APRENDIZAJE EN LA PRÁCTICA, CRECIMIENTO ACELERADO Y CAMBIO ESTRUCTURAL

Carlos Humberto Ortiz*

Resumen

Con base en un modelo bisectorial de crecimiento endógeno (Rebelo, 1991), en el cual se produce un bien de consumo y un bien de capital, en este artículo se analiza el efecto de suponer aprendizaje en la práctica en el sector productor del bien de capital. El modelo modificado reproduce dos patrones típicos del desarrollo económico de largo plazo: el crecimiento acelerado y el cambio estructural.

Abstract

Based on a two-sector model of endogenous growth (Rebelo, 1991), where a consumption good and a capital good are produced, this paper analyzes the effect of assuming learning-by-doing in the capital-good sector. The model reproduces two typical patterns of long-run economic development: accelerated growth and structural change.

Palabras claves: Aprendizaje en la práctica, funciones lineales, crecimiento acelerado, cambio estructural.
Códigos JEL: O11, O14, O15, O19, O41.

* Universidad del Valle, Departamento de Economía, A.A. 25360, Cali, Colombia. E-mail: ortizc@univalle.edu.co. Este trabajo es fruto del Grupo de Investigación sobre Crecimiento y Desarrollo Económico.

Carlos Humberto Ortiz. Aprendizaje en la práctica, crecimiento acelerado y cambio estructural. En publicación: Documento de Trabajo no. 95. CIDSE, Centro de Investigaciones y Documentacion Socioeconomica, Facultad de Ciencias Sociales, Universidad del Valle, Cali: Colombia. Febrero. 2007.

1. Introducción

Los teóricos del desarrollo económico tienen una agenda divertida. Construyen juguetes –también llamados modelos- para que se muevan y se comporten como un país típico. Estos robots permiten identificar los resortes o mecanismos fundamentales del desarrollo económico. También permiten entender cómo interactúan tales mecanismos con la economía. Así, se hace posible formular políticas económicas con conocimiento de causa. Esta es la parte seria, pues puede comprometer el bienestar de millones de personas.

Los avances en la agenda mencionada han sido importantes desde mediados de la década de los ochenta. El logro más importante consiste en la construcción de modelos matemáticamente maleables que reproducen de manera endógena el primer patrón del desarrollo económico de largo plazo: la tendencia al crecimiento sostenido de las economías (Kaldor, 1961). Varios mecanismos se han propuesto para reproducir esta característica: efectos externos del conocimiento (Romer, 1986); aprendizaje en la práctica (Romer, 1986; Lucas, 1988; Matsuyama, 1992); educación (Lucas, 1988); innovación y diversificación productiva (Romer, 1987, 1990; Grossman y Helpman, 1991; Aghion y Howitt, 1992); efectos productivos del gasto público en infraestructura (Barro, 1990); y coordinación de inversiones y externalidades pecuniarias (Murphy, Shleifer y Vishny, 1989).

Dos modelos marcan un hito en la explicación del crecimiento sostenido: Romer (1986) y Rebelo (1991). Utilizando un modelo económico agregado que se caracteriza por externalidades positivas del capital sobre la productividad, Romer (1986) mostró que una tecnología con rendimientos crecientes a escala puede inducir crecimiento económico acelerado en una economía competitiva con agentes optimizadores. Si no existen externalidades pero la relación entre la producción y el capital es lineal, Rebelo (1991) mostró que la economía crece a una tasa constante si se cumple una condición mínima de productividad. Se deduce de lo anterior que la relación entre rendimientos a escala y crecimiento es directa: rendimientos crecientes a escala implican una tasa de crecimiento creciente, y rendimientos constantes a escala implican una tasa de crecimiento constante.

La versión agregada del modelo de Rebelo es el caso límite del modelo de Romer, e implica la famosa función lineal de producción AK, siendo K el capital de la economía y A la productividad del capital. Dada su simplicidad, la función lineal de producción se ha convertido en la herramienta analítica más socorrida para la construcción de modelos que generan crecimiento a una tasa constante. Esta función ayudó a entender la necesidad de que la productividad marginal del capital no caiga por debajo de cierto nivel para generar crecimiento económico sostenido. De hecho, se puede afirmar que lo que hacen los modelos de crecimiento sostenido es endogenizar un mecanismo, como los arriba mencionados, para contrarrestar la tendencia decreciente de la productividad marginal del capital y mantener esta productividad por encima de un límite positivo mínimo. He ahí la importancia del modelo agregado de Rebelo.

Pero es más importante el aporte del modelo bisectorial del mismo autor. En éste se supone que la economía produce un bien de consumo y un bien de capital (alternativamente se sugiere que todas las formas de capital se combinan en un solo índice). El bien de consumo se supone fungible (no hay bienes de consumo duraderos).

La tecnología del sector productor del bien de capital se supone lineal en el capital, de manera que adopta la siguiente forma: $A(1-x)K$, siendo $1-x$ la fracción del capital que se asigna a la producción del factor acumulable (x es la fracción que se destina a producir el bien de consumo). En esas condiciones, y suponiendo que la productividad del capital en el sector productor del bien de capital es constante y suficientemente alta ($A >> 0$), se genera crecimiento económico a una tasa constante. Incluso si la productividad marginal del capital en el sector productor del bien de consumo es decreciente, el modelo preserva el resultado de un crecimiento económico sostenido a una tasa constante. Además, la distribución del capital entre los sectores económicos es estable: x se escoge óptimamente desde el principio y no varía en el tiempo. Por tanto, del modelo bisectorial de Rebelo se deriva la siguiente lección: la tecnología del sector productor del bien de capital juega un rol decisivo en el crecimiento. Más aún, si existe un conjunto de factores cuya producción sólo requiere de estos mismos factores, y su tecnología es homogénea lineal y suficientemente productiva, la economía crece a una tasa constante.[1]

Pero la evidencia histórica del desarrollo económico de largo plazo es más consistente con un crecimiento acelerado. De hecho, utilizando información histórica de los países que han llevado el liderazgo tecnológico en diferentes períodos históricos, Romer (1986) mostró que la aceleración del crecimiento es un patrón característico del capitalismo, desde que éste surge en medio de la economía feudal europea hasta la actualidad. La realidad del desarrollo económico en el largo plazo tampoco es consistente con una asignación invariable del capital entre los sectores. El desarrollo económico de los países se caracteriza por el denominado cambio estructural: a medida que los países se desarrollan, la composición de la actividad económica cambia a favor de las actividades manufactureras y de servicios, y en contra de las actividades primarias (Chenery, 1960; Chenery, Robinson y Syrquin, 1986).

Si se adopta la agenda investigativa de que la teoría del desarrollo debe servir para explicar los patrones observados del ingreso *per cápita* y de la tasa de crecimiento del producto *per cápita* (Lucas, 1988), el modelo de Rebelo lo hace bien, pues genera la tendencia al crecimiento sostenido del producto *per cápita* de las economías capitalistas (Kaldor, 1961). Pero este modelo no genera ni crecimiento acelerado ni cambio estructural.

