(x-a) + sen\,a$. Observemos que:

- r es perpendicular a la recta de ecuación $h(x) = x$, pues sus pendientes son inversas y opuestas.
- El punto medio entre cualquier punto de g y su punto asociado en g^{-1}es $P = \left(\frac{a+sen\,a}{2}; \frac{sen\,a+a}{2}\right)$, lo que significa que pertenece a la recta h.

Estas dos condiciones determinan que el gráfico de g^{-1} es simétrico al gráfico de g mediante una simetría de eje en la recta de ecuación $h(x) = x$. Esto que acabamos de probar es aplicable a cualquier función inversible: el gráfico de una función y el de su inversa son simétricos respecto de la recta de ecuación $y = x$.

Una observación: la definición usual que se toma en ámbitos escolares del seno de un número real está dada a partir de la circunferencia trigonométrica (centro en el origen de coordenadas y radio unitario). Cada punto $P = (a; b)$ de la circunferencia determina en ella un arco QP de medida x, con origen en el punto $Q = (1; 0)$ y extremo en P. Llamamos seno de x a la ordenada de P. Simbólicamente, $sen\,x = b$. Si el arco es medido en sentido antihorario, $x > 0$; si es medido en sentido horario, $x < 0$.



De esta manera, para cada número real x queda determinado su seno, por lo que también queda definida la función de variable real $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = sen\,x$. Luego, el arco seno es la función inversa del seno.

La resolución de ecuaciones

Vamos a discutir ahora sobre ecuaciones que involucran funciones elementales que no son inyectivas. Tomaremos ejemplos con cuadráticas y trigonométricas del mismo tipo que las ya usadas. También hablaremos de la función módulo.

Vamos a ver ahora resoluciones formales de estas ecuaciones, esto es, aplicando un procedimiento ajustado a lo matemáticamente instituido. Suponemos que $x \in \mathbb{R}$, en todos los casos.

Ejemplo 1: resolver $x^2 = 49$.

Como la operación en la que está involucrada la incógnita es una potencia de grado 2, debemos aplicar raíz cuadrada miembro a miembro, basada en la propiedad $\forall a \in \mathbb{R}_{\geq 0}, \forall b \in \mathbb{R}_{\geq 0}$: $a = b \leftrightarrow \sqrt{a} = \sqrt{b}$.

$$x^2 = 49$$

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{49}$$

Segundo miembro: $\sqrt{49} = 7$, por definición de radicación; 7 es el único real no negativo que elevado al cuadrado da 49. Primer miembro: usamos la propiedad $\forall x \in \mathbb{R}: \sqrt{x^2} = |x|$. Entonces:

$$|x| = 7$$

Como consecuencia de la definición de módulo, los valores que verifican la ecuación son $x = 7$ y $x = -7$. Luego:

$$x = 7 \lor x = -7$$
$$S = \{7, -7\}$$

Este procedimiento es aplicable a cualquier ecuación del tipo $x^{2n} = a$ (con $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}, n \in \mathbb{N}$). Una observación importante: la ecuación tiene dos soluciones; la raíz cuadrada tiene una sola.

Ejemplo 2: resolver $\cos x = 0{,}5$.

Para obtener el valor de x, debemos aplicar arco coseno miembro a miembro, basado en la propiedad $\forall a \in [-1{,}1], \forall b \in [-1{,}1]: a = b \rightarrow arcos\, a = arcos\, b$.

$$\cos x = 0{,}5$$
$$arcos\,(\cos x) = arcos\; 0{,}5$$

Segundo miembro: $arcos\; 0{,}5 = \frac{1}{3}\pi$, porque $\frac{1}{3}\pi$ es el único real perteneciente a $[0, \pi]$ cuyo coseno vale 0,5, por definición de arco coseno. Primer miembro: $arcos\,(\cos x) = x + 2k\pi \vee arcos\,(\cos x) = 2\pi - x + 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$.

$$x + 2k\pi = \frac{1}{3}\pi \vee 2\pi - x + 2k\pi = \frac{1}{3}\pi$$

Despejando:

$$x = \frac{1}{3}\pi - 2k\pi \vee x = \frac{5}{3}\pi + 2k\pi$$

Cambiamos, por comodidad, $-2k\pi$ por $2k\pi$, ya que representan los mismos valores por ser $k \in \mathbb{Z}$.

$$x = \frac{1}{3}\pi + 2k\pi \vee x = \frac{5}{3}\pi + 2k\pi$$

$$S = \left\{x/\, x = \frac{1}{3}\pi + 2k\pi \vee x = \frac{5}{3}\pi + 2k\pi, \text{con } k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Una observación similar a la anterior: la ecuación tiene infinitas soluciones (dos familias de soluciones); el arco coseno tiene una sola. Este procedimiento es aplicable a cualquier ecuación del tipo $\cos x = a$ ó $sen\, x = a$, con $a \in [-1{,}1]$.

Inyectividad

Dada una función, sabemos que tiene interés ver si ocurre que a valores distintos asigna imágenes distintas. Esto está fundamentado en el sentido de este libro. Si esto no ocurre se dan situaciones de una complejidad significativa al pensar en su proceso inverso. Cuando ocurre, decimos que la función es inyectiva, y quedaría expresado así:

$f: A \to B$ es inyectiva $\leftrightarrow\ \forall x_1 \in A, \forall x_2 \in A: \left(x_1 \neq x_2\ \to f(x_1) \neq f(x_2)\right)$

Pero esta definición no utiliza igualdades, por lo que no resulta práctico para probar la inyectividad de una función, pues las propiedades se aplican a igualdades. Entonces, recordando que para dos proposiciones cualesquiera vale que $p \to q \Leftrightarrow {\sim}q \to {\sim}p$, podemos tomar su expresión contrarrecíproca:

$f: A \to B$ es inyectiva $\leftrightarrow\ \forall x_1 \in A, \forall x_2 \in A: (f(x_1) = f(x_2) \to x_1 = x_2)$

En lenguaje natural diríamos que si dos imágenes son iguales es que provienen de valores iguales (forma mucho menos intuitiva que la otra). Veamos la siguiente situación: consideremos el análisis de la inyectividad de la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2.(x+1)^2 - 3.$ Lo más razonable es que si uno sospecha que no es inyectiva explore numéricamente hasta encontrar algún par de elementos del dominio con la misma imagen, o que, si se conjetura que es inyectiva, intente probarlo con la definición. Veamos esta otra forma: sin una conjetura previa acerca de su veracidad, tomemos el antecedente de la definición y tratemos de llegar a su consecuente; si lo logramos, la función es inyectiva.

$\forall x_1 \in \mathbb{R}, \forall x_2 \in \mathbb{R}: f(x_1) = f(x_2) \to 2.(x_1+1)^2 - 3 = 2.(x_2+1)^2 - 3$

Realizamos los despejes con vistas a llegar a $x_1 = x_2$:

$$\to 2.(x_1+1)^2 = 2.(x_2+1)^2$$

$$\to (x_1+1)^2 = (x_2+1)^2$$

Ahora, tenemos que aplicar raíz cuadrada miembro a miembro para despejar el cuadrado:

$$\to \sqrt{(x_1+1)^2} = \sqrt{(x_2+1)^2}$$

Pero de esta igualdad no se infiere que $x_1 + 1 = x_2 + 1$, ya que no vale que $\sqrt{(x_1+1)^2} = x_1 + 1$ para cualquier $x_1 \in \mathbb{R}$. Por ejemplo,

si $x_1 = -2, x_2 = 0 : \underbrace{\sqrt{(-2+1)^2}}_{1} = \underbrace{\sqrt{(0+1)^2}}_{1}$, pero $-2+1 \neq 0+1$.

Queda claro que no podemos llegar al consecuente. Entonces, la función no es inyectiva, pues hay valores del dominio que no tienen imágenes distintas, esto es, que tienen imágenes iguales. Esto último nos permite precisar que una función no es inyectiva cuando existen un par de valores del dominio (alcanza un par) que tengan imágenes iguales. Simbólicamente:

$f: A \to B$ no es inyectiva $\leftrightarrow\ \exists x_1 \in A, \exists x_2 \in A: \big(x_1 \neq x_2\ \wedge f(x_1) = f(x_2)\big)$

Esto se corresponde con lo que obtendríamos con un análisis lógico. La definición de inyectividad tiene la forma:

$$\forall a, \forall b: (p\ \to q)$$

Su negación consiste en cambiar los cuantificadores (universales por existenciales) y usar la ley lógica $\sim(p \to q) \Leftrightarrow p \wedge \sim q$. Entonces:

$$\sim [\forall a, \forall b: (p\ \to q)] \leftrightarrow \exists a, \exists b: (p\ \wedge \sim q)$$

En nuestro ejemplo:

$$\exists -2 \in \mathbb{R} \wedge \exists 0 \in \mathbb{R}: (-2 \neq 0\,) \wedge \left(2.\underbrace{(-2+1)^2}_{1} - 3 = 2.\underbrace{(0+1)^2}_{1} - 3\right)$$

Capítulo 2
La enseñanza de los procesos inversos de las funciones no inyectivas

Definiciones de radicación en distintos textos

Como dijimos al comienzo, el tema que desarrollamos en este libro suele ser destacado en cursos iniciales de nivel superior. En este apartado presentamos una serie de definiciones de radicación tomadas de materiales que se utilizan en cursos de ingreso a distintas universidades nacionales. Para ello, hicimos una búsqueda en Google colocando en el buscador "matemática ingreso números reales" y seleccionamos únicamente aquellos materiales destinados a cursos de ingreso que dieran algún tratamiento teórico a la radicación. En la primera página, encontramos los resultados 1, 2, 4 y 7; en la segunda página, los resultados 4 y 7; en la tercera página no encontramos ninguno, y en la cuarta página, los resultados 1, 2 y 7, y allí decidimos finalizar la búsqueda.[1]

Vale precisar, primero, que cuando hablamos de *radicación en el conjunto de los números reales*, acorde con la noción matemáticamente instituida, entendemos lo siguiente:

1) Dado un número natural impar n, llamamos *raíz enésima de un número real* a al número real b que elevado a la enésima potencia da por resultado b. Notamos $\sqrt[n]{a}$ a ese número. Simbólicamente:

$$\text{dados } n \in \mathbb{N} \text{ e impar y } a \in \mathbb{R}\text{: } b = \sqrt[n]{a} \Leftrightarrow b^{\,n} = a$$

2) Dado un número natural positivo par n, llamamos *raíz enésima de un número real* a al único número real b no negativo que elevado

[1] La búsqueda se realizó el 11 de enero de 2020.

a la enésima potencia da por resultado b. También notamos $\sqrt[n]{a}$ a ese número. Simbólicamente:

$$\text{dados } n \in \mathbb{N}_{>0} \text{ y par y } a \in \mathbb{R}\text{: } \left(b \geq 0 \;\wedge b = \sqrt[n]{a}\right) \Leftrightarrow b^{\,n} = a$$

Podemos presentar ambos casos, de un modo resumido, así:

$$\sqrt[n]{a} = b \leftrightarrow \begin{cases} b^n = a & si\, n \in \mathbb{N} \text{ e impar} \\ b \geq 0 \;\wedge\; b^n = a & si\, n \in \mathbb{N}_{>0} \text{ y par} \end{cases}$$

A continuación, presentamos una síntesis de cada uno de los tratamientos encontrados para la definición de radicación. Nos limitaremos a presentar y a analizar el aspecto medular de la definición, esto es, la relación entre los tres números involucrados.