Una contribución teórica ha apuntado a la construcción de modelos que generan trayectorias de crecimiento balanceado compatibles con cambio estructural (Kongsamut, Rebelo y Xie, 2001). Otra explicación analítica del cambio estructural se enfoca en los cambios de la tasa de ahorro generados por cambios en la composición de la riqueza a lo largo del proceso de industrialización (Laitner, 2000). En ambos casos se ignora la tendencia al crecimiento acelerado y se insiste en una visión estrecha del capital como capital físico. Por lo tanto, se insiste en que los modelos reproduzcan el patrón de Kaldor sobre la relativa constancia de los retornos del capital (tasa de interés real constante). Si el

[1] Un resultado análogo en la teoría del valor fue obtenido por Sraffa (1960). Este autor encontró que la tasa de ganancia de un sistema económico productivo –existe excedente económico- depende sólo del conjunto de bienes que se utilizan como insumos en su propia producción. A estos bienes Sraffa los denominó básicos. Los factores reproducibles de Rebelo que se requieren para su propia producción, y que por analogía se podrían denominar factores básicos, determinan la tasa de crecimiento del sistema económico si la tecnología de su producción es lineal y suficientemente productiva. He ahí una conexión entre la teoría del valor y la teoría de crecimiento que se debería explorar.

capital se entiende como una medida agregada de todas las formas de capital, tal como se plantea en la visión original y comprehensiva de Rebelo (1991), y por tanto incluye el capital humano, no tiene mucho sentido insistir en retornos constantes.

Este artículo propone entonces un enfoque alternativo para generar crecimiento acelerado y cambio estructural en el contexto del modelo bisectorial de Rebelo. Se amplía el modelo incorporando un mecanismo de desarrollo muy conocido aunque poco comprendido: el aprendizaje en la práctica. La idea es que la actividad productiva despierta fuerzas dormidas que aumentan la productividad de quien la lleva a cabo como un subproducto de tal actividad. Además, se supone que el aprendizaje se difunde rápida y gratuitamente a las demás unidades productivas; este supuesto requiere que el conocimiento derivado de la experiencia sea un bien público. La adición de esa externalidad le devuelve al modelo de Rebelo los rendimientos crecientes a escala en forma dinámica (tal como en el modelo de Romer).

La escogencia del aprendizaje en la práctica como componente del modelo no es fortuita. Su importancia para el crecimiento de la productividad y el desarrollo de las naciones ha sido reconocida teórica y empíricamente (ver Arrow, 1962; Rapping, 1965; Krugman, 1987; Lucas, 1988, 1993; Matsuyama, 1992; Amsden, 1989; Landes, 1998). Se plantea en líneas generales que el capital humano, entendido como la capacidad que tiene los trabajadores de producir, aumenta con el aprendizaje en la práctica, o con el entrenamiento en el trabajo. Saber hacer se considera una fuerza potencial que se desarrolla con el hacer y tiene propiedades acumulativas, de manera que se puede convertir en un motor del crecimiento económico. Más aún, se ha postulado que los milagros económicos del siglo XX –Japón, Corea del Sur, Taiwan, Singapur, Hong-Kong, Malasia, India y China continental- se explican en gran medida por el aprendizaje en la práctica (Amsden, 1989; Matsuyama, 1992; Lucas, 1993; Landes, 1998).

Algunas advertencias son relevantes. No toda actividad genera aprendizaje, y en las actividades que tienen tal potencial, el aprendizaje de los trabajadores no está garantizado. En consecuencia, es más fácil reconocer *ex-post* el efecto del aprendizaje que preverlo. Si fuera posible identificar a las firmas potencialmente ganadoras (aquellas con alto potencial de aprendizaje), sería conveniente fomentarlas e inclusive protegerlas. Pero, como plantea Lucas (1988), no existe un método seguro para “escoger” ganadores. No obstante, sí se acepta que el potencial de aprendizaje en la práctica varía entre los sectores productivos; en este trabajo se recupera la visión de Matsuyama (1992), quien postula que el aprendizaje en la práctica es un motor de desarrollo que se relaciona primordialmente con el sector manufacturero.

Varias razones se pueden aducir para explicar el alto potencial de aprendizaje del sector manufacturero. En primer lugar, el sector manufacturero no depende de factores naturales o ambientales de manera tan directa como el sector primario; y depende en mayor medida de la inteligencia (en especial de la ingeniería) y de la acumulación de capital. Por ello, el sector manufacturero posibilita en mayor medida la introducción de nuevos bienes y nuevas tecnologías. De hecho, la diversificación productiva, y su impacto derivado sobre la productividad del sistema económico, se relacionan principalmente con la actividad del sector manufacturero. Así, la ampliación permanente de la frontera tecnológica en el sector manufacturero permite que el potencial de aprendizaje no disminuya. En segundo lugar, el sector manufacturero se caracteriza por la aplicación intensiva de la ciencia y la tecnología para transformar insumos y materias primas; la aparición de nuevos bienes y nuevas tecnologías induce entonces el aprendizaje y la apropiación de la fuerza productiva más importante de la humanidad: la ciencia. En tercer lugar, el sector manufacturero se caracteriza por producir más para otros sectores (materias primas) y para la acumulación de capital (factores productivos) que para el consumo final; en otras palabras, el sector manufacturero concentra la producción de bienes básicos y de factores básicos –en el sentido que se explicó anteriormente-. Por tanto, el sector manufacturero juega un rol crucial en la rentabilidad de la economía y en su capacidad de crecimiento.

Si el aprendizaje en la práctica es potencialmente fuerte, el apoyo del gobierno puede ser crucial para aprovechar los beneficios directos e indirectos de la experiencia productiva. Obviamente, esta realidad del aprendizaje en la práctica no es del afecto de quienes promulgan medidas de mercado y desdeñan la intervención gubernamental en los asuntos económicos. Pero no es fácil aplicar políticas de mercado para adquirir experiencia; se puede contratar personal experimentado, pero la experiencia de un determinado proceso, especialmente si es nuevo, sólo se puede adquirir en la acción de producir.

2. Modelo Bisectorial con Aprendizaje en la Práctica en el Sector Productor del Bien de Capital: Equilibrio Competitivo

El primer objetivo de este trabajo es desarrollar el modelo bisectorial del Rebelo incorporando el aprendizaje en la práctica en el sector productor del bien de capital. Por simplicidad de notación se supone que todas las variables cambian en el tiempo; sólo algunos parámetros se suponen constantes. Se supone que la producción del bien de capital en el período de análisis se caracteriza por la función lineal que se examinó arriba:

$I^S = A(1-x)K,$

Siendo I^S la oferta del bien de capital en el período de análisis. La demanda del bien de capital, I^D, se compone de inversión neta e inversión de reposición:

$I^D = \dot{K} + \delta K, \quad \dot{K} \equiv \partial K / \partial t.$

Como es usual en la literatura, la derivada temporal de una variable de acervo se representa con un punto sobre la variable. La tasa de depreciación se supone constante e igual a δ. El equilibrio del mercado de capitales, $I^S = I^D = I$, genera la primera ecuación dinámica del sistema económico:

(1) $g_K = A(1-x) - \delta, \quad g_K \equiv \dot{K}/K.$

Donde g_K es la tasa de crecimiento del capital en el período de análisis. Nótese que si x disminuye y A aumenta, el crecimiento del capital aumenta en el tiempo.

La principal innovación de este trabajo viene ahora. Se supone que la productividad del sector productor de capital, A, aumenta con la práctica. Una aproximación usual a la modelación de este efecto es suponer que la productividad del sector aumenta con el nivel de actividad productiva del mismo (I^S). Pero este enfoque, como han mostrado Matsuyama (1992), Backus *et al* (1992) y Lucas (1993), genera efectos de escala que no se verifican en la realidad. Por tanto, en este modelo se supone que las ganancias en productividad por aprendizaje en la práctica son proporcionales al esfuerzo de inversión (I/K). El enfoque aquí adoptado es afín a la tecnología de aprendizaje que plantea Lucas (1988). La idea es que las mejoras en la actividad productiva devienen del esfuerzo que realizan las firmas por expandirla y de la creación de nuevos productos que requieren nuevas tecnologías. De esta forma, como argumentan Lucas (1988) y Young (1991, 1993), el horizonte tecnológico se desplaza continuamente y genera posibilidades de mejoras productivas a través del aprendizaje en la práctica. Un modelo que incorpore estas características tendría que involucrar innovación tecnológica, como en Young (1993). Pero entonces el modelo se complicaría y desdibujaría el mecanismo del aprendizaje en la práctica en el cual se hace énfasis: la importante característica de que el conocimiento se transmite entre las firmas, de tal manera que el aprendizaje deviene en un proceso social por el cual el aprendizaje de una firma se difunde rápida y gratuitamente a las demás. Por otra parte, es mejor estudiar un mecanismo a la vez. Así, se postula que la siguiente es la ecuación diferencial que comanda el crecimiento de la productividad del sector productor del bien de capital:

$$\dot{A} = \theta\,(I/K)\,,$$

Donde θ es el coeficiente constante de aprendizaje. La linealidad de la ecuación no es absolutamente necesaria; sólo se requiere que sea creciente. Pero para efectos de modelación, esta característica facilita la solución analítica. Reemplazando la función de producción del bien de capital, I^S, en la anterior ecuación diferencial se obtiene la segunda ecuación dinámica del sistema:

(2) $$g_A = \theta\,(1-x)\,.$$

Donde g_A es la tasa de crecimiento de la productividad del sector productor del bien de capital. Cabe advertir que la dinámica de la productividad en el sector productor del bien de capital es el resultado de una acumulación de experiencias individuales que se difunden sin ningún costo a todas las firmas del sector. Así, ninguna firma controla la productividad del sector. De hecho, cuando éstas maximizan ganancias toman el valor de la productividad como dada.

Se examina a continuación el comportamiento de las firmas productoras del bien de capital. Sus ganancias agregadas se definen como sigue:

$$\Pi_I = pI - (r_K + \delta)\,p(1-x)K = pA(1-x)K - (r_K + \delta)\,p(1-x)K\,,$$

Donde p es el precio relativo del capital (se toma el bien de consumo como numerario), y r_K es la tasa de remuneración neta del capital medido en el bien de capital. Nótese que estas ganancias son lineales en el capital del sector, *(1-x)K*, porque la función de producción también lo es. Por tanto, en condiciones competitivas (precios dados) estas las ganancias no son maximizables. Sin embargo, el equilibrio competitivo implica ganancias nulas. De manera que el precio del capital se ajusta hasta igualar la productividad del mismo. Esto proporciona la tercera ecuación relevante del sistema dinámico:

(3) $$r_K + \delta = A\,.$$

El sector productor del bien de consumo se caracteriza por rendimientos constantes a escala en capital y tierra. Utilizando una especificación Cobb-Douglas, la función mencionada adopta la siguiente forma:

$$C = B(xK)^{\alpha}\,T^{1-\alpha} = B(xK)^{\alpha}\,,\quad 0 < \alpha < 1,\; T = 1.$$

Donde C es la producción del bien de consumo en el período de análisis, B es la productividad constante del sector, xK es el capital utilizado en el sector, T es la tierra disponible (que se normaliza a 1), y α es la elasticidad producto del capital (una fracción constante y positiva). Nótese que la productividad marginal del capital en este sector es decreciente.[2]

Tomando logaritmos de la función de producción del bien de consumo y diferenciando con respecto al tiempo se obtiene la cuarta ecuación del sistema dinámico:

(4) $g_C = \alpha\,(g_x + g_K)$,

Donde g_C es la tasa de crecimiento de la producción del bien de consumo, y g_x es la tasa de crecimiento de la asignación de capital en el sector productor del bien de consumo.

Las ganancias en el sector productor del bien de consumo se representan como sigue:

$$\Pi_C = C - (r_K + \delta)\,p(xK) - R = B(xK)^{\alpha} - (r_K + \delta)\,p(xK) - R \,.$$

Donde R es la renta de la tierra (en un sistema competitivo esta renta aparece como un costo fijo que cada firma toma como un dato del mercado). La condición de primer orden para la maximización de ganancias arroja que la remuneración del capital es igual al valor de su producto marginal:

$$\alpha\, B(xK)^{\alpha - 1} = (r_K + \delta)\,p = A\,p \;.$$

El reemplazo al final hace uso de la ecuación (3). La función de ganancias es cóncava, de manera que el máximo existe. Tomando logaritmos de la expresión anterior y diferenciando con respecto al tiempo, se deduce la quinta ecuación dinámica del sistema:

(5) $g_A + g_p = (\alpha - 1)(g_x + g_K)$,

Donde g_p es la tasa de crecimiento del precio relativo del capital.

El supuesto de libre entrada y salida del capital implica ganancias nulas. Por tanto, la renta de la tierra se despeja como:

$$R = (1/\alpha - 1)(r_K + \delta)\,p(xK) \;.$$

Por simplicidad, en este trabajo se supone que los hogares maximizan una función de utilidad intertemporal con un coeficiente unitario de aversión al riesgo:

$$U_0 = \int_0^{\infty} e^{-\rho\, t} \log C\, dt \quad ,$$

Donde ρ es la tasa de descuento constante del consumidor típico. La maximización dinámica de esta función sujeta en cada período a la restricción presupuestaria de los hogares arroja la siguiente tasa de crecimiento del consumo:

(6) $g_C = r_C - \rho$,

Siendo r_C la tasa de interés denominada en el bien de consumo. El sistema se cierra si se añade la relación de indiferencia entre la tasa de interés denominada en el bien de consumo y la denominada en el bien de capital:

(7) $r_C = r_K + g_p$.

La tasa de interés denominada en el bien de consumo se iguala a la tasa de interés denominada en el bien de capital teniendo en cuenta las ganancias de capital (i.e., la tasa de cambio del precio relativo del capital).

Para resolver este sistema dinámico es conveniente tener en cuenta la restricción presupuestaria del consumidor típico:

[2] La interpretación del sector productor del bien de consumo como un sector cuya tecnología está sujeta a factores fijos (la tierra y otros recursos naturales), más la condición fungible del bien mencionado, sugiere que el consumo se compone de alimentos. Esta interpretación es conveniente, como se mostrará adelante, pero se mantendrá la referencia al bien de consumo como en el artículo original de Rebelo (1991).

$C + p\dot{K} + \delta pK = (r_K + \delta) pK + R$.

Aquí están en balance los gastos de los consumidores (consumo más inversión) con el ingreso generado por las rentas del capital y la renta de la tierra. Dividiendo a través por *pK*, utilizando las ecuaciones (1) y (3), y la expresión anteriormente deducida para la renta de la tierra, y realizando las debidas cancelaciones, se obtiene la siguiente relación:

$C = pAxK/\alpha$.

Por tanto, tomando logaritmos y diferenciando con respecto al tiempo, se deduce

(8) $g_x = g_C - g_p - g_K - g_A$.

Esta expresión también se puede obtener restándole la ecuación (5) a la (4). Combinando las ecuaciones (3), (6) y (7) se despeja

(9) $g_C - g_p = (A - \delta - \rho)$.