Ejemplo 1:

Dados $a \in \mathbb{Q}_{\geq 0}, n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, el racional b es $\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^{\,n} = \, a$

Observaciones:

- No muestra ejemplos, pero se infiere que considera un único resultado.
- Sin embargo, con la definición dada, las raíces de índice par tendrían dos resultados, ya que vale, por ejemplo, que $\sqrt{9} = 3 \leftrightarrow 3^2 = 9$, y también que $\sqrt{9} = -3 \leftrightarrow (-3)^2 = 9$.
- Se presenta la definición cuando se estudian los racionales y no se extiende luego a los reales.
- Incurre en una inconsistencia que podemos enunciar así: *solo toma una de las soluciones (para el caso de índice par y radicando negativo) y no reconoce que de la definición se infiere que hay dos.*

Ejemplo 2:

Dados $a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}_{>0}$: $\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^{\,n} = a$

Exhibe un ejemplo: $\sqrt[4]{16}$ tendría dos resultados: 2 y -2, ya que $2^4 = 16$ y $(-2)^4 = 16$. Pero, "por definición, la radicación admite un único resultado, quedándonos entonces con el mayor de los resultados posibles".

Observaciones:

- La aclaración invoca a una supuesta definición no explicitada que se contradice con la definición que se da, que pasa a ser provisoria.
- Podríamos hablar de raíces de índice 1. Por ejemplo: $\sqrt[1]{3} = 3$ pues $3^1 = 3$.
- Incurre en una inconsistencia que podemos enunciar así: *reconoce que de la definición se infiere que hay dos soluciones (para el caso de índice par y radicando negativo), pero explicita que decide tomar solo la positiva.*

Ejemplo 3:

Dados $a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}_{>1}$: si n es impar: $\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^{\,n} = a$
si n es par: $\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^{\,n} = a$, con $a \geq 0$

Observaciones:

- A pesar de que se reconoce la necesidad de considerar casos según la paridad del índice, también ocurre que las raíces de índice par y radicando positivo tienen dos resultados.
- Exhibe ejemplos en los que solo toma un único resultado.
- Incurre en la misma inconsistencia que el ejemplo 1.

Ejemplo 4:

Dado $n \in \mathbb{N}$: $\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^{\,n} = a$

Se muestra el ejemplo: $\sqrt{16} = 4$ sí y solo sí $4^2 = 16$

Observaciones:

- No se establecen restricciones al valor de a. Se deja planteado el interrogante: $\sqrt{-16} =$ ¿es posible?
- Las raíces de índice par y radicando negativo tendrían dos resultados y no uno como se muestra en el ejemplo.
- También en este caso podríamos hablar de raíces de índice 1.
- Incurre en la misma inconsistencia que el ejemplo 1.

Ejemplo 5:

Raíz cuadrada: dados $a \in \mathbb{R}_{>0}$: $\sqrt{a} = b \Leftrightarrow b \geq 0\ y\ b^2 = a$

Raíz cúbica: dados $a \in \mathbb{R}$: $\sqrt[3]{a} = b \Leftrightarrow b^3 = a$

Raíz cuarta: dados $a \in \mathbb{R}_{>0}$: $\sqrt[4]{a} = b \Leftrightarrow b \geq 0\ y\ b^4 = a$

Luego:

- Se muestra por qué $\sqrt{25} = 5$ y por qué no vale que $\sqrt{25} = -5$, a pesar de que $(-5)^2 = 25$.
- Se hace hincapié en que hay dos números que elevados al cuadrado dan 25, pero solo uno de ellos es su raíz cuadrada.
- Se muestra que las raíces cuadradas de números negativos no tienen solución.

Observaciones:

- Se define solo la radicación para índices 2, 3 y 4, aunque queda sugerida la forma de hacerlo para cualquier índice.
- La única imprecisión en que se incurre es en no incluir el caso $a = 0$.
- Las explicaciones que se dan luego de la definición resultan muy pertinentes.

Ejemplo 6:

Dados $a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, $\sqrt[n]{a}$ es el número b que cumple que $b^n = a$:
$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$

Exhibe un ejemplo: $\sqrt{16} = 4$, ya que $4^2 = 16$.

Pero luego explica con detalle la propiedad $a^m = (-a)^m$, con m par, y señala que esto tiene dos consecuencias: una, que si $a < 0$ no hay solución para la radicación; y la otra, que "si $a > 0$, $\sqrt[n]{a}$ *admitiría dos soluciones: b y* $-b$, *lo que obliga a definir cuál valor vamos a considerar que es la raíz*". Propone sumar lo siguiente: $a \in \mathbb{R}_{>0}, m \in \mathbb{N}$, m par, $\sqrt[m]{a}$ es el número positivo b que cumple que $b^n = a$.

Exhibe un ejemplo, en el que muestra que $\sqrt{16} = 4$ y no $\sqrt{16} = \pm 4$.

Observaciones:

- Con la definición dada inicialmente hay dos soluciones y no solo una, como dice en el ejemplo que muestra, aunque luego reconoce que hay dos.
- Propone un agregado a la definición para el caso de raíces de índice par, a pesar de que no se planteó como provisoria; además, lo agregado se contradice con esa definición inicial.

- En el agregado no se incluye el caso $a = 0$, pero puede considerarse incluido en la definición inicial.
- Incurre en una inconsistencia que podemos enunciar así: *de la definición se infiere que hay dos soluciones (para el caso de índice par y radicando negativo), pero solo toma una en los ejemplos, aunque luego explica que hay dos; para decidir cuál elegir, redefine el caso de manera correcta.*

Ejemplo 7:

Dado $n \in \mathbb{N}$: $\sqrt[n]{a} = b$ si $b^{\,n} = a$

Exhibe un ejemplo: $\sqrt[4]{81} = 3$, pues $3^4 = 81$

Observaciones:

- No se establecen restricciones al valor de a.
- Esta definición tiene la particularidad de que no está planteada como una equivalencia, sino como un condicional, por lo que no podría tratarse de una definición, salvo aceptando abuso de lenguaje. Sin embargo, con esto: $\sqrt[4]{81}$, también tomaría el valor -3: si $(-3)^4 = 81$ (lo que no es cierto), entonces diríamos también que $\sqrt[4]{81} = -3$.
- Incurre en la misma inconsistencia que el ejemplo 1.

Ejemplo 8:

Dado $n \in \mathbb{N}$: $\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^{\,n} = a$

Luego se enuncia que $\sqrt[n]{(a)^n} = a$, si a es impar, y que $\sqrt[n]{(a)^n} = |a|$, si a es par.

Observaciones:

- No se establecen restricciones al valor de a.
- No se dan ejemplos, pero con esta definición tenemos raíces con dos resultados.
- La propiedad que se enuncia entra en contradicción con la definición dada, pues $\sqrt{16} = \pm\, 4$ según la definición dada, y $\sqrt{16} = |4| = 4$ según la propiedad enunciada.
- Incurre en una inconsistencia que podemos enunciar así: *de la definición dada se infiere que hay dos soluciones (para el caso de índice par y radicando negativo), pero no puede saberse si los considera a ambos o solo a uno; luego, enuncia la relación del módulo con la raíz cuadrada del cuadrado, que entra en contradicción con la definición dada.*

Ejemplo 9:

Dados $a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$: $\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^{\,n} = a$

Se agrega aparte el caso de índice 1: $\sqrt[1]{a} = a$ para todo a real, y el caso $a = 1$ y $a = 0$: $\sqrt[n]{1} = 1$ y $\sqrt[n]{0} = 0$.

Luego se indica que "en la definición vamos a considerar dos casos: raíces de índice impar y raíces de índice par". La nueva definición para el caso de índice impar es la misma que antes, pero se explicita la unicidad del resultado (que ya lo era en la definición inicial). En el caso de índice par se dice que "la definición no es unívoca". Se divide la situación en dos casos. Uno, cuando el radicando es negativo, en el que se dice que el resultado es un número complejo. El otro, cuando el radicando es positivo (el caso de radicando nulo no se contempla), en el que se dice que hay dos soluciones y se ejemplifica con $\sqrt{4}$. Se agrega que "para tener unicidad en el caso de raíces pares de números positivos vamos a considerar como resultado solo el resultado de signo positivo".

Observaciones:

- Los casos de la base 1 y 0 no necesitan ser definidos aparte, pues quedan contemplados en la definición dada, que nuevamente tiene dos resultados para el caso que nos interesa, y así la definición adicional de $\sqrt[n]{1}$ y $\sqrt[1]{a} = a$ es contradictoria.
- En todo el desarrollo no presenta ningún ejemplo de las distintas situaciones, excepto el indicado.
- Incurre en una inconsistencia que podemos enunciar así: *reconoce que de la definición se infiere que hay dos soluciones (para el caso de índice par y radicando negativo), pero explicita que decide tomar solo la positiva, fundamentado en la necesidad de unicidad en el resultado.*

Completamos este listado con cuatro ejemplos de manuales escolares utilizados durante la década del ochenta que incorporan elementos de interés. El primero de ellos fue un texto de baja circulación, los dos que siguen tuvieron un alcance masivo, y el último –también con formato de libro–, de una universidad nacional, se utilizó a comienzos de la década, cuando había exámenes de ingreso.

Ejemplo 10:

$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$

En un ejemplo resuelto, propone que los ejercicios combinados se bifurquen considerando los dos resultados de las raíces.

Observaciones:

- No hay consideración sobre restricciones a los literales.
- Es el único caso en que se explicita que los dos resultados se sostienen también en la operatoria numérica combinada.
- Incurre en una inconsistencia que podemos enunciar así: *reconoce que de la definición se infiere que hay dos soluciones (para el caso de índice par y radicando negativo) y las considera para todas las situaciones.*

Ejemplo 11:

$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$

Si el índice es par y el radicando negativo, hay dos soluciones, que son escritas como: $\pm\sqrt{4} = \pm 2$. Además, considera que $+\sqrt{4} = 2$ es el *valor aritmético* de la raíz.

Observaciones:

- No hay consideración sobre restricciones a los literales.
- Presenta una simbología contradictoria. Cuando define radicación utiliza $\sqrt{}$ y cuando ejemplifica lo hace como $\pm\sqrt{}$.
- Incurre en una inconsistencia que podemos enunciar así: *reconoce que de la definición se infiere que hay dos soluciones (para el caso de índice par y radicando negativo), pero explicita que decide tomar solo la positiva, a la que llama valor aritmético (o expresión similar) utilizando notación que no es compatible.*

Ejemplo 12:

Dados $a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$: $\sqrt[n]{a} = x \ \ si \ \ x^n = a$

Luego se explica cada uno de los casos según la paridad del índice y el signo del radicando. Si el índice es par y el radicando es positivo, dice que existen dos raíces de igual valor absoluto pero distinto signo. A la raíz positiva la llama raíz o valor aritmético del radical. Agrega que "en general, al escribir un radical de índice par se considera que representa su raíz aritmética". Lo ejemplifica con "$\sqrt{16}$ representa al número 4; cuando se quiere indicar las dos raíces, se utiliza $\pm\sqrt{16}$, que es igual a ± 4". Agrega una precisión: "en el caso de índice impar, como la raíz es única, no se presenta esta ambigüedad".

Observaciones:

- También en este caso podríamos hablar de raíces de índice 1.
- Incurre en la misma inconsistencia que el del ejemplo 11, aunque otorga un lugar más destacado al valor aritmético.

Ejemplo 13:

Dados $a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$: $\sqrt[n]{a} = x \iff x^n = a$

Define la noción de raíz principal: si el número tiene una raíz positiva o cero, esa es la principal; si no tiene una raíz positiva o cero pero tiene una negativa, esa es la principal.

Muestra como ejemplo: $\sqrt{25} = \pm 5$ (la raíz principal es $+5$).

Hace hincapié en que "*el símbolo $\sqrt[n]{a}$ tiene significado bien definido*". A continuación explica que

$$\sqrt{x^2} = \begin{cases} x \ si \ x \geq 0 \\ -x \ si \ x < 0 \end{cases}$$

precisando que acá se considera la raíz principal.

Observaciones:

- Nuevamente hay dos soluciones para las raíces de índice par y radicando positivo.
- También podríamos hablar de raíces de índice 1.
- Incurre en una inconsistencia que podemos enunciar así: *reconoce que de la definición se infiere que hay dos soluciones (para el caso de índice par y radicando negativo), pero explicita que decide tomar solo la positiva, a la que llama valor aritmético (o expresión similar), y luego da la relación entre el módulo y la raíz cuadrada del cuadrado, que es incompatible con la definición dada.*

Análisis de definiciones propuestas de radicación

Puede resultar sorprendente que en la búsqueda realizada solo una de las nueve propuestas presenta una definición correcta (aunque con una imprecisión menor). Este es otro elemento que pone en evidencia la complejidad del asunto, en apariencia sencillo, y deja más claro lo inconveniente de responsabilizar a los estudiantes por no disponer de estos conocimientos en un nivel satisfactorio. Además, queda planteada otra cuestión, que analizaremos después: ¿en qué momento conviene presentar las definiciones de los objetos matemáticos trabajados?

A continuación detallamos una serie de inconvenientes que surgen a partir de aceptar lo que podemos llamar una supuesta definición de radicación, que dice que $\sqrt[n]{a} = b \leftrightarrow b^n = a$. Con esto, la radicación de índice par admite dos resultados cuando el radicando es positivo. Por ejemplo: si queremos calcular $\sqrt{100}$, el número 10 es un resultado posible, ya que $10^2 = 100$, pero también -10 es un resultado posible, ya que $(-10\,)^2 = 100$. La exigencia al resultado de que al ser elevado al cuadrado permita obtener el radicando hace que las raíces de índice par con radicando mayor que cero tengan dos resultados. ¿Cómo suele escribirse esto que se obtiene? $\sqrt{100} = 10$ y $\sqrt{100} = -10$, o también, en forma simplificada: $\sqrt{100} = \pm 10$. Más adelante haremos una consideración acerca del uso del símbolo $\pm$.

Esto se apoya en una idea ingenua (y errónea) sobre la relación de inversibilidad entre potencia y raíz, y acarrea un abanico de dificultades que desarrollamos a continuación:

- Uso del símbolo. Se utiliza el mismo símbolo ($\sqrt{\ }$) para designar un único número (cuando el índice es impar, como en $\sqrt[3]{8} = 2$) o también dos (como el caso de $\sqrt{100} = \pm 10$).

- Contradicción con otras propiedades aceptadas. 1) Una de las propiedades de la relación de igualdad es la siguiente: $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}: (a = b \ \wedge a = c) \rightarrow b = c$. Usando la supuesta definición: $\sqrt{100} = 10$ y $\sqrt{100} = -10$, pero $10 \neq -10$. 2) si bien la noción de módulo o valor absoluto de un número real no es de fuerte presencia en la escolaridad secundaria, hay textos que lo incluyen. Una relación que vincula el módulo con la raíz cuadrada es la siguiente: $\forall a \in \mathbb{R}: \sqrt{a^2} = |a|$. Esta propiedad entra en contradicción con la supuesta definición de radicación, ya que, por ejemplo, según la propiedad $\sqrt{5^2} = |5| = 5$, mientras que con la definición alternativa de radicación $\sqrt{5^2} = \sqrt{25} = \pm 5$.

- Contradicción con el concepto de función. La radicación puede pensarse como una función en la que cada elemento del dominio (los reales no negativos) debe tener una única imagen en el codominio. Por ejemplo: para la función raíz cuadrada, $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x}$, $f(4)$ no puede admitir como resultados el 2 y el -2, aunque ambos pertenezcan al codominio.

- Contradicción con el concepto de función inversa. Ya hemos tratado esto. Llamando g a la inversa de la función redefinida, por ejemplo, hay dos números reales que elevados al cuadrado dan 64, que son 8 y -8, y, por esto, la ecuación $x^2 = 64$ tiene dos soluciones, pero $g^{-1}(64) = \sqrt{64} = 8$ y no ± 8.

Análisis de resoluciones de las ecuaciones

Las ecuaciones cuadráticas

De todos los procedimientos incorrectos para resolver ecuaciones, como $x^2 = 49$, el que mostramos al comienzo del libro es, con seguridad, el más observado. Recordémoslo: $x^2 = 49$, paso el cuadrado como raíz cuadrada: $x = \sqrt{49}$, resuelvo la raíz cuadrada: $x = 7$ ó $x = -7$.

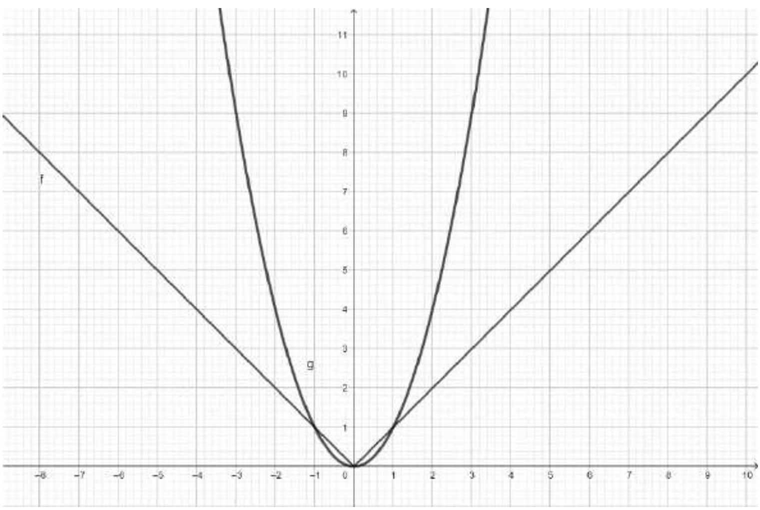
Pero esta resolución no solo se ve en estudiantes, sino también en algunas clases de matemática, en materiales que circulan por la web e incluso en alguna bibliografía escolar y del nivel superior. Esto pone en evidencia la complejidad del asunto, pese a que aparece en un contenido elemental. Un elemento que obstaculiza la superación de estos errores es que el procedimiento es eficaz, pues devuelve las soluciones correctas.

Discutamos este procedimiento. El segundo paso consiste en tomar el valor de la raíz cuadrada de un número positivo con dos resultados. Ya hemos discutido sobre este error. El primer paso podría describirse dentro de las técnicas de los *despejes por pasajes*. Aquí se estaría usando que *los cuadrados pasan como raíz cuadrada* y que *el seno pasa como arco seno*, expresiones muy utilizadas en la jerga escolar (especialmente, la primera).

No pretendemos aquí impugnar el uso de la técnica de los pasajes (en lugar de realizar operaciones en ambos miembros de la igualdad), sino expresar que estas técnicas presentan insuficiencias que deben trabajarse en el aula. El pasaje de cuadrado a raíz se apoya en el siguiente supuesto: $\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}: a^2 = b^2 \rightarrow a = b$, que es un enunciado falso, ya que $4^2 = (-4)^2$ y, sin embargo, $4 \neq -4$.

El enunciado anterior puede transformarse en uno verdadero de esta manera: $\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}: a^2 = b^2 \rightarrow |a| = |b|$. Por esto, un procedimiento correcto para la resolución de la ecuación es el que hemos mostrado en el primer capítulo: $x^2 = 16 \leftrightarrow \sqrt{x^2} = \sqrt{16} \leftrightarrow |x| = 4 \leftrightarrow x = 4 \vee x = -4$.

Sin embargo, este procedimiento requiere del manejo de la noción de módulo de un número real y de alguna de sus propiedades. Entendemos que no es acertado desarrollar este tema con la sola finalidad de tener un procedimiento correcto para resolver estas ecuaciones. Además, la incorporación del módulo resuelve el problema de la incorrección, pero probablemente no resuelva las dificultades en su comprensión, ya que la función módulo tiene un comportamiento similar a la función cuadrado (en el sentido de su no inyectividad), como puede verse en el gráfico siguiente, en el que vemos la representación de la función módulo $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = |x|$ y de la función cuadrática $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = x^2$.



Pensamos que es poco probable que un estudiante que no comprende el proceso inverso de la cuadrática logre hacerlo a partir de la función módulo, que tiene el mismo comportamiento y que, además, es una noción nueva cuya notación no explicita que corresponde a una función partida.

Consideramos que para resolver este tipo de ecuaciones no se necesita recurrir al módulo ni a los pasajes de términos, sino que alcanza con la noción de solución de una ecuación. En otros términos, no consideramos imprescindible que deba aplicarse un procedimiento en el que cada paso está basado en propiedades.

Cuando se nos plantea resolver la ecuación $x^2 = 49$, nos preguntamos: ¿cuáles son todos los números reales que elevados al cuadrado dan 49? Es fácil ver que esos números son dos: 7 y -7, sin hablar de pasajes de cuadrados a raíz ni de módulo. Esto lo presentamos así:

$$x^2 = 49$$
$$x = 7 \text{ o } x = -7$$
$$S = \{7, -7\}$$

Queda expresada la diferencia entre buscar una imagen mediante una función inversa como $\sqrt{49}$, que exige un resultado único por ser la raíz cuadrada de una función, y resolver una ecuación como $x^2 = 49$, que tiene dos soluciones. Además, entendemos que también quedan expresadas las dificultades esperables en el aprendizaje y la evidencia de la necesidad de un tratamiento específico por parte de la enseñanza.