Combinando las ecuaciones (1), (2), (8) y (9) se obtiene la ecuación diferencial que determina la dinámica de la asignación del capital entre los sectores:

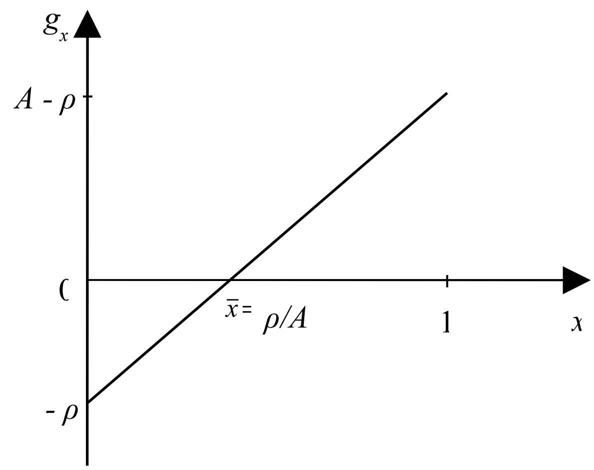
(10) $g_x = -(\theta + \rho) + (\theta + A)x$.

Las ecuaciones (2) y (10) constituyen el sistema de ecuaciones diferenciales que comanda la dinámica del sistema económico.

Antes de analizarlo en su plenitud, conviene mirar el caso del modelo de Rebelo; aquel en el cual no existe aprendizaje en la práctica y, por consiguiente, el parámetro θ es nulo (*A* es constante). En este caso, el sistema dinámico se reduce a la siguiente ecuación diferencial: $g_x = -\rho + Ax$. El diagrama de fase correspondiente es sencillo y se presenta en la Gráfica 1. Dado que *A* es invariable, la asignación del capital se define desde el primer momento y también es invariable: la participación del sector productor del bien de consumo en la demanda de capital es igual a $\bar{x} = \rho/A$, una fracción constante, si se supone que la economía es suficientemente productiva ($A > \rho$). Note que una asignación diferente conduce a la especialización completa en un tiempo finito, lo cual no es económicamente viable en el largo plazo.

Gráfica 1
Dinámica de la Asignación del Trabajo

Modelo de Rebelo: Equilibrio Competitivo



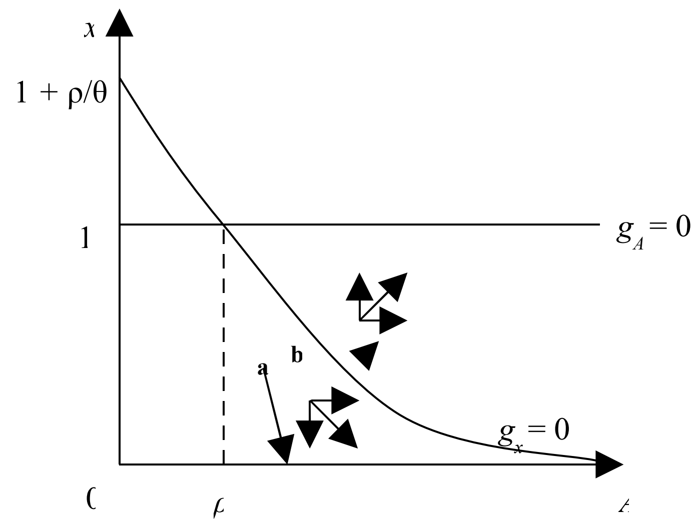
Se pasa ahora al análisis del sistema dinámico cuando existe aprendizaje en la práctica ($\theta > 0$ y A creciente). El diagrama de fase se presenta en la Gráfica 2. La ecuación (2) implica que sólo para $x = 1$ (todo el capital se asigna al sector productor del bien de consumo) cesa el crecimiento de la productividad del sector productor del bien de capital. Eso define la línea de descanso de A ($g_A = 0$). Para cualquier otro x (< 1), A aumenta de forma continua. Por otra parte, la ecuación (10) permite definir el *locus* de descanso de x; para $g_x = 0$ se despeja

(11) $\bar{x} = (\theta + \rho)/(\theta + A)$.

Esta ecuación define la asignación específica de x que detiene instantáneamente (dado A) el cambio en x. Esta ecuación se representa con una línea: cuando $A = 0$, $\bar{x} = 1+\rho/A > 1$ (nótese que valores de x mayores que 1 sólo se pueden considerar de forma teórica, pero claramente no tienen sentido económico); cuando $A = \rho$, $\bar{x} = 1$; y, por último, cuando A tiende a infinito, $\bar{x}$ tiende asintóticamente a cero.

La dinámica de la asignación del capital se puede analizar como sigue: dado A, la ecuación (10) implica que un valor de x superior al valor de descanso ($x > \bar{x}$) implica un crecimiento positivo de x; por el contrario, un valor inferior ($x < \bar{x}$) implica un crecimiento negativo. En consecuencia, como muestra la Gráfica 2, es posible definir la composición de las fuerzas que mueven a cualquier asignación (A, x): una combinación (A, x) que esté por encima del *locus* de descanso de x se mueve en dirección noreste, lo cual implica que en tiempo finito todo el capital se asigna al sector productor del bien de consumo ($x = 1$); una combinación (A, x) que se ubique por debajo del *locus* de descanso instantáneo de x se mueve en dirección sureste. Se generan en este último caso dos posibilidades. La Gráfica 2 las ilustra. Si el coeficiente de aprendizaje, θ, es suficientemente pequeño (el caso más cercano al modelo de Rebelo), domina el efecto de fuga y, en tiempo finito, como ilustra la senda de movimiento del punto **a**, todo el capital se asigna al sector productor del bien de capital ($x = 0$); si el coeficiente de aprendizaje es grande, es posible que el efecto de fuga sea contrarrestado: la senda de movimiento del punto **b** cae al principio, cruza el *locus* de descanso de x con una velocidad vertical instantánea igual a 0, y luego aumenta para alcanzar $x = 1$, de nuevo en tiempo finito. Así, cualquier combinación (A, x) que esté por fuera del *locus* de descanso de *x*, implica una senda dinámica incompatible con el crecimiento económico sostenido. Se postula, por tanto, que los agentes económicos racionales y previsivos se mantienen en condiciones competitivas en la asignación dada por la ecuación (11).

Gráfica 2
Dinámica de la Asignación del Trabajo con Aprendizaje en la Práctica
Equilibrio Competitivo



De lo anterior se deduce que la trayectoria del modelo compatible con crecimiento sostenido implica cambio estructural: el aumento de la productividad del sector productor del bien de capital cambia continuamente la asignación de capital del sector productor del bien de consumo hacia el sector productor del bien de capital.

Reemplazando la ecuación (11) en la (2) se deduce que la tasa de crecimiento de la productividad del sector productor del bien de capital a lo largo de la senda de desarrollo competitivo se define como sigue:

$$g_A = \theta\,(A-\rho)/(\theta + A) > 0$$

El cambio estructural se realiza a la siguiente tasa [tómense logaritmos de la ecuación (11), diferencie con respecto al tiempo y utilice la tasa de crecimiento de *A*],

$$g_{\bar{x}} = -\theta\,A(A-\rho)/(A+\theta)^2 < 0\,.$$

La substitución de la ecuación (11) en la (1) arroja la tasa de acumulación de capital:

$$g_K = A(A-\rho)/(A+\theta) - \delta$$

Utilizando la ecuación (4) se deduce la tasa de crecimiento de la producción del bien de consumo:

$$g_C = \alpha\,(A-\rho)\left[A/(A+\theta)\right]^2 - \alpha\,\delta$$

Nótese que el crecimiento de la productividad implica crecimiento acelerado.