El método también es aplicable si no tuviéramos un cuadrado perfecto. Por ejemplo: si queremos resolver $x^2 = 11$, nos preguntamos cuáles son todos los números reales que al cuadrado dan 11: son $\sqrt{11}$ y $-\sqrt{11}$. Lo presentamos así:

$$x^2 = 11$$
$$x = \sqrt{11} \text{ ó } x = -\sqrt{11}$$
$$S = \{\sqrt{11}, -\sqrt{11}\}$$

Volvamos a la supuesta definición de radicación que acepta dos resultados. Observemos que la consideración de dos resultados es únicamente para el caso de estar vinculado con la resolución de las ecuaciones. Cuando la radicación está involucrada en cálculos combinados, no se propone que estos se bifurquen (excepto en el material didáctico del ejemplo 10). En el siguiente cálculo combinado no se espera obtener ocho resultados distintos:

$$\sqrt{1-\frac{3}{4}+\frac{1}{5}}-\sqrt{16}.\sqrt{64}$$

Para sortear la contradicción de sostener que la raíz tiene dos resultados cuando se trata de una ecuación y uno solo cuando está involucrada en una operatoria numérica, algunos –como el caso del material didáctico del ejemplo 11– proponen la noción de *valor aritmético de la raíz*, esto es, considerar en ciertas ocasiones, como la operatoria numérica combinada, solo la solución positiva. Pero ¿qué símbolo se debe utilizar para diferenciar aquella raíz cuadrada que proporciona dos resultados, de la otra, que solo proporciona uno? Para esto hay dos respuestas: la primera es el uso del mismo símbolo. En este caso, queda delegado al sentido común cuándo corresponde usar uno u otro. Bajo esta lógica, parecería que cuando se pide calcular $\sqrt{64}$ se deben dar los dos resultados, mientras que en el cálculo combinado de más arriba se usaría el valor aritmético. La segunda respuesta le otorga un símbolo propio al valor aritmético: $+\sqrt{}$ (como lo hace el material del ejemplo 11). En este caso, la imprecisión es tal que no puede apelarse ni siquiera al sentido común para saber cuándo corresponde uno u otro, ya que se suma una nueva contradicción: $+a$ y a no siempre representan al mismo número.

Las ecuaciones trigonométricas

El procedimiento erróneo que hemos visto aplicado en $x^2 = 49$ se puede aplicar, de manera análoga, en las ecuaciones trigonométricas. Veamos un ejemplo: $\cos x = \frac{1}{2}$, paso el coseno a arco coseno: $x = arcos\ \frac{1}{2}$, resuelvo el arco coseno: $x = \frac{1}{3}\pi + 2k\pi \lor x = \frac{5}{3}\pi + 2k\pi, con\ k \in \mathbb{Z}$.

En estas funciones se expresa el mismo problema que en la cuadrática analizada: $\cos\left(\frac{1}{3}\pi\right) = \frac{1}{2}$ y $\cos\left(\frac{5}{3}\pi\right) = \frac{1}{2}$. Pero $arcos\ \frac{1}{2} = \frac{1}{3}\pi$. Hay infinitos valores cuyo coseno es $\frac{1}{2}$, por esto, la ecuación $\cos x = \frac{1}{2}$ tiene infinitas soluciones, pero solo una de ellas es el arco coseno de 0,5, que es el único valor del dominio en el cual la función coseno redefinida es inversible.

Una observación: hemos usado el recurso de los pasajes para realizar los despejes. Tomamos esta opción porque está muy difundida en el nivel secundario y en el superior inicial y porque es eficaz, si se usa correctamente. Algunos creen que utilizando los procedimientos formales se subsanan estos errores, pero veamos cómo puede incurrirse en el mismo error usando la operatoria en ambos miembros: $\cos x = \frac{1}{2}$. Aplico arco coseno miembro a miembro: $arcos\ (\cos x) = arcos\ \frac{1}{2}$, resuelvo: $x = arcos\ \frac{1}{2}$, resuelvo el arco coseno: $x = \frac{1}{3}\pi + 2k\pi \lor x = \frac{5}{3}\pi + 2k\pi, con\ k \in \mathbb{Z}$. Se usa que $arcos(\cos x) = x$, lo que no es válido para cualquier número real.

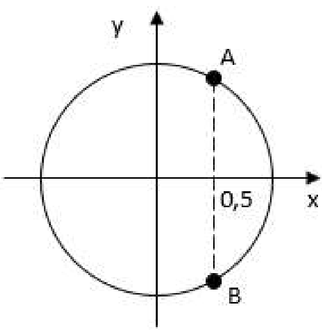
Podemos pensar en resolver la ecuación dada usando el método correcto que propusimos más arriba para $x^2 = 49$. Si se nos plantea resolver la ecuación $\cos x = \frac{1}{2}$, estamos buscando todos los números reales cuyo coseno es $\frac{1}{2}$. Su interpretación en la circunferencia trigonométrica es un buen recurso para encontrarlas. Para ello:

- como el coseno de un número es la abscisa del punto asociado en la circunferencia, ubicamos 0,5 en el eje de las abscisas;
- buscamos todos los puntos de la circunferencia que tienen esa abscisa (son dos: A y B);
- para dar los valores de x hay que hallar la medida del arco de circunferencia con origen en el punto $(1;0)$ y extremo en A, medido en sentido antihorario (en este caso, por tratarse de valores estandarizados, es $\frac{\pi}{3}$), y también hay que hallar la medida del arco de circunferencia con origen en el punto $(1;0)$ y extremo en B, medido en sentido antihorario (en este caso, usando el valor ya obtenido y las características de la situación que se visualiza en el gráfico, es $\frac{5\pi}{3}$). Además, sumando o restando giros completos, obtenemos otros números que tienen el mismo punto A o B asociado. Presentamos esto del siguiente modo:

$$\cos x = 0{,}5$$

$$x = 1/3\,\pi + 2k\pi \text{ ó } x = 5/3\,\pi + 2k\pi, con\ k \in \mathbb{Z}$$

$$S = \{x \,/\, x = 1/3\,\pi + 2k\pi \ \vee x = 5/3\,\pi + 2k\pi, con\ k \in \mathbb{Z}\}$$



$x = \frac{1}{3}\pi$, asociado a A

$x = \frac{5}{3}\pi$, asociado a B

Creemos que lo desarrollado hasta acá, en cuanto a procedimientos de resolución para estos dos tipos de ecuaciones, es suficiente para el nivel secundario e incluso para ciertos cursos de nivel superior. En síntesis, la idea es no poner en juego explícitamente en la resolución las funciones inversas. Sin embargo, pensar en la búsqueda de un procedimiento formal o, también, de algún procedimiento que se explique en propiedades aplicables en cada paso es un tema de interés. Su uso en el aula de matemática es una decisión que deben tomar los docentes.

Reglas de los despejes por pasajes

Los despejes mediante reglas de pasajes están instalados de modo generalizado en la escolaridad media. Algunos docentes son reacios a utilizarlos debido a su informalidad y falta de rigor, y a que sostienen que explican los errores de los estudiantes. Así, instalan los procedimientos formales que consisten en realizar operaciones en ambos miembros de las igualdades. Vamos a comentar algunos escollos de esta elección didáctica.

En primer lugar, es tal la difusión de los despejes por pasajes que casi con seguridad los estudiantes los conozcan con antelación a nuestra intervención. En este caso, como siempre, es recomendable tomar lo que los estudiantes conocen para seguir construyendo conocimiento. Y en el caso en que nuestra intervención sea el primer encuentro de los estudiantes con las ecuaciones, deberíamos tener presente que es muy posible que en las próximas experiencias estos métodos se den por conocidos y que aún no estén suficientemente estabilizados como para adaptarse a estos cambios.

En segundo lugar, los despejes por pasajes son eficaces en la mayoría de los casos y presentan insuficiencias en casos como los que estamos tratando aquí; esto es, que la regla de que *los cuadrados* *pasan como raíces cuadradas* no es eficaz, excepto que le sumemos un error compensatorio, como ya hemos visto. Pero si reformulamos la regla y decimos que *los cuadrados pasan como raíz cuadrada y como menos raíz cuadrada*, sí resulta eficaz.

Esta situación, resuelta por mecanismos rigurosos, requiere aplicar sucesivamente las propiedades $\forall a \in \mathbb{R}_{\geq 0}, \forall b \in \mathbb{R}_{\geq 0}: a = b \rightarrow \sqrt{a} = \sqrt{b}$ y $\forall x \in \mathbb{R}: \sqrt{x^2} = |x|$. Nos preguntamos, en el caso de elegir recorrer este camino, si los estudiantes tienen en cuenta la hipótesis de la primera propiedad cuando extraen raíz cuadrada en ambos miembros de la igualdad, y si podrían dar una explicación de por qué vale la segunda propiedad cuando la utilizan. Pensamos que no está generalizada una respuesta afirmativa a estas dos preguntas. Entonces, los estudiantes estarían presentando una resolución que luce correcta –ya que es fácilmente reproducible–, pero posiblemente no comprendan lo que realizan.

A propósito, si se plantea la ecuación $x^2 = -1$, queremos que los estudiantes digan que la ecuación no tiene solución sin realizar ni pasajes ni operaciones. Sin embargo, sabemos que es muy posible que involucren la raíz cuadrada de -1, ya sea mediante un pasaje o una operación en ambos miembros. No creemos que aquellos que se manejan con los procedimientos formales tengan más chances de resolver de la manera que quisiéramos.

Sea uno u otro el camino, en general, es lo mismo lo que hay que pensar. ¿Cuál es la operación principal en la que está involucrada la incógnita? Esa es la operación que se debe deshacer.

Los despejes por pasajes pueden ser una buena opción en el aprendizaje de la resolución de este tipo de ecuaciones. También pensamos que es necesario que en algún momento de la escolaridad se discuta en forma integral esta práctica no rigurosa ni formal de resolver ecuaciones. Ese momento debería ser con estudiantes ya avanzados, como un trabajo de reflexión sobre un conocimiento que es de anclaje escolar, pero que lo trasciende, ya que es tomado por distintos usuarios de la matemática fuera del ámbito escolar.

En síntesis, no nos parece inaceptable que convivamos con que *los números pasan*. Habrá tiempo para discutirlo en algún momento de la formación. Esto pone en juego una discusión didáctica que podemos sintetizar en esta pregunta: ¿se deben parecer mucho, poco o nada la matemática que se hace en la escuela y la que se hace en el campo científico? No desarrollaré esto ahora. Para el lector interesado, Krichesky, Rodríguez, Petrucci, Guindi, De Amézola y Cerletti (2004) ofrecen una respuesta.