El PIB de esta economía se puede expresar como sigue:

$$PIB = C + pI = [1 + \alpha\,(1 - x)/x]\,C$$

Para realizar esta deducción se utiliza el despegue anterior del nivel de equilibrio de la producción del bien de consumo [$C = pAxK/\alpha$], y la función de oferta del bien de capital [$I = A(1\text{-}x)K$]. Como x disminuye (sin llegar a 0), y C aumenta, el *PIB* también crece aceleradamente.

3. Modelo Bisectorial con Aprendizaje en la Práctica en el Sector Productor del Bien de Capital: Comando Óptimo

Considérese un dictador omnisapiente que se propone maximizar la función de utilidad intertemporal del consumidor típico:

$$U_0 = \int_0^\infty e^{-\rho t} \log C \, dt \, .$$

Para lograrlo se circunscribe en cada momento a la función de producción del bien de consumo:

$$C = B(xK)^\alpha \, ,$$

Y al balance entre disponibilidad y requerimientos del bien de capital:

$$A(1-x)K = \dot{K} + \delta K \, .$$

Como la trayectoria de la productividad del capital está dada por la ecuación (2), la ecuación Hamiltoniana relacionada con este problema es la siguiente:

$$H = e^{-\rho t}[\log B + \alpha \log(xK)] + \lambda\,[A(1-x)K - \delta K] + \mu\,[\theta\, A(1-x)] \, .$$

La variable de control es x, y las variables de estado son K y A: el capital de la economía y la productividad en la producción del bien de capital. La valoración del capital está dada por λ, y la valoración de la productividad está dada por μ. La condición de primer orden para la maximización de la utilidad intertemporal es la siguiente: $\partial H/\partial x = 0$. De esta condición se despeja la asignación óptima del capital en el sector productor del bien de consumo:

$$x^\circ = \frac{\alpha\, e^{-\rho t}}{A\,[\lambda K + \mu\theta\,]} \, .$$

Reemplazando esta asignación en la ecuación Hamiltoniana, se obtiene la ecuación Hamiltoniana maximizada H°. Se deducen ahora las otras condiciones de primer orden relacionadas con la valoración de las variables de estado:

$$-\dot{\lambda} = H_K^\circ \;\therefore\; \dot{\lambda} = -A\theta\mu\, x/K - (A-\delta)\lambda \, ,$$

$$-\dot{\mu} = H_A^\circ \;\therefore\; \dot{\mu} = -(\lambda K + \theta\mu)(1-x) \, .$$

Tomando logaritmos de la expresión para x°, y diferenciando con respecto al tiempo, se deduce:

$$g_{x^\circ} = -\rho - g_A - (\lambda K + \theta\mu)^{-1}(\lambda\dot{K} + K\dot{\lambda} + \theta\dot{\mu}) = -\rho + Ax \, .$$

La última parte de la expresión se obtiene realizando los reemplazos correspondientes a g_A y las derivadas temporales de K, λ y μ. De nuevo, sólo la trayectoria de descanso instantáneo de x° (A dada) es económicamente viable y, en este caso, óptima:

$$x^\circ = \rho\, / A \, .$$

Las condiciones de transversalidad de este problema establecen que el valor del capital, λK, y el valor de la productividad, μA, deben converger a cero cuando el tiempo aumente sin límite. No es fácil obtener una solución analítica de los valores mencionados, pero se puede probar que sus correspondientes derivadas temporales son negativas cuando la economía transita por la senda óptima:

$$\lambda \dot{K} + K\dot{\lambda} = -\rho\,(\lambda K + \theta\mu) < 0,$$

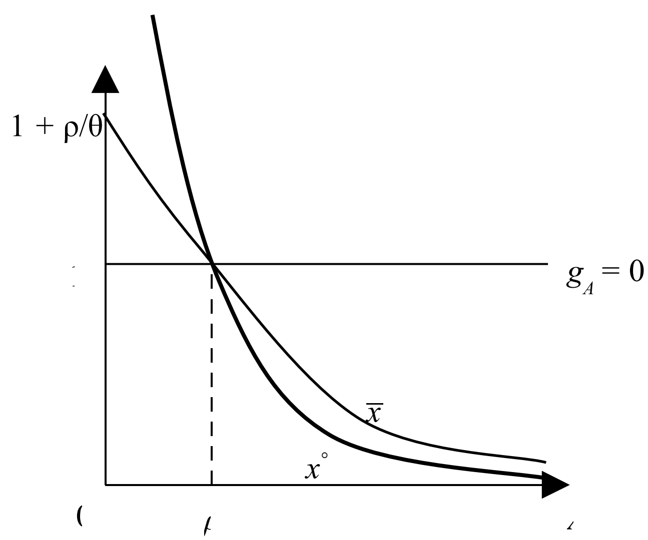
$$\mu \dot{A} + A\dot{\mu} = -(A - \rho)\lambda K < 0.$$

Para obtener estos resultados se combinan las ecuaciones (1) y (2), las condiciones de maximización de primer orden del Hamiltoniano, y la asignación óptima del capital al sector productor del bien de consumo ($x°$).

En el Anexo 1 se muestra que la senda de crecimiento óptima es consistente con la maximización de la función de utilidad intertemporal: la función objetivo es acotada y consistente con crecimiento acelerado siempre y cuando exista un nivel mínimo de capital, y el coeficiente de aprendizaje, θ, sea pequeño (bastante menor que la tasa de descuento, ρ). En consecuencia, la senda de crecimiento competitivo, que es inferior a la senda óptima, también es viable siempre y cuando las condiciones mencionadas sean satisfechas.

La Gráfica 3 muestra la trayectoria competitiva ($\bar{x}$) y la trayectoria óptima ($x°$). La primera se representa con una línea delgada y la segunda con una línea gruesa. Se observa claramente que, para la zona económicamente viable ($A > \rho$), la trayectoria óptima implica una menor asignación de capital al sector productor del bien de consumo (una mayor asignación al sector productor del bien de capital). La explicación de este comportamiento es clara: los agentes privados no captan el efecto externo de la industrialización sobre la productividad de la economía; en consecuencia, invierten menos de lo socialmente deseable en la acumulación de capital. Luego, un gobierno sensato debe promover y apoyar la producción del bien de capital.

Gráfica 3
Dinámica de la Asignación del Trabajo con Aprendizaje en la Práctica
Comando Óptimo vs. Equilibrio Competitivo



4. Necesidades Básicas y Cambio Estructural

A lo largo de la senda de desarrollo competitivo de la economía aquí analizada se presenta un cambio estructural completo en el infinito. No obstante, la experiencia histórica no es consistente con una contracción completa del sector productor de alimentos. Lo que ha sucedido en las sociedades más avanzadas es que la participación de este sector en la generación del producto nacional converge a un nivel mínimo positivo.

Para incorporar esa característica en el modelo se supone que en cada período los consumidores requieren un determinado nivel mínimo de consumo. Es el nivel de consumo que satisface las necesidades básicas (Nurkse, 1963).[3] De esta forma, la homoteticidad de las preferencias se pierde: para bajos niveles de ingreso, una fracción importante del gasto se destina a satisfacer las necesidades básicas, y esa fracción tiende a disminuir a medida que el nivel de ingreso aumenta.

Una modificación a la Stone-Geary de la función de utilidad intertemporal incorpora las consideraciones anteriores:

$$U_0 = \int_0^\infty e^{-\rho t} \log(C_t - \gamma_t)\, dt \ ,$$

Donde γ_t es el nivel mínimo requerido del bien de consumo en el período t. La maximización intertemporal de esta función objetivo sujeta instantáneamente a la restricción presupuestal del consumidor que se planteó arriba, y bajo el supuesto de que el consumidor toma en cada período el consumo mínimo referenciado como un dato, arroja la siguiente tasa de crecimiento del consumo:

$$(6') \qquad g_C = (r_C - \rho)(1 - \gamma_t / C_t) = (r_C - \rho)/\beta \ .$$

Para que la maleabilidad matemática del modelo se preserve, se supone que el consumo mínimo requerido del consumidor típico evoluciona directamente con el nivel general de consumo: $\gamma_t/C_t = \gamma < 1$. En consecuencia, el parámetro $\beta \equiv (1-\gamma)^{-1} > 1$. La idea aquí es que el requerimiento mínimo individual de consumo es tomado como un dato en cada período; pero de un período a otro este requerimiento mínimo aumenta con la capacidad productiva de la sociedad. En el largo plazo opera un proceso social de nivelación de los niveles de vida; este efecto fue analizado originalmente por Duesenberry (1949), con su teoría del consumo basado en el ingreso relativo. Nurkse (1961) desarrolló este análisis postulando que las funciones de utilidad no son soberanas sino interdependientes: los estratos pobres de la población, argumentaba Nurkse, tienden a adoptar los patrones de consumo de los ricos, a los cuales inicialmente no tienen acceso. Por tanto, con el aumento de la productividad y del ingreso, aumentan las necesidades básicas de forma irreversible: una vez alcanzado cierto nivel de vida, la capacidad de renunciar a las ganancias obtenidas es ínfima o nula.

Sustituyendo la ecuación (6) por la (6´) en el sistema dinámico anterior, y resolviendo de la misma forma, se llega a la siguiente ecuación diferencial de la asignación de capital al sector productor del bien de consumo:

$$g_x = -\frac{(\rho + \theta) + \alpha(1-\beta)(A-\delta)}{1-\alpha(1-\beta)} + \left(A + \frac{\theta}{1-\alpha(1-\beta)} \right) x \ .$$

La trayectoria económicamente viable es igualmente aquella en la cual se presenta un descanso instantáneo en esta asignación ($g_x = 0$), suponiendo dada la productividad marginal

[3] Por esta razón, resulta conveniente en este trabajo identificar el bien de consumo con alimentos. Sin embargo, éste es sólo un supuesto operativo; en la interpretación de Nurkse las necesidades básicas son aquellas que se satisfacen con bienes o servicio que se consideran imprescindibles.

del capital del sector productor del bien de capital (A). Por tanto, la asignación del capital al sector productor del bien de consumo es la siguiente:

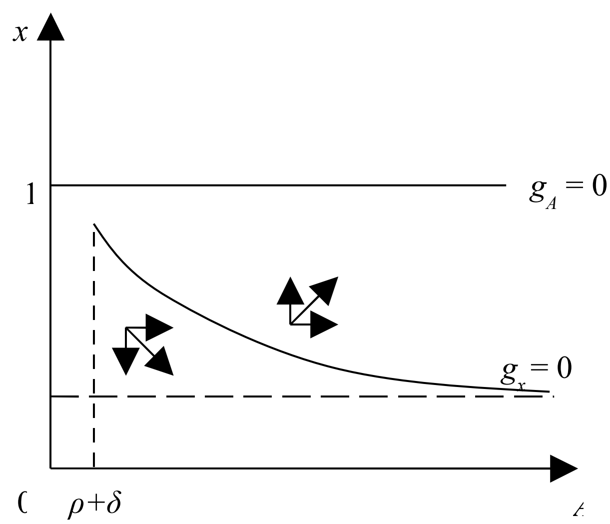
$$\bar{x} = \frac{(\rho + \theta) - \alpha\,(1-\beta)(A-\delta)}{\theta + [1-\alpha\,(1-\beta)]A}\ .$$

Si se supone que la tecnología del sector productor del bien de capital cumple una condición mínima de productividad ($A > \rho + \delta$), la asignación de capital al sector productor del bien de consumo es menor al 100%, y la asignación es positiva pero decreciente en A, como se ilustra en la Gráfica 4. Cuando A tiende a infinito, la asignación dinámicamente estable converge a la siguiente fracción:

$$\lim_{A\to\infty} \bar{x} = \frac{-\alpha\,(1-\beta)}{1-\alpha\,(1-\beta)} > 0.$$

En tal caso, la asignación de capital para el sector productor del bien de consumo encuentra un límite mínimo positivo.

Gráfica 4
Dinámica de la Asignación del Trabajo con Aprendizaje en la Práctica y Necesidades Básicas: Equilibrio Competitivo



5. Ventajas Comparativas y Asignación de Recursos

Considérese, a la manera de Matsuyama (1992), que el mundo está compuesto por muchas economías idénticas, cuyos parámetros se caracterizan con asterisco, y una economía particular, subdesarrollada, cuyo comportamiento en autarquía es el que se acaba de caracterizar. El mercado mundial es competitivo y su equilibrio general también obedece los resultados que se obtuvieron arriba, pues la economía mundial no es más que una economía cerrada más amplia. Aunque los parámetros de la economía subdesarrollada les son peculiares –sobre esto se elabora adelante-, su tamaño es tan pequeño que no modifica el equilibrio del mercado mundial. Los precios, en especial, son determinados por el mercado mundial y se le imponen a nuestra economía particular exógenamente.

Un supuesto fundamental que realiza Matsuyama para caracterizar a las economías menos desarrolladas es que la productividad del sector productor de bienes de consumo (alimentos, en el caso de Matsuyama) depende críticamente de condiciones naturales específicas de cada país. Así, aunque las tecnologías sean las mismas, las productividades pueden ser diferentes. En especial, se supone que la productividad del país subdesarrollado en el sector productor del bien de consumo es mayor que en el resto del mundo: $B > B^*$, pues se postula que la economía subdesarrollada tiene una buena dotación de recursos naturales y ambientales. También se supone que el aprendizaje en la práctica está fuertemente circunscrito a las fronteras nacionales: se supone que existen fuertes restricciones para la movilidad internacional del capital y la transferencia de tecnología. Este es un supuesto aplicable al caso del capital humano, pero precisamente el aprendizaje en la práctica es un mecanismo de potenciación de la productividad del capital humano. En consecuencia, la mayor trayectoria del resto del mundo en la producción del bien de capital en relación con la (corta) trayectoria industrial del país subdesarrollado implica que la productividad industrial del resto del mundo es superior: $A^* > A$.

Una vez abierto al comercio internacional, el país subdesarrollado ya no determina endógenamente el precio relativo del bien de capital, sino que lo toma exógenamente, como términos de intercambio, del mercado mundial. Estos términos de intercambio se denominan con la variable p^*. Se supone que no existen costos de transporte para los bienes.

Se examina ahora la asignación de recursos en la economía subdesarrollada. Si no se presenta especialización completa, en equilibrio el valor del producto marginal del capital se debe igualar entre los sectores:

(12) $\alpha B(xK)^{\alpha-1} = Ap^*$.