De todos modos, cualquiera sea la elección didáctica que realicen los docentes, lo central es asumir que habrá dificultades en su aprendizaje. Por lo tanto, deberá ser retomado una y otra vez.

Los procesos inversos de funciones no inyectivas: un obstáculo

Entre los aportes del didacta francés Guy Brousseau está la noción de obstáculos, que entendemos que se ajusta a lo que estudiamos aquí. Tomemos, para simplificar, el caso de la resolución incorrecta de la ecuación cuadrática, pasando el cuadrado a raíz cuadrada y considerando dos resultados para la raíz.

Según Brousseau (1983), un obstáculo es un conocimiento que tiene las siguientes características:

- Se expresa a través de un error, pero no es un error azaroso (es claro que nuestro ejemplo tiene esta característica).
- Es eficaz en un cierto dominio (da los resultados esperados; y si consideramos solo el pasaje de cuadrado a raíz, es eficaz en $\mathbb{R}_{\geq}0$).
- Es fugaz, errático, persistente, reaparece aun cuando el sujeto lo reconoció y lo rechazó (cualquier docente con experiencia puede comprobar su veracidad en nuestro ejemplo).

Para Brousseau, franquear un obstáculo requiere un trabajo similar al del establecimiento de un conocimiento. Es necesario proponer un conjunto de situaciones nuevas tendientes a desestabilizarlo, a mostrarlo ineficaz y que requieran rechazarlo. Por esto, en el próximo capítulo presentamos una serie de ideas para pensar su tratamiento en las clases de matemática.

Brousseau considera tres orígenes para los obstáculos: el epistemológico, el didáctico y el ontogenético; este último tiene que ver con las limitaciones del sujeto que aprende, producto de su desarrollo cognitivo. No nos ocuparemos de esto ahora. Los obstáculos de origen epistemológico son aquellos que se explican en el propio conocimiento disciplinar, en su complejidad, y pueden ser constitutivos del conocimiento. Los obstáculos de origen didáctico son aquellos que están relacionados con decisiones de la enseñanza.

Los errores asociados a los procesos inversos de funciones no inyectivas en la resolución de ecuaciones son:

- Pasar las potencias pares como raíces del mismo índice.
- Considerar que las raíces de índice par tienen dos resultados.
- Pasar el seno (u otra trigonométrica) como arco seno (o la inversa que corresponda).
- Considerar que el arco seno (o la trigonométrica que corresponda) tiene infinitas soluciones.

Estamos convencidos de que estos errores tienen origen en la complejidad del contenido y que lo hemos fundamentado en este trabajo, por lo que podría tratarse de un obstáculo de origen epistemológico. Este tipo de obstáculos no deben ser ignorados, sino tratados intencionalmente por la enseñanza. Por supuesto que también ocurre que estos obstáculos pueden tener un origen didáctico. Prueba de ello son los materiales didácticos que hemos comentado más arriba.

Algunas observaciones

Como hemos visto, la definición de radicación de índice par se presenta como un problema complejo para la enseñanza. Pero más allá del caso de la radicación, pensamos que hay un problema de enfoque que genera una encerrona en algunas propuestas de enseñanza. Este problema es *comenzar por definir*, cuando, en rigor, en el trabajo matemático, la definición surge al final del trabajo. Si se abandonara esta lógica de iniciar los temas con definiciones, no habría que dar otras para corregir las anteriores, u otras que después se ve que no dicen lo que se quiere decir. Por ejemplo, sabemos que $5^2 = 25$ y que $(-5)^2 = 25$, ¿qué queremos que dé por resultado $\sqrt{25}$? Queremos que dé 5, entonces, proponemos una definición que diga esto.

Pensamos que la enseñanza suele estar caracterizada por una obsesión por definirlo todo y al comienzo. Sería bueno reflexionar acerca de si en el nivel secundario es necesario incluir cada una de las definiciones que se dan.

Por último, una mención sobre el símbolo $\pm$. El uso de este símbolo presenta una dificultad en su interpretación, que se usa para resumir dos igualdades: una igualdad que representa dos igualdades. Quizás donde más uso tiene es en la fórmula resolvente de las cuadráticas:

$$\text{para escribir } x = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \text{ o } x = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

$$\text{usamos } x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Pero si, por ejemplo, una ecuación tiene por solución $x = 3$ o $x = -3$, escribir $x = \pm 3$ puede dificultar la interpretación del resultado. Por ejemplo: podría pensarse que $x = 3$ y que $x = -3$, lo cual no es cierto, ya que la incógnita no puede tomar dos valores en forma simultánea. Por lo tanto, pensamos que deberíamos evitar su uso o limitarlo a situaciones específicas.

Capítulo 3
Ideas para el tratamiento en las clases

Muchas veces hemos observado que el tema que tratamos en este libro se utiliza en el ámbito superior inicial con la intención de comenzar una nueva forma de acceso a la matemática (bajo el supuesto de que el anterior acceso no fue virtuoso). Así, suele exhibirse el desconocimiento del correcto valor de la raíz cuadrada de números positivos como un fundamento de esto. Más allá de las buenas intenciones que se persigan, expresamos nuestro desacuerdo con esta elección didáctica. Seguramente debe resultar desalentador para muchos estudiantes que aprobaron el nivel secundario que en las primeras clases del nivel superior se les muestre que no saben algo que se ve tan elemental. Por lo tanto, la forma en que este asunto sea presentado resulta fundamental para que el estudiante pueda tomarlo como una instancia de aprendizaje y no de frustración.

Nuestra posición es que este tema es uno de los muchos que tiene la matemática que, siendo básicos y simples en apariencia, encierran una significativa complejidad que hace muy motivante diseñar su enseñanza. Pensamos que estos asuntos, de los que se sabe que presentan dificultades en su aprendizaje, deben ser abordados de un modo intencional e integral por parte de la enseñanza, incluyendo el tratamiento en diferentes registros de representación y en diferentes contextos. Esto es compatible con lo que afirma Duval (2004) sobre la conceptualización de una noción que requiere la coordinación de al menos dos registros de representación. Como es conocido, estos obstáculos reaparecen en distintos momentos, por lo que se requiere que los docentes estén receptivos a su detección y tengan planificadas intervenciones para presentarlas en la clase.

En este capítulo final proponemos ejercicios que tratan sobre distintos aspectos de la temática desarrollada. Acompañamos sus enunciados con algunas explicaciones acerca de sus resoluciones y con el interés que consideramos que tiene su uso en la clase. La formulación de los ejercicios debería ser adaptada por cada docente a sus propósitos y a su contexto.

Idea 1: distintas resoluciones (correctas e incorrectas) de ecuaciones

Las siguientes son cinco resoluciones de la ecuación $x^2 = 36$. Analicen si son correctas o no y justifiquen adecuadamente.

1) $x^2 = 36$ $x = \sqrt{36}$ $x = 6$ ó $x = -6$	**2)** $x^2 = 36$ $x = \sqrt{36}$ ó $x = -\sqrt{36}$ $x = 6$ ó $x = -6$	**3)** $x^2 = 36$ $\sqrt{x^2} = \sqrt{36}$ $\lvert x \rvert = 6$ $x = 6$ ó $x = -6$
4) $x^2 = 36$ $x = \sqrt{36}$ $x = 6$	**5)** $x^2 = 36$ $x = \pm\sqrt{36}$ $x = \pm 6$	**6)** $x^2 = 36$ $x^2 - 36 = 0$ $(x - 6).(x + 6) = 0$ $x - 6 = 0$ ó $x + 6 = 0$ $x = 6$ ó $x = -6$

Las siguientes resoluciones corresponden a la ecuación $sen\ x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Analicen si son correctas y justifiquen.

1) $x = arcsen\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ $x = \frac{5}{3}\pi$	**2)** $x = arcsen\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ $x = -\frac{1}{3}\pi + 2k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$
3) $x = arcsen\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ $x = \frac{5}{3}\pi + 2k\pi$ ó $x = \frac{4}{3}\pi + 2k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$	**4)** $x = \frac{5}{3}\pi + 2k\pi$ ó $x = \frac{4}{3}\pi + 2k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$

Analicen si las resoluciones que se proponen para las siguientes ecuaciones son correctas o no y justifiquen.

$x^3 = 8$	$x^4 = 81$	$x^5 = -32$
$\sqrt[3]{x^3} = \sqrt[3]{8}$	$\sqrt[4]{x^4} = \sqrt[4]{81}$	$\sqrt[5]{x^5} = \sqrt[5]{-32}$
$\lvert x\rvert = 2$	$\lvert x\rvert = 3$	$x = -2$
$x = 2$ ó $x = -2$	$x = 3$ ó $x = -3$	$S = \{-2\}$
$S = \{2, -2\}$	$S = \{3, -3\}$	

En los dos primeros ejercicios se proponen una serie de resoluciones usuales de la misma ecuación, algunas correctas y otras incorrectas.

En el caso de la cuadrática:

- La resolución 1 es errónea y ya la hemos analizado ampliamente.
- La resolución 2 es la que hemos sugerido para su aplicación en las aulas del nivel secundario y universitario inicial.
- La resolución 3 es la que hemos mostrado como resolución formal usual.
- La resolución 4 supera uno de los dos errores de la resolución 1. Consideramos que tiene interés para la clase. Al no dar los resultados esperados (se pierde uno), es evidente que el procedimiento no es correcto; por lo tanto, si está aceptada una definición (correcta) de radicación, permite centrarse en que hay que corregir la regla de que *el cuadrado pasa como raíz cuadrada.*
- La resolución 5 es la misma que la 2 con el uso del símbolo $\pm$.
- La resolución 6 es correcta y tiene como interés ver un procedimiento que no es el más típico.

En el caso de la trigonométrica:

- La resolución 1 es errónea, pues pasa el seno a arco seno y, de esta manera, solo contempla una solución para la ecuación.
- La resolución 2 es errónea, pues pasa el seno a arco seno e incurre en otro error: asignar infinitos valores al arco seno.
- La resolución 3 da resultados correctos, pero es la típica resolución errónea ya analizada.
- La resolución 4 es correcta y es la que hemos sugerido aquí.

La intención del tercer ejercicio es salir del caso del ejemplo de las ecuaciones cuadráticas analizadas ampliamente aquí y estudiar situaciones que involucran ecuaciones potenciales con otros exponentes e índices. De esta forma pueden compararse y detectarse similitudes y diferencias. Pueden llegar a conjeturarse procedimientos correctos según las características de los exponentes e índices.

Idea 2: inversibilidad del cuadrado y la raíz cuadrada

> Dados los siguientes pares de expresiones: $\sqrt{a^2}$ y a: $\left(\sqrt{a}\right)^2$y a, establezcan para cada caso $A \subseteq \mathbb{R}$ el más amplio posible, de modo que cada par de expresiones sean equivalentes en A.

El ejercicio pone en juego la importancia de la consideración del campo de definición de una expresión algebraica. La expresión $\sqrt{a^2}$ está definida para todo $a \in \mathbb{R}$ y es equivalente a la expresión a solo cuando $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$; además, vale que $\forall a \in \mathbb{R}$: $\sqrt{a^2} = |a|$. Por lo tanto, las expresiones $\sqrt{a^2}$ y a son equivalentes en $\mathbb{R}_{\geq 0}$. Esto pone en evidencia la incorrección de simplificar cuadrado y raíz, a menos que se sepa que el número no es negativo.

En el segundo par de expresiones se invierte el orden de las operaciones. Aquí sí es posible simplificar cuadrado y raíz, solo que la expresión está definida únicamente para números no negativos. Pese a que es por motivos diferentes al primer caso, las expresiones $\left(\sqrt{a}\right)^2$y a también son equivalentes en $\mathbb{R}_{\geq 0}$.

En este ejercicio queda particularmente expresada la complejidad de la relación de inversibilidad entre el cuadrado y la raíz cuadrada. Se podría cerrar la actividad preguntando para qué valores reales a de $\sqrt{a^2} = \left(\sqrt{a}\right)^2$.

Idea 3: simplificación de expresiones del tipo $\sqrt[n]{a^n}$

Analicen si las siguientes simplificaciones son correctas.

(a) $\sqrt[2]{a^2} = a$ siendo $a \in \mathbb{R}$

(b) $\sqrt[3]{a^3} = a$ siendo $a \in \mathbb{R}$

(c) $\sqrt[2]{a^2} = a$ siendo $a \in \mathbb{R}^+$

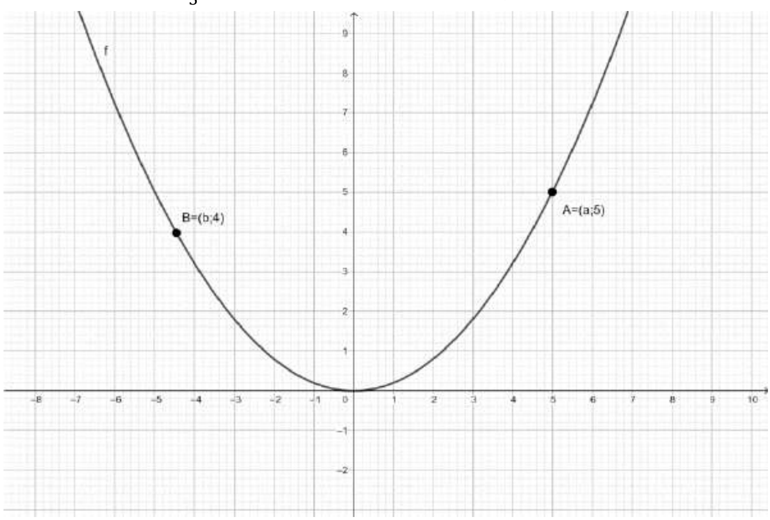
(d) $\sqrt[6]{a^6} = a$ siendo $a \in \mathbb{R}$

Este ejercicio se propone accionar sobre la simplificación de potencias y raíces y su campo de validez. Podrían formularse conjeturas acerca de propiedades generales, como la validez de la simplificación para índices impares cualquiera sea el valor de la base, y la validez de la simplificación para índices pares solo cuando la base no es negativa.

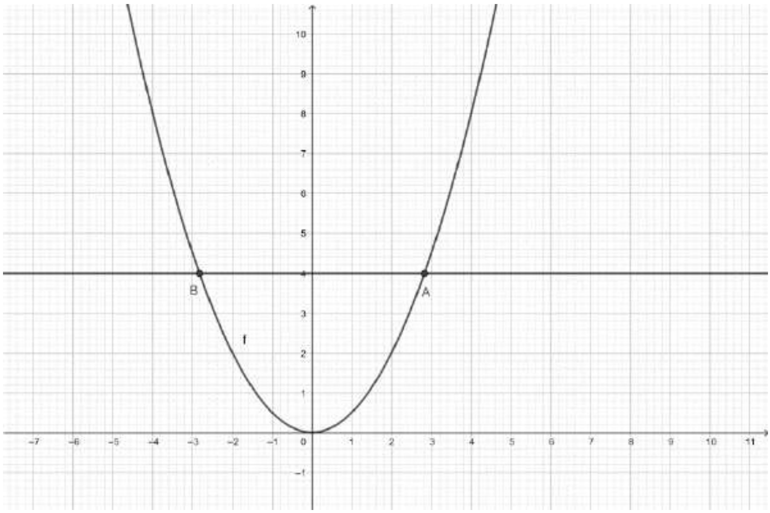
Idea 4: interpretación gráfica de las ecuaciones cuadráticas y trigonométricas

El gráfico siguiente corresponde a

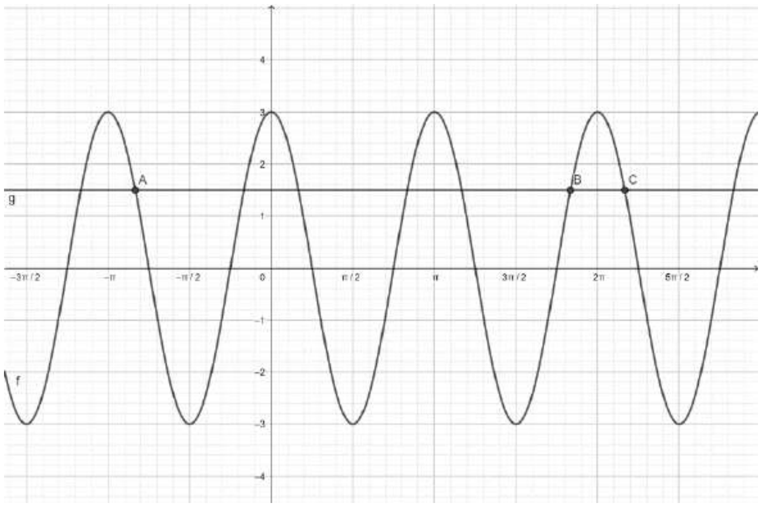
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{5}x^2$. Hallen los valores de a y b.



A continuación se muestra el gráfico de una función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, cuya expresión es de la forma $f(x) = a.x^2$, para algún $a \in \mathbb{R}_{>0}$, y la recta horizontal de ecuación $y = 4$. Den distintas aproximaciones de las abscisas de los puntos A y B.



El gráfico siguiente corresponde a $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 3\cos(2x)$ y a la recta de ecuación $y = \frac{3}{2}$. Hallen las coordenadas de los puntos A, B y C.



Estos tres ejercicios contienen situaciones dadas en el registro gráfico. En el primero, es posible suponer, por la lectura gráfica, que $a = 5$, pero esto requiere una verificación analítica:

$$f(5) = \frac{1}{5} . 5^2 = 5$$

Por otra parte, para hallar b debe reconocerse que es necesario plantear una ecuación para buscar los valores pedidos. Luego, de las dos soluciones que tiene cada ecuación, debe elegirse la solución que corresponde. Es claro que este método también es aplicable para hallar a.

En el segundo ejercicio, los puntos A y B son simétricos respecto del eje de las ordenadas, pues tienen la misma ordenada y f es una función par. Por lo tanto, sus abscisas son opuestas.

Una primera aproximación es la que podemos obtener de la lectura del gráfico. La abscisa de A es aproximadamente 3, y esta es una aproximación por exceso, ya que el valor exacto es evidentemente menor.

Para obtener otras aproximaciones es necesario obtener primero el valor exacto, lo que requiere conocer la fórmula de la función. Para ello hay que suponer la pertenencia de algún otro punto al gráfico de f. Solo podemos asegurar que el origen de coordenadas pertenece al gráfico de f, pues verifica su fórmula cualquiera sea a. Podemos suponer que un punto del gráfico podría ser (4; 8). Así,

$$f(x) = a.x^2 \rightarrow 8 = a.4^2 \leftrightarrow a = \frac{1}{2}$$

A partir de esta suposición, hallamos el valor exacto de la abscisa de A:

$$f(x) = \frac{1}{2}.x^2 \rightarrow 4 = \frac{1}{2}.x^2 \leftrightarrow x = \pm 2\sqrt{2}$$

Luego, $A = \left(2\sqrt{2}; 4\right)$ y $B = \left(-2\sqrt{2}; 4\right)$. Con esto podemos dar una aproximación con cualquier cantidad de cifras decimales de la abscisa de A.

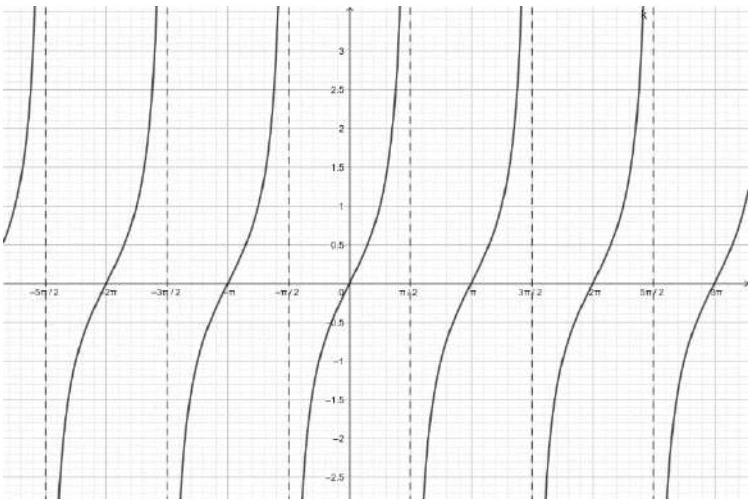
En el tercer ejercicio, debe reconocerse que los puntos pedidos son las soluciones de una determinada ecuación. Esas soluciones son infinitas, de las cuales algunas de ellas son las que interesan.

Idea 5: otras funciones trigonométricas inversas

Definan la función arco tangente. Para ello, muestren todo el proceso necesario a partir de disponer de la función tangente, definida de su dominio natural en $\mathbb{R}$.