El país típico del resto del mundo obedece la misma condición con sus respectivos parámetros:

(13) $\alpha B^*(x^*K^*)^{\alpha-1} = A^* p^*$.

Además, la asignación de capital del resto del mundo está dada por

(14) $x^* = (\theta+\rho)/(\theta+A^*)$,

Y esta asignación crece a la siguiente tasa:

$$g_{x^*} = -\frac{A^*\theta\,(A^*-\rho)}{(A^*+\theta)^2}.$$

Utilizando las ecuaciones (12) y (13) para despejar los términos de intercambio, se descubre que la asignación relativa del capital entre el país subdesarrollado y el país típico del resto del mundo cumple la siguiente condición:

(15) $$\frac{x}{x^*} = \left(\frac{A^*/B^*}{A/B}\right)^{1/(1-\alpha)}\left(\frac{K^*}{K}\right).$$

En consecuencia, la asignación de capital en el país depende de su ventaja comparativa, la cual depende de la razón de las productividades relativas ($(A/B)/(A^*/B^*)$), y de su dotación relativa de capital (K/K^*). El primer efecto es postulado por Matsuyama (1992) en un modelo sin acumulación de capital; el segundo efecto es aportado por este modelo dado que incorpora acumulación de capital. Si el país subdesarrollado se caracteriza, como plantea

Matsuyama, por una baja productividad relativa en la producción del bien de capital ($A/B < A^*/B^*$), y su dotación relativa de capital es baja ($K < K^*$), el país se especializa en la producción del bien de consumo: $x > x^*$. Como la tasa de crecimiento aumenta con el grado de industrialización, la tasa de crecimiento del país subdesarrollado disminuye. Pero es más, su especialización en el bien de consumo tiende a reforzarse en el tiempo. Para verlo, tómense logaritmos de la expresión (15) y derívese con respecto al tiempo. Teniendo en cuenta que los únicos parámetros fijos son las productividades del sector productor del bien de consumo (B y B^*), y que la tasa de crecimiento de las variables y los demás parámetros se definió previamente, se deduce que la tasa de crecimiento de la asignación de capital en el país subdesarrollado se determina como sigue:

$$(16) \qquad g_x = \theta\,(x - x^*)/(1-\alpha) + [A^*(1-x^*) - A(1-x)] - g_{x^*} > 0 \; .$$

La tasa es positiva porque $x - x^* > 0$, $A^* > A$, y $g_{x*} < 0$. Por tanto, el país subdesarrollado experimenta una involución en su transformación estructural, su tasa de crecimiento disminuye, y sigue disminuyendo hasta que se estabiliza en un menor nivel que el inicial.[4]

6. Comentarios Finales

La incorporación de aprendizaje en la práctica en el modelo de Rebelo (1991), específicamente en el sector productor del bien de capital, permite que el modelo reproduzca dos patrones típicos del desarrollo económico mundial: la tendencia a la aceleración del crecimiento y el cambio estructural. El equilibrio competitivo es inferior al comando óptimo porque las firmas individualmente consideradas no incorporan en sus cálculos los efectos productivos derivados del aprendizaje en la práctica. Así, en un contexto de autarquía hay campo para una política económica industrial que favorezca la producción del bien de capital. También se muestra que si los agentes tienen necesidades básicas, y éstas evolucionan socialmente al ritmo de la expansión del ingreso y del consumo, el cambio estructural lleva la asignación de capital para el sector productor del bien de consumo a un mínimo positivo. Finalmente, una economía pequeña con ventaja comparativa en el sector productor del bien de consumo, se especializa en la producción de tales bienes. Ello puede implicar una involución de su proceso de cambio estructural; en este caso, la economía crece más lentamente y la tasa de crecimiento económico disminuye hasta alcanzar un nivel inferior.

El modelo arroja que la ventaja comparativa de un país pequeño no sólo depende de su productividad relativa en el sector productor del bien de capital en relación con la del resto del mundo (efecto Matsuyama), sino también de la dotación relativa de capital del país. Ello significa que un país, incluso si está abierto al comercio internacional, tiene campo para políticas industriales, especialmente las dirigidas a consolidar su sector productor de bienes de capital y su propia acumulación de capital.

[4] Las predicciones de este modelo para un país con ventajas comparativas naturales que se abre al comercio internacional son consistentes con la experiencia colombiana: después de las políticas aperturistas de 1990, el país se desindustrializó, se especializó en actividades primarias y agroindustriales –incluyendo el floreciente negocio de las drogas ilícitas-, y disminuyó marcadamente su tasa de crecimiento económico de largo plazo (ver Ortiz, 2004).

Referencias Bibliográficas

Aghion, Phillippe y Peter Howitt. 1992. “A Model of Growth through Creative Destruction”, *Econometrica*, Vol. 60, No. 2 (March), pp. 323-351.

Amsden, Alice. 1989. *Asia's Next Giant,* Oxford University Press.

Arrow, Keneth. 1962. “The Economic Implications of Learning by Doing”, *Review of Economic Studies*, Vol. 29, May, pp. 155-173.

Backus, David K.; Patrick J. Kehoe y Timothy J. Kehoe. 1992. “In Search of Scale Effects on Trade and Growth”, *Journal of Economic Theory*, Vol. 58, pp. 377-409.

Barro, R. 1990. “Government Spending in a Simple Model of Endogenous Growth”, *Journal of Political Economy*, 98(5), S103-117.

Chenery. H.B. 1960. “Patterns of Industrial Growth”, *American Economic Review*, Vol. 88, pp. 495-515.

Chenery, H.B.; S. Robinson and M. Syrquin. 1986. *Industrialization and Growth: A Comparative Study,* Washington, published for the World Bank, Oxford University Press.

Duesenberry, J. S. 1949. *Income, Saving and the Theory of Consumer Behaviour*, Cambridge, Mass.

Grossman, G. and Helpman, E. 1991. *Innovation and Growth in the Global Economy,* MIT Press.

Kaldor, Nicholas. 1961. "Capital Accumulation and Economic Growth" en *The Theory of Capital,* eds. F. Lutz y D. Hague, Macmillan, Londres.

Kongsamut, Piyabha, Sergio Rebelo y Danyang Xie. 2001. “Beyond Balanced Growth”, *The Review of Economic Studies*, Vol. 68, No. 4, octubre, pp.869-882.

Krugman, Paul. 1987. “The Narrow Moving Band, the Dutch Disease and the Competitive Consequences of Mrs. Thatcher: Notes on Trade in the Presence of Dynamic Scale Economies”, *Journal of Development Economics*, Vol. 27, pp. 41-55.

Laitner, John. 2000. “Structural Change and Economic Growth”, *The Review of Economic Studies*, Vol. 67, No. 3, pp. 454-561.

Landes, David. 1998. *The Wealth and Poverty of Nations*, W.W. Norton and Company.

Lucas, Robert Jr. 1988. “On the Mechanics of Economic Development”, *Journal of Monetary Economics*, Vol. 22, pp. 3-42.

____________. 1993. "Making a Miracle", *Econometrica*, Vol. 61, No. 2, pp. 251-272.

Matsuyama, Kiminori. 1992. "Agricultural Productivity, Comparative Advantage and Economic Growth", *Journal of Economic Theory*, Vol. 58, pp. 317-334.

Murphy, K.M.; Shleifer, A.; y Vishny, R.W. 1989. "Industrialization and the Big Push", *Journal of Political Economy*, Vol. 27, No. 5, pp. l003-1026.

Nurkse, R. 1963. *Problems of Capital Formation in Underdeveloped Countries*, ed. Basil Blackwell, New York, Oxford.

Ortiz, Carlos H. 2004. "An Economic Growth Model showing Government Spending with Reference to Colombia and Learning By Doing", *Colombian Economic Journal*, Vol. 2, No 1, p. 156-188.

Rapping, Leonard A. 1965. "Learning and World War II Production Functions", *Review of Economic Statistics*, Vol. 47, pp. 81-86.

Rebelo, Sergio. 1991. "Long-Run Policy Analysis and Long-Run Growth", *Journal of Political Economy*, Vol. 99, No. 3, pp. 500-521.

Romer, P. 1986. "Increasing Returns and Long-Run Growth", *Journal of Political Economy*, Vol. 94, No. 5, October, 1002-1037.

_____________. 1987. "Growth Based on Increasing Returns Due to Specialization", *American Economic Review, Papers and Proceedings. 77*, 56-62.

_____________. 1990. "Endogenous Technological Change", *Journal of Political Economy*, Vol. 98, No. 5, S71-S102.

Sraffa, Piero. 1960. *Production of Commodities by Means of Commodities*, Cambridge University Press.

Young, Alwyn. 1991. "Learning by Doing and the Effects of International Trade", *Quarterly Journal of Economics*, Vol. 106, pp. 369-406.

____________. 1993. "Invention and Bounded Learning by Doing", *Journal of Political Economy*, Vol. 101, pp. 443-47.

Anexo 1.

Romer (1986) demostró que es posible construir un modelo de equilibrio económico general que se caracteriza por trayectorias de acumulación compatibles con crecimiento acelerado y comportamiento optimizador. De manera análoga, en este anexo se muestra que, bajo ciertas condiciones, la senda óptima de crecimiento acelerado que se caracteriza en la tercera sección puede maximizar la función objetivo sujeta a la restricción presupuestaria del consumidor representativo y a las dotaciones de capital y de productividad.

La función de utilidad intertemporal es la siguiente:

$U_0 = \int_0^\infty e^{-\rho t} \log C_t \, dt$.

Para que la senda de crecimiento sea óptima debe cumplirse que esta integral sea acotada. Una condición necesaria para ello es que el integrando disminuya sistemáticamente. Y esta condición, a su vez, se satisface en todo momento cuando se cumple la siguiente desigualdad:

(1′) $\log C_t > g_C / \rho$.

Conviene ir por partes. Dada la función de producción del sector productor del bien de consumo, $C_t = B(x_t K_t)^\alpha$, se deduce la tasa de crecimiento del sector: $g_C = \alpha(g_x + g_K)$. Utilizando la asignación óptima del capital al sector productor del bien de consumo, $x_t^\circ = \rho/A_t$, se deduce la tasa del cambio estructural: $g_{x^\circ} = -g_A$. Reemplazando la asignación mencionada en la ecuación (1) se define la tasa de crecimiento del capital, $g_K = (A_t - \rho - \delta)$; reemplazando la misma asignación en la ecuación (2) se calcula la tasa de crecimiento de la productividad del sector productor del bien de capital, $g_A = \theta(1 - \rho/A_t)$. Por tanto, la expresión reducida de la tasa de crecimiento del consumo se despeja como sigue:

$g_C = \alpha \left[(A_t - \rho)(1 - \theta / A_t) - \delta \right]$.

Para que el consumo aumente ($g_C > 0$), se debe cumplir la siguiente desigualdad:

(2′) $\theta / A_t < (A_t - \rho - \delta)/(A_t - \rho)$.

Si la productividad del capital en el sector que lo produce es suficientemente alta ($A_t > \rho + \delta$), la desigualdad (2′) implica que el coeficiente de aprendizaje no puede ser mayor que la productividad del sector productor de capital: $\theta/A_t < 1$.

Con todos estos elementos, la condición (1′) se puede reescribir como sigue:

$\log B + \alpha \log \rho + \alpha \log K_t - \alpha \log A_t > \alpha \left[(A_t - \rho)(1 - \theta / A_t) - \delta \right] / \rho$.

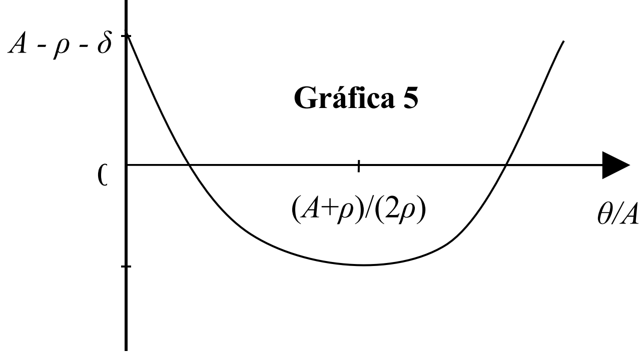
Esta desigualdad se puede cumplir en cualquier momento si la dotación de capital es suficientemente alta. Pero es necesario, además, que se mantenga en el tiempo. Por tanto, la derivada temporal del lado izquierdo debe ser mayor que la del lado derecho:

$\alpha \, g_K - \alpha \, g_A > \alpha \, (A_t / \rho - \theta / A_t) g_A$.

Reemplazando las expresiones arriba deducidas para g_K y g_A en la anterior desigualdad, y reorganizando, se deriva la siguiente condición:

(3′) $(\theta / A_t)^2 - (A_t / \rho + 1)(\theta / A_t) + (A_t - \rho - \delta)/(A_t - \rho) > 0$.

El lado izquierdo de la desigualdad es una expresión cuadrática en θ/A_t. Su forma funcional se dibuja en la Gráfica 5.



Gráfica 5

$-(A-\rho)^2/(2\rho) - \delta$

La Gráfica muestra que la expresión cuadrática es positiva para valores de θ/A_t cercanos a cero y para valores mucho mayores que 1 (el mínimo de la expresión cuadrática, $(A_t+\rho)/(2\rho)$, es mayor que 1). Se mostró arriba que valores de la razón θ/A_t mayores que 1 se descartan para evitar que la economía haga implosión (caída del consumo). Por tanto, θ/A_t debe ser menor que la menor raíz de la expresión cuadrática:

(4´) $$\theta / A_t < \left((A_t/\rho + 1) - \sqrt{(A_t/\rho + 1)^2 - 4(A_t - \rho - \delta)/(A_t - \rho)} \right)/2$$

El discriminante es positivo pues $(A_t/\rho+1) > 2$. Se concluye que el coeficiente de aprendizaje puede ser positivo, pero no demasiado. Para estos valores existe una solución óptima del problema intertemporal analizado.

Dado que θ/A_t es cercano a cero, se puede ignorar su cuadrado en la desigualdad (3´). Esto, de hecho, implica una desigualdad más estricta. Se llega así a la siguiente condición:

(5´) $$\theta < \rho \frac{A_t}{A_t + \rho} \frac{A_t - \rho - \delta}{A_t - \rho} .$$

Dado que $A_t/(A_t+\rho) < 1$, y $(A_t-\rho-\delta)/(A_t-\rho) < 1$, se deduce que $\theta << \rho$: si el coeficiente de aprendizaje es mucho menor que la tasa de descuento, la senda intertemporal óptima existe.