Este ejercicio contiene varios pasos:

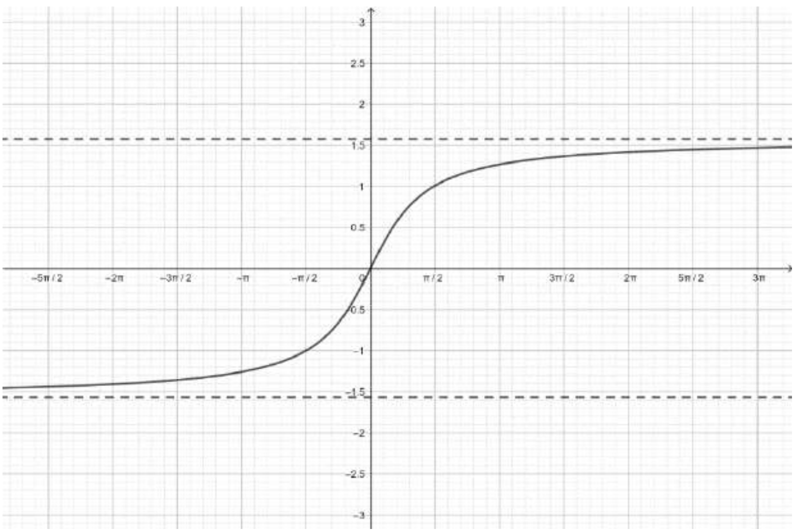
1) Definir la función tangente. La función tangente es la función cociente entre el seno y el coseno, por lo que no está definida para los valores que anulan el coseno; esto es, $x = \frac{1}{2}\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, y también $x = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, que podemos escribir sintéticamente como $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Esto es, $f\colon \mathbb{R} - \left\{x - x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \to \mathbb{R}, f(x) = tg\ x$. Su representación gráfica es la siguiente:



2) Ver si la función tangente es inversible. Esta función no es inversible por no ser inyectiva, ya que es periódica de período π.

3) Si no es inversible, hay que redefinirla para que lo sea. La forma convenida de redefinirla es $g\colon\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}, g(x)=tg\ x$, tomando el intervalo más amplio que contenga el 0.

4) Definir la función inversa. Así, la inversa, el arco tangente, resulta $g^{-1}\colon\mathbb{R}\to\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right), g(x)=arctg\ x$, cuya representación gráfica se muestra a continuación.



Idea 6: conjunto solución de ecuaciones

Vean si números reales de la familia de $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ son soluciones de la ecuación $sen\ x = 0$.

¿Cuáles de los siguientes conjuntos contienen todas las soluciones de la ecuación $sen\ x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$?

$$S_1 = \left\{x - x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \ \vee x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, con\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

$$S_2 = \left\{x - \ x = \frac{4\pi}{3} + k\pi, con\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

$$S_3 = \left\{x - \ x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \ \vee x = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi, con\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

$$S_4 = \left\{x - \ x = \frac{13\pi}{3} + 2k\pi \ \vee x = -\frac{8\pi}{3} + 2k\pi, con\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Para cada una de las siguientes ecuaciones, indiquen cuántos elementos tiene su conjunto solución.

(a) $x^2 = -4$

(b) $\cos x = \sqrt{3}$

(c) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

(d) $x^7 = -4$

(e) $x^8 = 4$

(f) $x^{10} = 0$

(g) $x^2 . senx = 0$

(h) $\cos x = senx$

Estos ejercicios operan sobre la noción de solución de una ecuación. El primero puede ser resuelto de diferentes maneras: resolviendo la ecuación con los procedimientos usuales, como hemos realizado aquí, o con las propiedades de la función seno. Para esta segunda forma, sabemos que $sen\, x = sen\,(x + k.2\pi)$, para cualquier $k \in \mathbb{Z}$, porque el seno tiene período 2π.

Como $sen\, 0 = 0$, entonces $sen\,(0 + k.2\pi) = 0$
Como $sen\, \pi = 0$, entonces $sen\,(\pi + k.2\pi) = 0$
Sintetizando: $sen\,(k\pi) = 0$

Vale destacar que con este procedimiento probamos que todos los números de la familia son soluciones de la ecuación, pero no podemos asegurar que la ecuación no tenga otras (la consigna no exige ver eso). En realidad, esto estaría resuelto si justificamos que 0 y π son los únicos valores en los que se anula el seno en el intervalo $[0, 2\pi)$.

De esto se infiere que en la primera forma estaríamos haciendo más de lo que nos piden, porque con ese procedimiento no solo probamos que todos los números de la familia son soluciones, sino, además, que son las únicas.

El segundo ejercicio apunta a reconocer distintas formas de expresar las soluciones de una ecuación trigonométrica, tomando distintos representantes de cada familia de soluciones.

En el tercer ejercicio se propone reconocer la cantidad de soluciones de una ecuación. Están planteadas de modo que puedan responderse sin necesidad de realizar su completa resolución.

Idea 7: soluciones particulares de ecuaciones trigonométricas

Den, si es posible, un $x \in \mathbb{R}$ que verifique que $sen\, x = -\frac{1}{2}$ y pertenezca al intervalo dado. Analicen si es único.

$x \in \cdots$	$-\frac{\pi}{2} \leq x \leq 0$	$-\pi \leq x \leq 0$	$\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$	$4\pi \leq x \leq \frac{13}{2}\pi$	$-4\pi \leq x \leq -\frac{7}{2}\pi$
$x = \cdots$					

En cada uno de los siguientes casos, den un $x \in \mathbb{R}$ que cumpla lo pedido, con una aproximación de una cifra decimal:

(a) $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ y $sen\, x = 0{,}8$

(b) $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ y $sen\, x = -0{,}8$

(c) $\pi \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$ y $sen\, x = -0{,}8$

(d) $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ y $\cos x = 0{,}8$

(e) $\pi \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$ y $\cos x = -0{,}8$

(f) $-4\pi \leq x \leq -2\pi$ y $\cos x - 0{,}8$

En todos los casos, vean si el valor es único.

Decidan si los números $x = 5\pi$ y $x = 10\pi$ son dos raíces consecutivas (es decir que no hay otra raíz entre ellas) de la función

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2.\cos\left(\frac{x}{3} - \frac{1}{2}\pi\right) + \sqrt{3}.$$

Den todas las soluciones de la ecuación $2.\cos\left(\frac{x}{3}-\frac{1}{2}\pi\right)+\sqrt{3}=0$ que verifiquen que $-20\pi < x < -10\pi$.

En los dos primeros ejercicios se propone encontrar valores cuyo seno es dato y que cumpla una determinada condición. En particular, el segundo apunta a distinguir el arco seno (o arco coseno), cuyo valor devuelve la calculadora científica, de otros números cuyo seno (o coseno) es ese valor. En el tercero se pretende desarrollar alguna estrategia para decidir si dos raíces son consecutivas. En primer lugar, podríamos probar que los valores dados son raíces de la función (no es imprescindible):

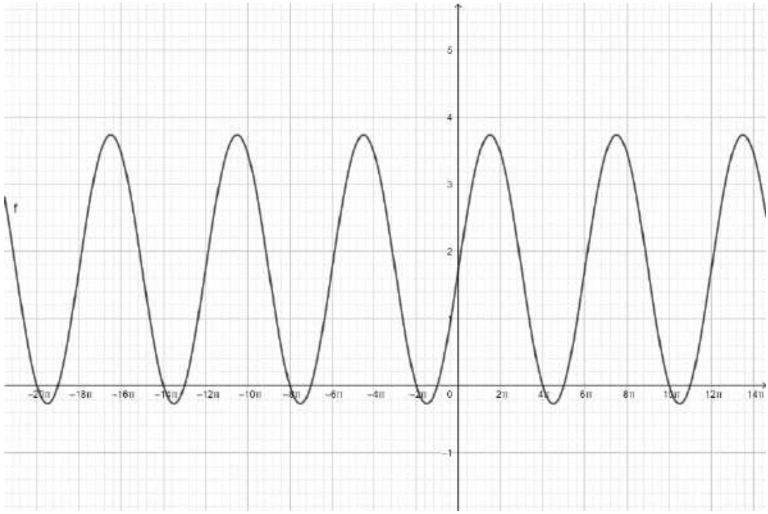
$$f(5\pi)=2.\cos\left(\frac{5\pi}{3}-\frac{1}{2}\pi\right)+\sqrt{3}=2.\cos\left(\frac{7}{6}\pi\right)+\sqrt{3}=2.\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\sqrt{3}=0$$

y

$$f(10\pi)=2.\cos\left(\frac{10\pi}{3}-\frac{1}{2}\pi\right)+\sqrt{3}=2.\cos\left(\frac{17}{6}\pi\right)+\sqrt{3}=2.\cos\left(\frac{5}{6}\pi\right)+$$

$$\sqrt{3}2.\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\sqrt{3}=0$$

Efectivamente, lo son, pero falta ver que son consecutivas. La siguiente es la representación gráfica de la función dada, en donde puede verse que las dos raíces son consecutivas (una vez probadas que lo son).



Veamos una resolución analítica. La función tiene período

$$p = \frac{2\pi}{1/3} = 6\pi.$$

Las soluciones de la ecuación son:

$$\cos\left(\frac{x}{3} - \frac{1}{2}\pi\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{x}{3} - \frac{1}{2}\pi = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi \ \vee \ \frac{x}{3} - \frac{1}{2}\pi = \frac{7}{6}\pi + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$$

$$\frac{x}{3} = \frac{4}{3}\pi + 2k\pi \ \vee \ \frac{x}{3} = \frac{5}{3}\pi + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$$

$$x = 4\pi + 6k\pi \ \vee \ x = 5\pi + 6k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$$

También podríamos haber planteado las soluciones en una vuelta, despejar x y luego dar todas las soluciones. Esto sería así:

Soluciones en una vuelta:

$$\frac{x}{3}-\frac{1}{2}\pi=\frac{5}{6}\pi \vee \frac{x}{3}-\frac{1}{2}\pi=\frac{7}{6}\pi$$

$$x=4\pi \vee x=5\pi$$

Todas las soluciones:

$$x=4\pi+6k\pi \vee x=5\pi+6k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$$

A partir de cualquiera de las dos formas, vemos que $x=5\pi$ es una solución que surge de la segunda familia de soluciones cuando $k=0$. Por las características de la función coseno, para un cierto $k\in\mathbb{Z}$, los valores obtenidos en cada familia de soluciones son consecutivas, siendo menor la obtenida en $x=4\pi+6k\pi$. Como hay dos soluciones por vuelta, a la segunda solución de una vuelta le sigue la primera de la vuelta siguiente. Por lo tanto, como con $k=1$ se obtiene $x=10\pi$ en la primera familia de soluciones, queda probado que las dos soluciones dadas son consecutivas.

En el cuarto ejercicio hay que obtener el conjunto de soluciones en un intervalo, lo que requiere saber cuáles son valores de k (del $2k\pi$) necesarios. Ya sabemos que las soluciones son: $x=4\pi+6k\pi \vee x=5\pi+6k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$. Entonces, tenemos que:

$$-20\pi<4\pi+6k\pi<-10\pi \quad \text{y} \quad -20\pi<5\pi+6k\pi<-10\pi$$

$$-24\pi<6k\pi<-14\pi \quad \text{y} \quad -25\pi<6k\pi<-15\pi$$

$$-4<k<-\frac{7}{3} \quad \text{y} \quad -\frac{25}{6}<k<-\frac{5}{2}\pi$$

Por lo tanto, en la primera familia de soluciones solo se obtiene alguna de las pedidas con $k = -3$, y en la segunda familia de soluciones, con $k = -4$ y con $k = -3$. Las soluciones obtenidas son: $x_1 = 4\pi + 6(-3)\pi = -14\pi$, $x_2 = 5\pi + 6(-4)\pi = -19\pi$ y $x_3 = 5\pi + 6(-3)\pi = -13\pi$.

Idea 8: ecuaciones que involucran otras funciones no inyectivas

Resuelvan las siguientes ecuaciones:

a) $|x| = 10$

b) $tg\ x = \sqrt{3}$

c) $\frac{x}{x^2-2} = 3$

Ahora se apunta a resolver ecuaciones que involucran funciones que no son inyectivas, pero que son distintas a las utilizadas como ejemplo en este trabajo.

Idea 9: ecuaciones trigonométricas en otro contexto

Analicen la veracidad del siguiente enunciado: dado un vector no nulo $v = (a; b)$, su argumento se obtiene como $\arg(v) = arctg\left(\frac{b}{a}\right)$.

Un valor que tiene este ejercicio es presentar al asunto que nos interesa en un contexto distinto: el de los vectores geométricos en el plano. Se apunta a errores típicos cuando se busca el argumento de un vector utilizando el arco tangente del cociente de las componentes. Un error consiste en plantear $arctg\left(\frac{b}{a}\right)$, pero asignarle como resultado el correcto valor del argumento en cualquier caso, por ejemplo: para $v = (-3; -3)$: $arctg\left(\frac{-3}{-3}\right) = arctg\ 1 = \frac{\pi}{4}$ (posiblemente, a partir del uso de la calculadora científica); entonces $\arg(v) = \frac{\pi}{4}$, lo cual es incorrecto, ya que el argumento es otro de valores cuya tangente vale 1 $\left(\frac{5}{4}\pi\right)$. Otro error posible es el planteo de $arctg\left(\frac{b}{a}\right)$ y la asignación de su resultado al argumento; con el mismo vector ejemplificado es $arctg\left(\frac{-3}{-3}\right) = arctg\, 1 = \frac{5\pi}{4}$, entonces $\arg(v) = \frac{5\pi}{4}$, que tiene un resultado correcto de argumento, pero no del arco tangente: $\frac{5\pi}{4}$ cumple que su tangente vale 1, pero no es el valor convenido para $arctg\, 1$.

Si bien el enunciado podría ser justificado con un contraejemplo, queda abierta la posibilidad de preguntarse para qué vectores vale lo enunciado. Veamos los distintos casos:

Si $(a > 0 \wedge b > 0) \vee (a > 0 \wedge b < 0)$: $\arg(v) = arctg\left(\frac{b}{a}\right)$

Si $(a < 0 \wedge b > 0) \vee (a < 0 \wedge b < 0)$: $\arg(v) = \pi + arctg\left(\frac{b}{a}\right)$

Si $a = 0 \wedge b > 0$: $\arg(v) = \frac{\pi}{2}$

Si $a = 0 \wedge b < 0$: $\arg(v) = \frac{3\pi}{2}$

Si $a > 0 \wedge b = 0$: $\arg(v) = arctg\left(\frac{b}{a}\right) = 0$

Si $a < 0 \wedge b = 0$: $\arg(v) = \pi + arctg\left(\frac{b}{a}\right) = \pi$

Como una actividad general ante planteos de enunciados para analizar su veracidad, puede resultar interesante analizar alguna de las dos opciones siguientes: obtener todos los ejemplos que verifican el enunciado y, de este modo, reformularlo de manera que sea uno verdadero; o también obtener todos los contraejemplos y así saber cuáles son todos los casos en que no se verifica lo afirmado. En este caso, es más apropiado lo primero. Podemos formular el siguiente enunciado verdadero: dado un vector $v = (a; b)$, si $a > 0$, el argumento del vector se obtiene como $\arg(v) = arctg\left(\frac{b}{a}\right)$. Teniendo en cuenta parte de los contraejemplos, también podría enunciarse que dado un vector $v = (a; b)$, si $a < 0$, el argumento del vector se obtiene como $\arg(v) = \pi + arctg\left(\frac{b}{a}\right)$.

Idea 10: ecuaciones dadas en lenguaje natural

Respondan:

a) ¿Hay algún número real negativo que elevado a la sexta da por resultado 100?

b) ¿Es cierto que la tangente toma cualquier valor real?

c) Se sabe que en un cierto intervalo abierto la tangente es inyectiva. ¿Cuál puede ser un intervalo de máxima longitud en el que esto ocurra?

d) En un cierto intervalo abierto se sabe que el seno toma el valor 0,2 solo una vez. ¿Cuál es la mayor longitud que puede tener ese intervalo? ¿Es único? Si no lo fuera, ¿cuál puede ser uno de ellos?

Dentro de la variedad de registros sugerida para abordar los obstáculos, ahora se dan enunciados en lenguaje coloquial.

El ítem (a) puede expresarse simbólicamente como la ecuación $x^6 = 100$, con $x < 0$. Hay dos números reales que verifican la ecuación y solo uno que es negativo: es $-\sqrt[6]{100}$, que podría ser obtenido sin necesidad de trabajar en el lenguaje simbólico.

El ítem (b) puede plantearse como si la familia de ecuaciones $tg\, x = a$ tuviera solución cualquiera sea $a \in \mathbb{R}$. O puede pensarse a partir de ver el conjunto imagen de la función tangente. De cualquier forma, la respuesta al ítem es afirmativa.

En (c), la tangente es una función de período π, tiene asíntotas verticales en cada una de las rectas cuya ecuación es de la forma $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$, la distancia entre dos asíntotas consecutivas es π y es estrictamente creciente en cada intervalo determinado por dos de esas asíntotas, por lo que un intervalo de máxima longitud en el que sea inyectiva es cualquiera de esos intervalos, por ejemplo: $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Para (d), sabemos que en $[0{,}2\pi]$ (un intervalo de longitud igual a un período) la ecuación tiene dos soluciones. Por lo tanto, en un intervalo abierto de longitud 2π con extremos en dos soluciones que difieran en 2π, hay una sola solución. Las soluciones en $[0{,}2\pi]$ son $x = arc\ sen\ 0{,}2$ y $x = \pi - arc\ sen\ 0{,}2$, y la menor solución en $[2\pi, 4\pi]$ es $x = arc\ sen\ 0{,}2 + 2\pi$. El intervalo es, entonces, $(arc\ sen\ 0{,}2; arc\ sen\ 0{,}2 + 2\pi)$, y la única solución que hay en él es $\pi - arc\ sen\ 0{,}2$.

Idea 11: el pasaje de raíz a potencia

Resuelvan las siguientes ecuaciones:

a) $\sqrt{x} = 4$

b) $\sqrt[5]{x} = -2$

c) $\sqrt[4]{x} = -2$

d) $\sqrt{x} = x$

Dada la familia de ecuaciones $\sqrt[n]{x} = a$, establezcan condiciones de los parámetros a y n para los cuales su solución es $x = a^n$.

Con estos ejercicios se pretende discutir el pasaje de raíz a potencia, que no es igual que el de potencia a raíz, ya que acá se parte de un dominio de definición restringido en el caso de índices pares. La regla de pasajes *las raíces de índice par pasan a potencia de ese exponente* funciona siempre que se planteen las restricciones al radicando y también al resultado de la raíz. En el caso de trabajar con operaciones miembro a miembro, debe aplicarse una de las siguientes propiedades, según la paridad del índice:

Si $n = 2k - 1, n \in \mathbb{N}$: $\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}$: $a = b \rightarrow a^n = b^n$

Si $n = 2k, n \in \mathbb{N}$: $\forall a \in \mathbb{R}_{\geq 0}, \forall b \in \mathbb{R}_{\geq 0}$: $a = b \rightarrow a^n = b^n$

Resolviendo el primer ejercicio mediante pasajes:

- En (a), bajo la condición de $x \geq 0$, es posible pasar la raíz cuadrada a cuadrado $x = 4^2 = 16$.
- En (b) no hay ninguna restricción para pasar la raíz quinta a potencia quinta: $x = (-2)^5 = -32$.
- En (c), bajo la condición de $x \geq 0$, el primer miembro es un real no negativo, mientras que el segundo es un real negativo, por lo que ningún $x \in \mathbb{R}$ puede verificar la ecuación (y no es posible realizar el pasaje).

Y mediante operatoria en ambos miembros:

- En (a), el dominio de definición es $[0, +\infty)$. Se eleva al cuadrado miembro a miembro: $\sqrt{x} = 4 \leftrightarrow (\sqrt{x})^2 = 4^2 \leftrightarrow x = 16$.
- En (b), el dominio de definición es $\mathbb{R}$: $\sqrt[5]{x} = -2 \leftrightarrow (\sqrt[5]{x})^5 = (-2)^5 \leftrightarrow x = -32$.
- En (c), el dominio de definición es $[0, +\infty)$. El primer miembro es un real no negativo, mientras que el segundo es un real negativo, por lo que la ecuación no puede tener solución. Además, al no cumplirse la hipótesis de la propiedad, no puede realizarse el pasaje.

En el segundo ejercicio deben formularse las condiciones bajo las cuales vale el pasaje de raíz a potencia, que son las siguientes:

- Dados $n = 2k - 1, k \in \mathbb{N}$: si $a \in \mathbb{R}$: $\sqrt[n]{x} = a \leftrightarrow x = a^n$
- Dados $n = 2k, k \in \mathbb{N} \wedge x \geq 0$: si $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$: $\sqrt[n]{x} = a \leftrightarrow x = a^n$

Referencias bibliográficas

Brousseau, G. (1983). "Les obstacles épistémologiques et les problemes en mathématiques", en *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 4(2), pp. 165-198.

Duval, R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales.* Universidad del Valle. Instituto de Educación y Pedagogía. Grupo de Educación Matemática.

Krichesky, G.; Rodríguez, M.; Petrucci, D.; Guindi, P.; De Amézola, G. y Cerletti, A. (2004). "Las condiciones y posibilidades del 'pasaje' de saberes y prácticas especializados: el caso particular de la formación de docentes", en *II Jornadas sobre docencia. Los docentes universitarios ante los nuevos escenarios para la formación de los estudiantes.* Los Polvorines: UNGS.

Estudiar las dificultades que manifiestan los estudiantes en el aprendizaje de la matemática es uno de los temas que capta el interés de quienes enseñamos esta disciplina.

En la resolución de ecuaciones como $x^2=9$ aparecen dificultades muy conocidas por los docentes. ¡Cuántas veces hemos escuchado: paso el cuadrado como raíz cuadrada y $\sqrt{9}=\pm 3$. Esta es la típica resolución errónea.

Ecuaciones como esta, de apariencia sencilla, encierran complejidades que nos interesa desmenuzar, discutir y compartir.

Además de analizar lo relativo al cuadrado y a la raíz cuadrada, pensamos este asunto como parte de otro más amplio: los procesos inversos de funciones que no son inyectivas.

Serie **Educación en ciencias**

Universidad Nacional de General Sarmiento

ISBN 978-987-630-530-3